Fonction zêta de Riemann : beaucoup de nouveautés !

Colloquium LAGA
Vendredi 19 juin

Régis de la Bretèche
Université de Paris
France

regis.delabreteche@imj-prg.fr

1. Rappel

La fonction zêta de Riemann $\zeta(s)$ est définie par la série de Dirichlet

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - 1/p^s} \qquad (\Re e(s) > 1).$$

Nous avons aussi

$$\zeta(s) = s \int_0^{+\infty} [t] t^{-s-1}\,\mathrm{d}t = \frac{s}{s-1} - s \int_0^{+\infty} \{t\} t^{-s-1}\,\mathrm{d}t. \qquad (\Re e(s) > 0).$$

La fonction zêta de Riemann satisfait l'équation fonctionnelle

$$\zeta(s) = \chi(s)\zeta(1-s),$$

avec

$$\chi(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\tfrac{1}{2}\pi s\right)\Gamma(1-s).$$

$\zeta(s)$ admet un pôle en $s = 1$ et est prolongeable en une fonction méromorphe sur tout $\mathbb{C}$.

Zéros de la fonction ζ de Riemann.

Nous avons $\zeta(-2n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$. Ces zéros sont appelés les zéros triviaux.

En 1859, Riemann a conjecturé que les seuls autres zéros de ζ sont sur la droite critique définie par $\Re e(s) = \frac{1}{2}$.

En 1896, Hadamard et de la Vallée Poussin établissent qu'il existe $c > 0$ tel qu'il n'y ait pas de zéro $s = \sigma + i\tau$ satisfaisant

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{c}{\log(|\tau| + 2)}.$$

N'a pas été beaucoup améliorée : indépendamment en 1958 Korobov et Vinogradov agrandissent cette région

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{c}{(\log(|\tau| + 2))^{2/3}(\log\log(|\tau| + 2))^{2/3}}.$$

Pas d'améliorations depuis !

Théorème des nombres premiers.

Cette région sans zéro fournit le Théorème des nombres premiers

$$\pi(x) := \mathrm{card}\{p \leqslant x\} = \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log t} + O\big(x\mathrm{e}^{-c\sqrt{\log x}}\big),$$

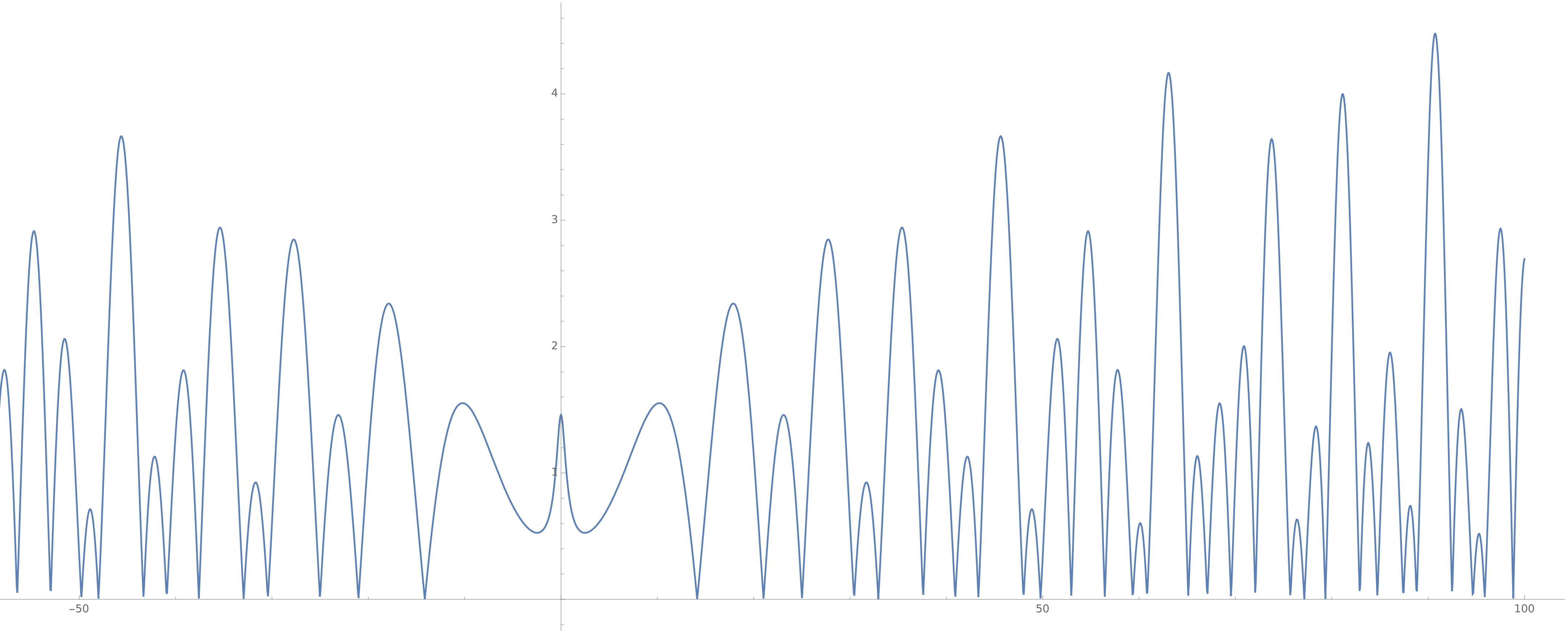
alors que l'hypothèse de Riemann fournit

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log t} + O\big(x^{1/2}(\log x)\big),$$

Notons $\varrho = \beta + i\gamma$ un zéro non trivial de ζ et posons

$$N(T) := \mathrm{card}\{0 \leqslant \gamma \leqslant T\} = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T).$$

L'hypothèse de Riemann implique que $|\zeta(\frac{1}{2}+it)| \ll_\varepsilon 1 + |t|^\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$.
Cette majoration s'appelle l'hypothèse de Lindelöf.
Des arguments de convexité $\Longrightarrow \frac{1}{4}$; Hardy Littlewood (1918) $\Longrightarrow \frac{1}{6}$.
Le meilleur résultat dans cette direction $\varepsilon > \frac{13}{84} = 0.155...$ Bourgain (2017).



$|\zeta(\frac{1}{2}+it)|$ où $|t| \leqslant 100$.

Quelques résultats numériques sur les zéros non triviaux.

$\varrho_1 \approx \frac{1}{2} + i14,1347 \quad \varrho_2 \approx \frac{1}{2} + i21,0220 \quad \varrho_3 \approx \frac{1}{2} + i25,0108 \quad \varrho_4 \approx \frac{1}{2} + i30,4248.$

L'hypothèse de Riemann est vérifiée sur les n premiers zéros avec
$n = 15$ Gram (1903), ..., $n = 1104$ Turing (1953),
$n = 1\,500\,000\,000$ van de Lune & co (1986)
$n = 10^{22}$ Odlyzko (1999)
D'après Selberg (1942), Levinson ($\frac{1}{3}$, 1974), Conrey ($\frac{2}{5}$, 1989), Pratt, Robles, Zaharescu, Zeindler (2020), lorsque T est suffisamment grand, on a

$$N_0(T) := \mathrm{card}\{0 \leqslant \gamma \leqslant T,\, \zeta(\tfrac{1}{2} + i\gamma) = 0\} \geqslant \frac{5}{12} N(T).$$

Les grandes valeurs de zêta sur la droite critique.

En 2008, Soundararajan établit

$$\sup_{1\leqslant\tau\leqslant T} |\zeta(\tfrac{1}{2}+i\tau)| \geqslant \exp\left\{(1+o(1))\sqrt{\frac{\log T}{\log\log T}}\right\}.$$

Principe de la méthode de la résonance[1]

$$\sup_{1\leqslant\tau\leqslant T} |\zeta(\tfrac{1}{2}+i\tau)|^2 \geqslant \frac{\int_1^T |\zeta(\frac{1}{2}+i\tau)|^2 |R(\tau)|^2 \,\mathrm{d}\tau}{\int_1^T |R(\tau)|^2 \,\mathrm{d}\tau}.$$

Pour cela, ils utilisent $R(\tau) := \sum_{m\in\mathcal{M}} r(m)m^{i\tau}$ où $\mathcal{M}$ est un ensemble fini d'entiers.

Le facteur $R(\tau)$ est appelé un résonateur car il doit prendre de grandes valeurs lorsque $\zeta(\frac{1}{2}+i\tau)$ l'est aussi et de petites valeurs sinon.

1. cf. Bart Michels (Paris 13) valeurs centrales de fonctions L de Rankin–Selberg.

En 2017, Bondarenko et Seip améliorent ce résultat lorsque $0 \leqslant \beta < 1$, $T \geqslant 1$

$$Z_\beta(T) := \max_{T^\beta \leqslant \tau \leqslant T} \left|\zeta(\tfrac{1}{2} + i\tau)\right| \geqslant \mathcal{L}(T)^{\sqrt{(1-\beta)}+o(1)},$$

avec $\mathcal{L}(T) := \exp\left\{\sqrt{\dfrac{\log T \log_3 T}{\log_2 T}}\right\}$, où $\log_k$ désigne la k-ième itérée du logarithme.

Tenenbaum et dlB ont amélioré le résultat $\geqslant \mathcal{L}(T)^{\sqrt{2(1-\beta)}+o(1)}$ (gain $\sqrt{2}$).

Pour cela, Tenenbaum et dlB étudient les sommes de Gál

$$S(\mathcal{M}) := \sum_{m,n\in\mathcal{M}} \frac{(m,n)}{\sqrt{mn}},$$

où (m,n) désigne le pgcd de m et n et $\mathcal{M}$ est un ensemble fini d'entiers.

Point clé : on n'a pas besoin d'une majoration des $m \in \mathcal{M}$, seulement une majoration du cardinal $|\mathcal{M}|$

Améliorant le résultat de Bondarenko et Seip ('15, '17), Tenenbaum et dlB montrent lorsque N tend vers l'infini ,

$$\max_{|\mathcal{M}|=N} \frac{S(\mathcal{M})}{|\mathcal{M}|} = \mathcal{L}(N)^{2\sqrt{2}+o(1)},$$

avec $\mathcal{L}(N) := \exp\left\{\sqrt{\dfrac{\log N \log_3 N}{\log_2 N}}\right\}$, Gain : $2\sqrt{2}$.

Farmer, Gonek et Hughes (2007) utilisent des modèles probabilistes pour conjecturer

$$Z_0(T) = \sup_{1 \leqslant \tau \leqslant T} |\zeta(\tfrac{1}{2} + i\tau)| \geqslant \exp\left\{(1 + o(1))\sqrt{\tfrac{1}{2}\log T \log\log T}\right\}.$$

(Utilisent un modèle liée aux matrices aléatoires).

Répartition des valeurs de zêta sur la droite critique.

Valeur typique de zêta : Théorème central limite de Selberg (1946). Pour tout $z \in \mathbb{R}$, lorsque T tend vers $+\infty$, nous avons

$$\frac{1}{T}\mathrm{mes}\Big\{T \leqslant \tau \leqslant 2T : \quad \frac{\log\left|\zeta(\frac{1}{2}+i\tau)\right|}{\sqrt{\frac{1}{2}\log\log T}} \leqslant z\Big\} \sim \Phi(z) =: \int_{-\infty}^{z} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2\pi}}.$$

Explication :

$$\log\left|\zeta(\tfrac{1}{2}+i\tau)\right| = \Re e\big(\log\zeta(\tfrac{1}{2}+i\tau)\big) \approx -\Re e\sum_{p\leqslant P}\log\Big(1-\frac{1}{p^{1/2+i\tau}}\Big) \approx \Re e\sum_{p\leqslant P}\frac{1}{p^{1/2+i\tau}}$$

pour un P convenablement choisi.

Les termes $p^{-i\tau}$ peuvent être vus comme des variables aléatoires indépendantes.

Ainsi $\log\left|\zeta(\frac{1}{2}+i\tau)\right|$ se comporte comme une somme de variables indépendantes.

Nouvelle preuve récente de Radziwiłł et Soundararajan (2017).

Le théorème de Selberg ne fournit pas une description satisfaisante des valeurs de ζ car les valeurs les plus grandes correspondent à des événements de très petite probabilité.

Fyodorov et Keating (2014) et Fyodorov, Hiary and Keating (2012) ont introduit un nouveau sujet de recherche :

Quelle est la répartition pour $t \in [T, 2T]$ de $\sup_{0 \leqslant h \leqslant 1} |\zeta(\frac{1}{2} + it + ih)|$?

Faisons a priori 3 hypothèses pour comprendre ce que l'on peut espérer :

– (H1) Le théorème central limite de Selberg reste vrai quand z est raisonnablement grand *i.e.* $\sim \Phi(z) \approx \mathrm{e}^{-z^2/2}/z$

– (H2) Lorsque $t \in [T, 2T]$, les valeurs de $\zeta(\frac{1}{2} + it + ih_1)$ et de $\zeta(\frac{1}{2} + it + ih_2)$ sont à peu près les mêmes lorsque $|h_2 - h_1| \leqslant 1/\log T$.

– (H3) Lorsque $t \in [T, 2T]$, les valeurs de $\zeta(\frac{1}{2} + it + ih_1)$ et de $\zeta(\frac{1}{2} + it + ih_2)$ varient de manière à peu près indépendante lorsque $|h_2 - h_1| > 1/\log T$.

(H2) $\Longrightarrow \sup_{0\leqslant h\leqslant 1}|\zeta(\frac12+it+ih)| \approx \max_{j\leqslant \log T}|\zeta(\frac12+it+i\frac{j}{\log T})|$

Or

$$\frac{1}{T}\mathrm{mes}\Big\{t\in[T,2T]\ :\ \max_{j\leqslant\log T}|\zeta(\tfrac12+it+i\tfrac{j}{\log T})|\geqslant \mathrm{e}^u\Big\}$$

$$\leqslant \sum_{j\leqslant \log T}\frac{1}{T}\mathrm{mes}\Big\{t\in[T,2T]\ :\ |\zeta(\tfrac12+it+i\tfrac{j}{\log T})|\geqslant \mathrm{e}^u\Big\}$$

$$\ll \log T\frac{\sqrt{\log\log T}}{u}\mathrm{e}^{-u^2/\log\log T}\qquad (z=u/\sqrt{\tfrac12\log_2 T})$$

On choisit alors $u=\log\log T-\frac14\log\log\log T+U$ et on obtient la majoration $\ll \mathrm{e}^{-2U+U^2/\log\log T}$. Ainsi heuristiquement

$$\sup_{0\leqslant h\leqslant 1}|\zeta(\tfrac12+it+ih)|\ll \mathrm{e}^{\log\log T-\frac14\log\log\log T+O(1)}.$$

De même si (H3) est correcte alors on a une minoration du même ordre.

En fait, la situation n'est pas aussi simple

Conjecture de Fyodorov, Hiary and Keating (2012) : si $g(T)$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$ alors

$$\mathrm{mes}_{[T,2T]}\Big\{\Big|\sup_{0\leqslant h\leqslant 1}\log|\zeta(\tfrac12+it+ih)| - (\log\log T - \tfrac34\log\log\log T)\Big| \leqslant g(T)\Big\} \sim T$$

En fait l'indépendance des valeurs de $\zeta(\frac12+it+ih_1)$ et de $\zeta(\frac12+it+ih_2)$ lorsque $|h_2-h_1|\geqslant 1/\log T$ n'est pas tout à fait vérifiée.

Corrélation :

$$\frac1T\int_T^{2T}\Re e\sum_{p\leqslant T^{1/3}}\frac{1}{p^{1/2+i\tau}}\Re e\sum_{p\leqslant T^{1/3}}\frac{1}{p^{1/2+i\tau+ih}}\,\mathrm{d}\tau \approx$$

$$\begin{cases}\frac12\log\log T & \text{si } |h|\leqslant 1/\log T\\ \frac12\log(1/|h|) & \text{si } 1/\log T\leqslant |h|\leqslant 1.\end{cases}$$

On écrit

$$\Re e \sum_{p \leqslant T^{1/3}} \frac{1}{p^{1/2+i\tau}} = \sum_{0 \leqslant k \leqslant \log\log(T^{1/3})} \Re e \sum_{k < \log\log p \leqslant \min\{k+1, T^{1/3}\}} \frac{1}{p^{1/2+i\tau}}$$

$$\frac{1}{T}\int_T^{2T} \Big(\Re e \sum_{k < \log\log p \leqslant k+1} \frac{1}{p^{1/2+i\tau}}\Big)^2 \mathrm{d}\tau \sim \tfrac{1}{2}.$$

Cette somme ne change pas lorsque τ dans un intervalle de longueur $\ll 1/\mathrm{e}^k$ (et non $\ll 1/\log T$).

Variables aléatoires gaussiennes de moyenne 0 et de variance égale : plus elles sont corrélées, plus leur maximum est plus petit.

Résultats intermédiaires de Arguin, Belius et Harper (2017),
Najnudel (2018, sous hypothèse de Riemann, $g(T) = o(\log\log T)$)
Arguin, Belius, Radziwiłł et Soundararajan, (2019)
puis Harper (2019) avec seulement la majoration avec :

$$g(T) = \tfrac{3}{2}\log\log\log\log T + h(T)$$

avec

$$\mathrm{mes}_{[T,2T]}\Big\{\sup_{0\leqslant h\leqslant 1}\log|\zeta(\tfrac{1}{2}+it+ih)| \leqslant \log\log T - \tfrac{3}{4}\log\log\log T + g(T)\Big\} \sim T$$

MERCI !