Corrigé de l'examen de probabilités 2e session, USTC 2022

I 1) Par indépendance des $X_{i,n}$, on a, pour tout $i \geq 0$, tout $U \in E$ et toute famille $y_0, \ldots y_i$ d'éléments de E, $P(Y_{i+1} = U | Y_0 = y_0, \ldots Y_i = y_i) = P(Y_{i+1} = U | Y_i = y_i) = P(\forall n, Y_i(X_{i,n}) = U(n))$.
2) $P(Y_{n+1} = Y_n) > P(\forall k, X_{k,n} = k) > 0$. Cela implique que $P(Y_1 = Y_0) > 0$ donc la période est 1, c'est-à-dire que la chaine est apériodique.
3) La suite de tribus (F_n) est croissante donc c'est une filtration. Par indépendance des $X_{i,n}$ par rapport à la tribu F_n, on a

$$E(M_{n+1}|F_n) = \sum_i E(Y_{n+1}(i)|F_n) = \sum_i E(Y_n(X_{i,n}))|F_n) = \sum_i \frac{1}{N} \sum_k E(Y_n(k))$$

En inversant l'ordre de sommation, on trouve

$$E(M_{n+1}|F_n) = \sum_k E(Y_n(k) \sum_i \frac{1}{N} = \sum_k E(Y_n(k) = M_n$$

4) (M_n) est une martingale bornée donc elle converge p.s.
5) Comme les M_n prennent des valeurs entières, la martingale ne peut converger que si elle est stationnaire à partir d'un certain rang. Or il est facile de voir que pour tout n et tout $m \notin \{0, N\}$ $P(Y_{n+1} \neq m | Y_n = m) > 0$. Par conséquent, $P(M_\infty = m) = 0$ si $m \notin \{0, N\}$. Comme (M_n) est bornée, par convergence dominée $E(M_\infty) = E(M_0) = NP(M_\infty = N)$. Donc $P(M_\infty = N) = E(M_0)/N = 1 - P(M_\infty = 0)$.
6) P.s, à partir d'un certain rang, M_n vaut 0 ou N. Or M_n vaut 0 si et seulement si pour tout i, $Y_n(i) = 0$ et M_n vaut N si et seulement si pour tout i, $Y_n(i) = 1$. Donc les 2 fonctions constantes sont récurrentes et les autres états sont transitoires.

II 1) Mêmes arguments que I 1)
2) Mêmes arguments que I 3)

III 1) On voit facilement que pour tous i, j, $Q_{|j-i|}(i,j) > 1/10^{|j-i|}$ donc la chaine est irréductible. De plus en considérant le chemin $i, i-1 \ldots 1, 0, 1 \ldots j$, on voit que $Q_{i+j}(i,j) > 0$ et en considérant le chemin $i, i-1 \ldots 1, 0, 0, 1 \ldots j$, on voit que $Q_{i+j+1}(i,j) > 0$ donc la chaine est apériodique.
2) Fixons Z_0. Soit (U_i) des variables iid avec

$$P(U_i = -1) = 9/10 = 1 - P(U_i = 1)$$

Posons $Z'_n = Z_0 + U_1 \ldots + U_n$ $T = \inf\{n, Z_n = 0\}$ et $T' = \inf\{n, Z'_n = 0\}$. Alors $(Z_n, n \leq T)$ et $(Z'_n, n \leq T')$ ont même loi. Or par la loi des grands nombres, T' est fini p.s donc T est fini p.s. On en déduit que 0 est récurrent pour (Z_n) et comme (Z_n) est irréductible, elle est récurrente.

On doit avoir
$$\mu(0) = (9/10)\mu(1) + (1/10)\mu(0)$$
et pour $n \geq 1$
$$\mu(n) = (9/10)\mu(n+1) + (1/10)\mu(n-1)$$
Ce qui se résoud facilement en $\mu(n) = 8/9^{n+1}$.
3) La martingale (M_n) est bornée donc converge p.s. Elle prend ses valeurs dans l'ensemble
$$G = \{\sum_k \frac{8e_k}{9^{k+1}}, e_k \in S\},$$
où S est l'ensemble des suites à valeurs dans $\{0,1\}\}$ qui ne prennent la valeur 1 qu'un nombre fini de fois. Les seules limites possibles sont dans l'adhérence $\overline{G} = G \cup \{1\}$. De plus, la connaissance de M_n détermine Y_n : si $M_n = \sum_k \frac{8e_k}{9^{k+1}}$, alors pour tout k, $Y_n(k) = e_k$

Si la limite de M_n est dans G, comme tous les points de G sont isolés, cela implique qu'à partir d'un certain rang, M_n est stationnaire. Cela implique que Y_n est aussi stationnaire et donc l'événement E_k est réalisé pour tout k.

Si la limite est 1, alors pour tout m, à partir d'un certain rang,
$$M_n > 1 - \sum_{k \geq m} \frac{8e_k}{9^{k+1}}$$
Cela implique qu'à partir d'un certain rang, $Y_n(m) = 1$ et ainsi l'événement E_m est réalisé.
4) Comme en I 5), on peut voir que pour tout n, si Y_n n'est pas la fonction constante égale à 0, alors $P(Y_{n+1} \neq Y_n) > 0$. On en déduit que $P(\lim M_n \in G \setminus \{0\}) = 0$. Donc p.s. $\lim M_n \in \{0,1\}$. Le cas $\lim M_n = 0$ correspond à E et le cas $\lim M_n = 1$ correspond à E'.

Finalement, par convergence dominée, comme en I 5),
$$P(E') = P(\lim M_n = 1) = M_0 = \mu(0) = 8/9$$
5*) Si on remplace 9/10, 1/10 par p, $1-p$ avec $1/2 < p < 1$, l'ensemble G devient
$$\{\sum_k \frac{pe_k}{1-p}\left(\frac{1-p}{p}\right)^{k+1}, \forall k, e_k \in S\}$$
On vérifie facilement que les arguments utilisés en III 3 et III 4 restent valables, sauf le fait que la connaissance de M_n détermine Y_n, ce qui reste cependant vrai si p est transcendant ou si $p > 2/3$. Par des arguments de monotonie, on peut montrer que les résultats de III 4 se généralisent.