Convergence presque sûre des martingales

(M_n) martingale $/(\mathcal{F}_n)$, M_n converge presque sûrement si $\exists\, M_\infty$ telle que $M_n \to M_\infty$ p.s.

variable aléatoire

<u>Th</u> (i) si (M_n) est une $\mathcal{F}_n$-martingale ≥ 0, alors (M_n) converge presque sûrement

(ii) si (M_n) est une $\mathcal{F}_n$-martingale bornée dans L^1 [$\sup_n \mathbb{E}(|M_n|) < \infty$]

alors (M_n) converge p.s.

- On va démontrer que si (M_n) martingale bornée dans L^2 : $\sup_n \mathbb{E}(M_n^2) < \infty$, alors (M_n) converge p.s. C'est un cas particulier de (ii)

$A_{n+1} = M_{n+1} - M_n$ accroissement de la martingale

. Les (A_n) sont orthogonales et dans L^2

$$\mathbb{E}(A_{n+1}^2) = \mathbb{E}((M_{n+1} - M_n)^2) = \mathbb{E}(M_{n+1}^2) + \mathbb{E}(M_n^2) - 2\,\mathbb{E}(M_n M_{n+1})$$

Cauchy-Schwarz

$$\leq \mathbb{E}(M_{n+1}^2 + \mathbb{E}(M_n^2) + 2\overbrace{\sqrt{(\mathbb{E} M_n^2)(\mathbb{E} M_{n+1}^2)}} < \infty$$

$m < n$

$$\mathbb{E}(A_m A_n) = \mathbb{E}((M_{m+1} - M_m)(M_{n+1} - M_n)) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}((M_{m+1} - M_m)(M_{n+1} - M_n) / \mathcal{F}_n)\right]$$

M_{m+1} et M_m mesurables $/\mathcal{F}_n$

$$= \mathbb{E}\left((M_{m+1} - M_m)\underbrace{\mathbb{E}(M_{n+1} - M_n / \mathcal{F}_n)}_{0}\right)$$

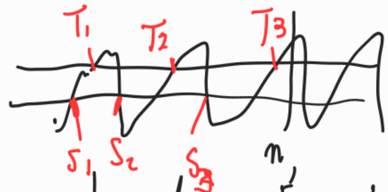
$$= 0$$

$M_n = M_0 + A_1 + A_2 \cdots + A_n$

$$\mathbb{E}(M_n^2) = \mathbb{E}(M_0^2) + \mathbb{E}(A_1^2) + \quad \mathbb{E}(A_n^2)$$

$\mathbb{E}(M_n^2) \nearrow$ et M_n bornée dans L^2 $\to$ $\mathbb{E}(M_n^2) \to L < \infty$

· Propriété générale des suites dans $\mathbb{R}$: (U_n) est convergente si et seulement si elle est bornée et pour tout $(p,q)\in\mathbb{Q}^2$, (U_n) traverse un nombre fini de fois l'intervalle $[p,q]$



$N_{pq}(n)=3$

· soit $p<q\in\mathbb{Q}$, $N_{p,q}(n)$ nombre de montées traversant $[p,q]$ avant l'instant n

$$S_1 = \inf\{m, M_m < p\} \quad , \quad T_1 = \inf\{m > S_1, M_m > q\}$$

$$S_{n+1} = \inf\{m > T_n, M_m < p\} \qquad T_{n+1} = \{\inf m > S_{n+1}, M_m > q\}$$

$N_{pq}(n) = \sup\{k, T_k \le n\}$

[idée : à chaque montée, on augmente M_n^2 d'une quantité $\geq (q-p)^2$]

Pour k entier ≥ 1 $\quad \mathbb{E}\left(\left(\underbrace{M_{T_k}}_{\geq q} - \underbrace{M_{S_k}}_{\leq p}\right)^2\right) \geq (q-p)^2$

Sur l'événement $\{N_{pq}(n)=k\}$, $\mathbb{E}(M_n^2) = \mathbb{E}(M_0^2) + \mathbb{E}(A_1^2) \dots + \mathbb{E}(A_n^2)$

On décompose l'événement $\{N_{pq}(n)=k\}$ de la manière suivante :

$$\{N_{pq}(n)=k\} = \bigcup_{s_1<t_1<s_2<t_2 \dots \leq t_k \leq n < s_{k+1}} \{S_1=s_1, T_1=t_1, S_2=t_2 \dots T_k=t_k\}$$

Sur l'événement $\{S_1=s_1, \dots \quad T_k=t_k, S_{k+1}=s_{k+1}\}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_n^2) \geq\ & \mathbb{E}(A_{T_k}^2) + \mathbb{E}(A_{T_k-1}^2) \dots + \mathbb{E}(A_{S_k}^2) \\
& + \mathbb{E}(A_{T_{k-1}}^2) \dots \qquad + \mathbb{E}(A_{S_{k-1}}^2) \\
& \vdots \\
& + \mathbb{E}(A_{T_1}^2) \dots \qquad + \mathbb{E}(A_{S_1}^2) \\
=\ & \mathbb{E}\left[(M_{T_k} - M_{S_k})^2\right] + \mathbb{E}\left[(M_{T_{k-1}} - M_{S_{k-1}})^2\right] \dots + \mathbb{E}\left[(M_{T_1} - M_{S_1})^2\right] \\
\geq\ & k(q-p)^2
\end{aligned}$$

On prend la réunion sur toutes les suites $s_1 < t_1 \cdots < t_k \leq n < s_{k+1}$

$\to$ sur l'événement $\{N_{pq}(n) \geq k\}$, $\mathbb{E}(M_n^2) \geq k(q-p)^2$

$$K > \mathbb{E}(M_n^2) \geq \mathbb{E}\left(M_n^2 \mathbb{1}_{\{N_{pq}(n) = k\}}\right) \geq k(q-p)^2 \, \mathbb{P}(N_{pq}(n) = k)$$

$N_{pq}(n)$ est une suite croissante aléatoire $\to$ converge vers $N_{pq}(\infty) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

$$K \geq \mathbb{E}\left(M_n^2 \mathbb{1}_{(N_{pq}(\infty) = k)}\right) \geq k(q-p)^2 \, \mathbb{P}(N_{pq}(\infty) = k)$$

$$\mathbb{E}(M_n^2) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(M_n^2 \mathbb{1}_{\{N_{pq}(n) = k\}}\right) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(N_{pq}(n) = k)\, k (q-p)^2$$

$$= (q-p)^2 \, \mathbb{E}\left[N_{pq}(n)\right]$$

$$\mathbb{E}(N_{pq}(n)) \leq \frac{\mathbb{E}(M_n^2)}{(q-p)^2} \leq \frac{K}{(q-p)^2}$$

$$\mathbb{E}(N_{pq}(\infty)) \leq \frac{K}{(q-p)^2}$$ $\to$ $N_{pq}(\infty)$ est une variable aléatoire

finie p.s.

Sauf sur un ensemble $E_{p,q}$ tel que $\mathbb{P}(E_{p,q}) = 0$, $N_{pq}(\infty) < \infty$

$\to$ Sauf sur $\overbrace{\bigcup_{(p,q) \in \mathbb{Q}^2} E_{pq}}^{E}$, le nombre de montées à travers tout intervalle $[p,q]$

est fini et $\mathbb{P}(E) = 0$

On démontre la même chose pour les descentes

$\to$ p.s., M_n est convergente ou tend vers $+\infty$ ou tend vers $-\infty$

$\mathbb{P}(M_n \to +\infty) = 0$ puisque $\mathbb{E}(M_n^2) \leq K < \infty$

$\to -\infty \quad = 0$

• Dans Le Gall, la démonstration est faite pour les martingales bornées dans L^1,

On borne le nombre de montées par un argument similaire

(Lemme 12.3.2 $\quad \mathbb{E}(N_{p,q}(n)) \leq \frac{1}{q-p} \mathbb{E}\left[(M_n - p)^+ - (M_0 - p)^+\right]$

$x^+ = x \wedge 0$)

Rappel : en utilisant le théorème d'arrêt pour les martingales exponentielles, on peut calculer la loi de T_0 pour la marche aléatoire simple

$$(X_n) \text{ iid} \quad , \quad \mathbb{P}(X_1 = +1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$$

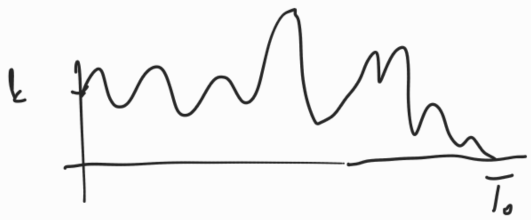
$$S_n = X_1 + \dots + X_n + k, \quad S_0 = k, \quad T_0 = \inf\{n, S_n = 0\}$$

$$M_n = \frac{e^{\lambda S_n}}{ch(\lambda)} \quad \text{martingale.}$$

Si $k > 0$, $(S_{T_0 \wedge n})$ est une martingale ≥ 0 donc $(S_{T_0 \wedge n})$ converge p.s.

si $T_0 > n$, $S_n > 0$ et $S_{n+1} = S_n \pm 1$ donc la suite $(S_{T_0 \wedge n})$ ne peut converger que vers 0

Donc $S_{T_0 \wedge n}$ converge p.s vers $0 \rightarrow T_0 < \infty$ p.s.



En particulier, $S_{T_0 \wedge n}$ converge vers 0 p.s mais pas dans L^1 puisque $\forall n$ $\mathbb{E}(S_{T_0 \wedge n}) = \mathbb{E}(S_0) = k$

• Processus de Galton Watson

(Z_n) : nombre d'individus à la génération n si les individus se reproduisent indépendamment avec la même loi μ : $\mu(k)$: probabilité d'avoir k enfants

$$m = \sum_{k \geq 0} k\, \mu(k)$$

$\left(\frac{Z_n}{m^n}\right)$ martingale

Si $m=1$, Z_n martingale ≥ 0, à valeurs dans les entiers.

Z_n converge p.s. vers Z_∞. Soit $k \geq 0$, sur l'événement $\{Z_\infty = k\}$, $\exists N$, $Z_n = k$ pour tout $n \geq N$

Mais si $\mu(1) \neq 1$ alors $\forall k \geq 0$, $\forall N$, l'événement $\{\forall n \geq N, Z_n = k\}$ a probabilité 0.

$$p_k = \mathbb{P}(Z_{n+1} = k \mid Z_n = k) < 1$$

$$\mathbb{P}(Z_n = k, Z_{n+1} = k \dots Z_{n+j} = k) \leq p_k^j \xrightarrow[j \to \infty]{} 0$$

Donc $\mathbb{P}(Z_n \text{ converge vers } k) = 0$

$\rightarrow$ p.s., Z_n converge vers 0. : parce que sinon, la population s'éteint.

remarque : si $m < 1$, le processus s'éteint p.s.

si $m > 1$, avec probabilité > 0, le processus ne s'éteint pas.

pour $m = 1$, on a CV p.s. vers 0 mais pas dans L^1 : $\forall n$, $\mathbb{E}(Z_n) = Z_0 > 0$

<u>Th</u> : (X_n) martingale $(\mathcal{F}_n)$. On a équivalence des deux assertions suivantes :

(i) (X_n) converge p.s. et dans L^1 vers une variable aléatoire X_∞

(ii) il existe une variable aléatoire L^1, qu'on appelle Z, telle que

$$X_n = \mathbb{E}(Z \mid \mathcal{F}_n)$$

Dans ce cas, $Z = X_\infty$; on dit que (X_n) est une martingale fermée.

<u>dém</u> : (i) $\Rightarrow$ (ii) si $m > n$, $X_n = \mathbb{E}(X_m \mid \mathcal{F}_n)$ $(*)$

L'application $Y \mapsto \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_n)$ est une contraction dans L^1

$$\mathbb{E}(|Y|) \geq \mathbb{E}\,|\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{F}_n)|$$

si on fait tendre $m \to \infty$ dans $(*)$ on passe à la limite

$$X_n = \mathbb{E}(X_\infty \mid \mathcal{F}_n)$$

(ii) $\Rightarrow$ (i)

(X_n) bornée dans L^1 donc (X_n) CV p.s. vers X_∞

. Supposons d'abord Z bornée : $\exists K$, $|Z| \leq K$ p.s alors $\forall n, |X_n| \leq K$ p.s.

par th de convergence dominée, $X_n \xrightarrow{L^1} X_\infty$

. cas général : soit $\varepsilon > 0$, soit M tel que $\mathbb{E}(|Z| \mathbb{1}_{|Z|>M}) < \varepsilon$ (**)

$\forall n$, $\mathbb{E}\{|X_n - \mathbb{E}(Z \mathbb{1}_{\{|Z| \leq M\}} / \mathcal{F}_n)|\} = \mathbb{E}|\mathbb{E}(Z \mathbb{1}_{\{|Z|>M\}} / \mathcal{F}_n)|$

$\leq \mathbb{E}(\mathbb{E}(|Z| \mathbb{1}_{\{|Z|>M\}} / \mathcal{F}_n)) < \varepsilon$

$\mathbb{E}(Z \mathbb{1}_{\{|Z| \leq M\}} / \mathcal{F}_n)$ martingale bornée donc bornée dans L^1 donc elle converge p.s. et dans L^1

$\rightarrow \exists n_0$, $\forall m, n \geq n_0$ $\mathbb{E}|\mathbb{E}(Z \mathbb{1}_{|Z| \leq M} / \mathcal{F}_m) - \mathbb{E}(Z \mathbb{1}_{|Z| \leq M} / \mathcal{F}_n)| < \varepsilon$

combiné avec (**) on déduit $\mathbb{E}|X_m - X_n| < 3\varepsilon$

Donc (X_n) est une suite de Cauchy dans L^1 et L^1 espace complet

Donc il existe une limite dans L^1 qui est la limite des (X_n)

Corollaire : $Z \in L^1$, $X_n = \mathbb{E}(Z / \mathcal{F}_n)$ ($\mathcal{F}_n$ filtration)

alors (X_n) est une martingale qui converge p.s et dans L^1 vers $\mathbb{E}(Z / \mathcal{F}_\infty)$

$\mathcal{F}_\infty$ tribu engendrée par les $(\mathcal{F}_n)$

dem on a démontré que X_n CV p.s et dans L^1 vers une variable aléatoire X_∞. Il faut vérifier $X_\infty = \mathbb{E}(Z / \mathcal{F}_\infty)$

Pour tout n, X_n mesurable $/ \mathcal{F}_\infty$ et $(X_n) \xrightarrow{ps} X_\infty \Rightarrow X_\infty$ est mesurable $/ \mathcal{F}_\infty$.

Si $A \in \mathcal{F}_n$, $\mathbb{E}(Z \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(X_m \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(X_\infty \mathbb{1}_A)$

lemme des classes monotones $X_\infty = \mathbb{E}(Z / \mathcal{F}_\infty)$

Exemple : $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F}_n = \sigma\{\mathbb{1}_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]}, 0 \leq k \leq 2^n - 1\}$

X v.a sur Ω, de loi μ

$M_n = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_n)$, M_n converge p.s et dans L^1 vers M_∞

$\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{F}_n)$ est la tribu borélienne

$M_\infty = X$ p.s et $\forall A \in \mathcal{F}$, $\mu(A) = \int M_\infty(x) \mathbb{1}_A(x) dx = \int_A M_\infty(x) dx$

M_∞ est la densité de Radon-Nikodym de μ