Théorème de la limite centrale, version vectorielle

$X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)}, \dots$ iid, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, dans L^2 | $X^{(1)} = (X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, \dots, X_d^{(1)})$

soit M la matrice de covariance des X_i

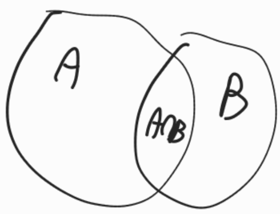
$$M_{ij} = \mathrm{cov}(X_i^{(1)}, X_j^{(1)}) \quad [\text{en particulier, } M_{ii} = \mathrm{var}\, X_i^{(1)}]$$

$$\sqrt{n}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - E(X_1)\right) \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}(0, M)$$

Espérance conditionnelle

rappel : si A, B sont deux événements d'un espace de proba $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

si $P(B > 0)$, alors $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$



on peut définir $P(A|B)$ pour tout $A \in \mathcal{F}$

on pose $P_B(A) = P(A|B)$

On vérifie que P_B est une loi de proba

- $P_B(\emptyset) = 0$
- $P_B(A^c) = \dfrac{P(A^c \cap B)}{P(B)} = 1 - \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - P_B(A)$
- si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des événements deux à deux disjoints

$$P_B\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \frac{P((\bigcup A_n) \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\bigcup \underbrace{(A_n \cap B)}_{\text{disjoints deux à deux}})}{P(B)} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{P(A_n \cap B)}{P(B)}$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{N}} P_B(A_n)$$

si X est une variable aléatoire, on peut définir X_B

$$\mathbb{P}(X_B \in A) = \mathbb{P}_B(X \in A)$$

X a une loi de probabilité. X_B a une loi de probabilité qu'on appelle loi conditionnelle de X sachant B

Si X est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $X \in L^1$ et à valeurs dans un sous ensemble dénombrable E de $\mathbb{R}$ (par exemple $\mathbb{Z}$, ou $\mathbb{Q}$)

$$\left(\mathbb{P}(X_B = a) = \mathbb{P}_B(X=a) = \frac{\mathbb{P}(\{X=a\} \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \right)$$

alors X_B est aussi dans L^1 ;

$$\sum_{a \in E} \mathbb{P}(X=a)|a| < \infty$$

$$\mathbb{E}(X_B) = \sum_{a \in E} \frac{\mathbb{P}(\{X=a\} \cap B)}{\mathbb{P}(B)} |a| \leq \sum_{a \in E} \frac{\mathbb{P}(X=a)}{\mathbb{P}(B)} |a| = \frac{E(X)}{P(B)} < \infty$$

on définit l'espérance conditionnelle de X sachant B : $\mathbb{E}(X_B)$

on la note $\mathbb{E}(X|B)$

- Espérance conditionnelle sachant une variable aléatoire

X, Y à valeurs dans un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$, dénombrable, $X \in L^1$

$$\mathbb{E}(X|Y) = \sum_{a \in E'} \mathbb{1}_{(Y=a)} \mathbb{E}(X|\{Y=a\})$$: variable aléatoire mesurable / $\underbrace{\sigma(Y)}_{\text{tribu engendrée par } Y}$

$$E' = \{a \in E, \mathbb{P}(Y=a) > 0\} \subset E$$

<u>exemple</u> : on joue à pile ou face 4 fois.

X : nombre de "pile"

$Y = \mathbb{1}_{\{\text{pile au 1er lancer}\}}$

$\mathbb{E}(X|Y) = ?$

$Y = Y_1$

$Y_k = \mathbb{1}_{\{\text{pile au } k^{\text{ième}} \text{ lancer}\}}$

$X = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4$

$$\mathbb{E}(X|\{Y=0\}) = \mathbb{E}(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 \mid \{Y_1 = 0\})$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{4} \mathbb{P}(\{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 = k\} \cap \{Y_1 = 0\})\, k}{\mathbb{P}(Y=0)}$$

$$= 2 \sum_{k=0}^{3} \mathbb{P}(\{Y_1+Y_2+Y_3+Y_4 = k\} \cap \{Y_1=0\}) k$$

$$= 2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \mathbb{P}(Y_2+Y_3+Y_4=1, Y_1=0).1 + \mathbb{P}(Y_2+Y_3+Y_4=2, Y_1=0).2 + \mathbb{P}(Y_2+Y_3+Y_4=3, Y_1=0).3 \right]$$

$$= 2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^4 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^4 + 2.2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^4\right]$$

- Espérance conditionnelle comme projection dans un espace de Hilbert

H: Espace de Hilbert : espace vectoriel normé, complet, dont la norme N est donnée par un produit scalaire ϕ

ϕ : forme bilinéaire définie positive, symétrique

$\phi : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad \phi(x,y) = \phi(y,x)$

$$\begin{cases} \phi(\lambda x + \lambda' x', y) = \lambda \phi(x,y) + \lambda' \phi(x',y) \\ \phi(x, \lambda y + \lambda' y') = \lambda \phi(x,y) + \lambda' \phi(x,y') \end{cases}$$

$\phi(x,x) \geq 0$, $\quad \phi(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$N(x) = \sqrt{\phi(x,x)}$

exple : $H = \{\text{variables aléatoires de moyenne nulle dans } L^2\}/\sim$

$\phi(X,Y) = \mathbb{E}(XY)$ $\qquad \phi$ symétrique bilinéaire, positive

$\phi(X,X) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}(X^2=0) \Leftrightarrow X = 0$ p.s.

$X \sim Y$ si $X = Y$ p.s. $\rightarrow$ relation d'équivalence

[Il faut vérifier que ϕ bien définie par rapport à $\sim$;

$\phi(X,Y) = \phi(X',Y)$ si $X \sim X'$ $\iff$ $\phi(X-X',Y)=0$ si $X \sim X'$

$\phi(X,Y) = \phi(X,Y')$ si $Y \sim Y'$]

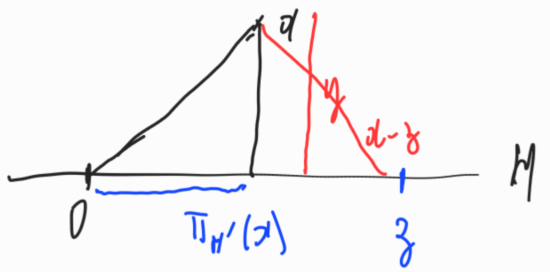
. Si $Y \in H$, l'ensemble des variables aléatoires mesurables $/\sigma(Y)$ est un sous espace vectoriel de H

X, X' sont mesurables $/\sigma(Y)$, alors $\lambda X + \lambda' X'$ est mesurable $/\sigma(Y)$

. H' sous-espace vectoriel de H, on peut définir la projection orthogonale $\pi_{H'}$:

$H \to H'$, $x = \pi_{H'}(x) + y$ où y est orthogonal à H'

$(\forall v \in H', \phi(v,y)=0)$



$\pi_{H'}(x)$ minimise la fonction

$z \in H' \mapsto \|x - z\|^2$

__Prop__ : si X, Y variables aléatoires $L^2(\mathbb{R})$ à valeurs dans un sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{R}$, de moyenne nulle. alors $\mathbb{E}(X|Y)$ est bien définie par la définition précédente et $\mathbb{E}(X|Y)$ est la projection orthogonale de X sur le sous espace des variables aléatoires mesurables $/\sigma(Y)$

__lemme__ : si $X \in L^2$, X à valeurs dans un sous-ensemble dénombrable E de $\mathbb{R}$

$m = \mathbb{E}(X)$, alors m minimise $a \overset{f}{\mapsto} \mathbb{E}((X-a)^2)$

__dém__ : $f(a) = \sum_{i \in E} \mathbb{P}(X=i)(a-i)^2 = \sum_{i \in E} \mathbb{P}(X=i)(a^2 - 2ia + i^2)$

$= a^2 - 2a\,\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X^2)$

$f'(x) = 2(x - \mathbb{E}(X))$ $\qquad f'(x) = 0 \iff x = \mathbb{E}(X)$

$f(x) \to \infty$
$|x| \to \infty$ $\to$ l'extremum en $x = \mathbb{E}(X)$ est un minimum

[remarque dans $\mathbb{R}^d$, $X \in L^2(\mathbb{R}^d)$ à valeurs dans un ~~cas~~ ensemble dénombrable, alors $m = \mathbb{E}(X)$ minimise $x \longmapsto \mathbb{E}(\|X - x\|^2)$]

Pour démontrer la proposition, il suffit de prouver que $\mathbb{E}(X|Y)$ minimise $Z \longmapsto \mathbb{E}(|X - Z|^2)$ sur les variables aléatoires $Z \in L^2$ qui sont $\sigma(Y)$-mesurables.

soit $a \in E' = \{x \in E, \mathbb{P}(Y = x) > 0\}$

conditionnellement à $\{Y = a\}$ on veut minimiser $\mathbb{E}((X-x)^2 / Y = a)$

la fonction $x \mapsto \mathbb{E}((X-x)^2 | Y = a) = \mathbb{E}_{\{Y=a\}}((X-x)^2) = \mathbb{E}[(X_{\{Y=a\}} - x)^2]$

est minimisée, d'après le lemme, par la moyenne de la variable aléatoire $X_{\{Y=a\}}$.

Cette moyenne est $\mathbb{E}(X_{\{Y=a\}}) = \sum_{k \in E'} \frac{\mathbb{P}(X = k, Y = a)\, k}{\mathbb{P}(Y = a)}$

[rappel : les variables aléatoires mesurable $/\sigma(Y)$ sont les variables aléatoires de la forme $\varphi(Y)$ avec φ mesurable]

On cherche à trouver φ qui minimise $\mathbb{E}(X - \varphi(Y))^2$

$$= \sum_{a \in E'} \mathbb{1}_{\{Y=a\}} (X - \varphi(a))^2$$

$$= \sum_{a \in E'} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{Y=a\}} (X - \varphi(a))^2)$$

on veut minimiser $\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{Y=a\}}\left(X-\varphi(a)\right)^2\right)$ pour tout $a \in E'$

$\rightarrow$ φ doit égaler $E_{\{Y=a\}}(X)$ sur l'événement $\{Y=a\}$

$$\varphi(a) = \mathbb{E}_{\{Y=a\}}(X) \qquad \text{pour tout } a \in E'$$

$$\varphi(Y) = \mathbb{E}(X/Y) \longrightarrow \mathbb{E}(X|Y) \text{ est la projection orthogonale}$$

de X sur le sous ensemble des variables aléatoires L^2 qui sont mesurables $/\sigma(Y)$

<u>remarque</u> : si X, Y sont dans L^2, à valeurs dans E' dénombrable $\subset \mathbb{R}$, mais $\mathbb{E}(X) \neq 0$, $\mathbb{E}(Y) \neq 0$

$$\tilde{X} = X - \mathbb{E}(X)$$
$$\tilde{Y} = Y - \mathbb{E}(Y)$$

$$\mathbb{E}(\tilde{X} / \tilde{Y}) = \Pi_{\sigma(\tilde{Y})}(\tilde{X})$$

$$\rightarrow \mathbb{E}(X | \tilde{Y}) = \mathbb{E}(\tilde{X} + \mathbb{E}(X) | \tilde{Y})$$

on voit facilement que $\mathbb{E}(\cdot / \tilde{Y})$ est linéaire

$$\mathbb{E}(X/\tilde{Y}) = \mathbb{E}(\tilde{X} / \tilde{Y}) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(X) / \tilde{Y})$$
$$= \Pi_{\sigma(\tilde{Y})}(\tilde{X}) + \mathbb{E}(X)$$

$$\sigma(Y) = \sigma(\tilde{Y})$$

$Z \in \sigma(Y) \Leftrightarrow Z = \varphi(Y)$, φ mesurable

$Z = \varphi(\tilde{Y} + \mathbb{E}(Y))$ et $\hat{\varphi} : a \longmapsto \varphi(a + \mathbb{E}(Y))$ est mesurable

$= \hat{\varphi}(\tilde{Y})$

géométrie en dim finie

espaces vectoriels $\hookrightarrow$ variables aléatoire de moyenne nulle

espaces affines $\hookrightarrow$ variable aléatoires générales

---

<u>Prop</u> $X, Y \in \mathcal{L}^2$, à valeurs dans E' dénombrable $\in \mathbb{R}$

(1) $\mathbb{E}(|\mathbb{E}(X|Y)|) \leq \mathbb{E}(|X|)$

(2) si Z variable aléatoire mesurable$/\sigma(Y)$, $\mathbb{E}(ZX) = \mathbb{E}(Z\,\mathbb{E}(X|Y))$

<u>dém</u> (2) $\mathbb{E}(ZX) = \Phi(Z, X)$ [on note V_Y le sous espace vectoriel des variables aléatoires $\mathcal{L}^2$ mesurables $/\sigma(Y)$]

on veut démontrer $\Phi(Z, X) = \Phi(Z, \mathbb{E}(X|Y))$

$Z \in V_Y$

$$X = \underbrace{\mathbb{E}(X|Y)}_{\in V_Y} + \underbrace{(X - \mathbb{E}(X|Y))}_{V_Y^\perp}$$

(1) $$\mathbb{E}|\mathbb{E}(X|Y)| = \sum_{a \in E'} \mathbb{P}(Y=a) \frac{|\mathbb{E}(X\,\mathbb{1}_{(Y=a)})|}{\mathbb{P}(Y=a)} \leq \sum_{a \in E'} \mathbb{E}(|X|\,\mathbb{1}_{(Y=a)}) \leq \mathbb{E}(|X|)$$