Chaînes de Markov

rappel processus : fonction aléatoire : $\mathbb{N} \to E$ discret ou continu
ou $-\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ → discret
$\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^d$: continu.

On va traiter le cas des chaînes de Markov $\mathbb{N} \to E$ dénombrable

On se déplace au hasard sur l'ensemble E

Cas où E est fini → on se ramène au cas où $E = \{1, 2 \dots k\}$

. Chaîne de Markov sur E associée à une matrice stochastique Q :

matrice stochastique Q : matrice $k \times k$, $\begin{cases} \forall i, \sum_j Q(i,j) = 1 \\ \forall i,j, \ Q(i,j) \geq 0 \end{cases}$

$Q(i,j)$: probabilité d'aller en j quand on part de i

X fonction aléatoire : $\mathbb{N} \to E$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots X_n = i_n = i)$$
$$= Q(i,j)$$

$\forall \mu_0$ mesure de probabilité sur $\{1, 2 \dots k\}$, si on pose $\mathbb{P}(X_0 = i) = \mu_0(i)$,

alors $\forall n \geq 1$

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots X_n = i_n) = Q(i_0, i_1)\, Q(i_1, i_2) \dots Q(i_{n-1}, i_n)$$

remarque : fonction aléatoire $\mathbb{N} \to E \Leftrightarrow$ mesure de probabilité sur les fonctions $\mathbb{N} \to E$. Cette mesure de probabilités est caractérisée par ses marginales de dimension finie, c'est-à-dire sa valeur sur les cylindres. si $S = \{\text{fonctions } \mathbb{N} \to E\}$

cylindre de S associé à $A \subset \mathbb{N}$

$A = \{i_1, i_2 \dots\}$ et $B \subset E^A$

cylindre : ensemble des suites de S telle que la bonne suite le long des éléments de A sont dans B

<u>exemple</u>

$Q(A,B) + (A,C) = 1$

$Q(B,A) + Q(B,D) = 1$

$Q(C,E) + Q(C,B) = 1$

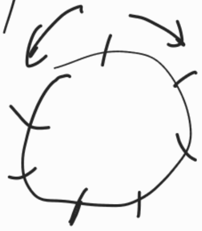
$Q(D,E) = 1$

$Q(E,D) + Q(E,A) = 1$

<u>contre exemple</u> : $E = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ $\quad (X_n)$ définie par $X_0 = 0$

$(Y_1 \dots Y_n \dots)$ iid $\mathbb{P}(Y_1 = +1) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(Y_1 = -1) = 2/3$

(avec proba 1/2 $Y_1 = 1$, $Y_1 = -1$) $X_{n+1} = Y_{n+1}(X_n - X_{n-1})$



avec proba 1/3, on tourne dans le même sens

2/3, on change de sens

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = X_n + 1 \mid X_0 \dots X_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = X_n + 1, X_n - X_{n-1} = +1 \mid X_0 \dots X_n)$$
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = X_n + 1, X_n - X_{n-1} = -1 \mid X_0 \dots X_n)$$

$$= \mathbb{P}(Y_{n+1} = +1, X_n - X_{n-1} = +1 \mid X_0 \dots X_n)$$
$$+ \mathbb{P}(Y_{n+1} = -1, X_n - X_{n-1} = -1 \mid X_0 \dots X_n)$$

les Y_n sont indep et $(X_0, \dots X_n)$ sont engendrées par $(Y_1 \dots Y_n)$

$$= \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_n - X_{n-1} = +1) + \frac{2}{3}\mathbb{P}(X_n - X_{n-1} = -1)$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = X_n + 1 \mid X_n) \neq \mathbb{P}(X_{n+1} = X_n + 1 \mid X_0 \dots X_n)$$

dépend de la tribu engendrée par X_n

$\hookrightarrow$ dépend de la tribu engendrée par X_n, X_{n-1}

$$\mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i) = Q^n(i,j)$$

. vrai si $n = 1$

. si vrai pour n, $\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_0 = i) = \sum_{l=1}^{k} \mathbb{P}(X_{n+1} = j, X_n = l \mid X_0 = i)$

$$= \sum_{l=1}^{k} Q(l,k)\,\mathbb{P}(X_n = l \mid X_0 = j)$$

$$= \sum_{l=1}^{k} Q(l,k)\,Q^n(j,l) = Q^{n+1}(j,k)$$

Cas où E dénombrable

déf : si E dénombrable, une matrice stochastique est une famille Q indexée par $E \times E$, à valeurs dans $[0,1]$, telle que $\forall x \in E$,

$$\sum_{y \in E} Q(x,y) = 1$$

déf : $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov associée à la matrice stochastique Q si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = z \mid X_n = y) = Q(x,y)$

et $\forall (x_0, x_1, \dots x_n) \in E^{n+1}$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = z \mid X_0 = x_0, X_1 = x_1 \dots X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = z \mid X_n = x_n)$$
$$= Q(x_n, z)$$

exples : . $X_1, X_2 \dots X_n$ iid à valeurs dans $\mathbb{Z}$

marche aléatoire $S_n = X_1 + X_2 \dots + X_n$

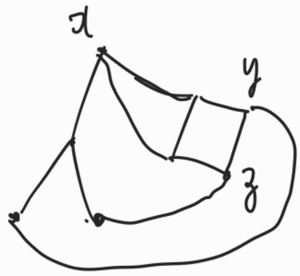
$$\mathbb{P}(S_{n+1} = y \mid S_0 = 0, S_1 = x_1 \dots S_n = x_n) =$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y - x_n, X_n = x_n \mid S_0 = 0, S_1 = x_1 \dots S_n = x_n)$$

$$= \mathbb{P}(X_{n+1} = y - x_n, X_n = x_n \mid X_n = x_n)$$

$$= \mathbb{P}(S_{n+1} = y \mid X_n = x_n)$$

Marche aléatoire sur un graphe : (V, E)
dénombrable



$Q(x,y) = 0$ s'il n'y a pas d'arête (x,y)

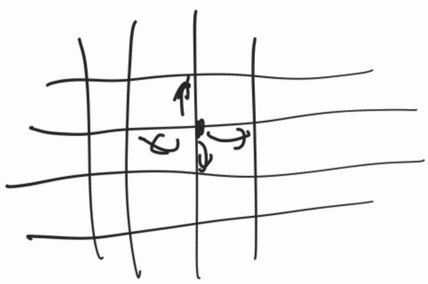
$Q(x,y) = \frac{1}{\deg(x)}$ s'il y a une arête (x,y)

deg de x = nombre d'arêtes partant de x

$$Q(z,y) = \frac{1}{3}$$

Si on prend le graphe $\mathbb{Z}^d$, la marche aléatoire sur le graphe correspond à la marche aléatoire avec $\mathbb{P}(X_1 = (1,0,0)) = \mathbb{P}(X_1 = (-1,0,0\ldots$
$= \mathbb{P}(X_1 = (0,1,0\ldots)) = \mathbb{P}(X_1 = (0,-1,0\ldots))$
$\ldots \frac{1}{2d}$

$d = 2$



<u>processus de Galton Watson</u> : (Z_n), $Z_0 = 1$

$$Z_{n+1} = X_1^{(n+1)} + X_2^{(n+1)} \ldots + X_{Z_n}^{(n+1)}$$

où $X_i^{(k)}$ est le nombre d'enfants du i-ième individu à la génération k.

$(X_i^{(k)}, i, k \in \mathbb{N})$ est une famille iid $\rightarrow$ (Z_n) est une chaîne de Markov

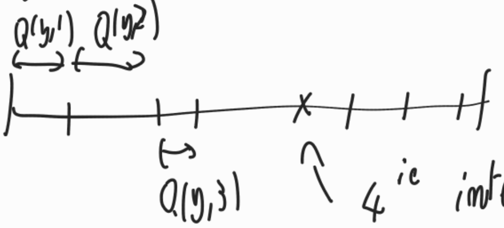
---

<u>Prop</u> : E dénombrable et Q matrice stochastique sur E. Alors il existe un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ tel que $\forall x \in E$, on peut définir $(X_n^{(x)})_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de matrice Q avec $X_0 = x$

<u>dém</u> : on se ramène à $E = \mathbb{N}$. On utilise la propriété : il existe un espace de proba sur lequel on a des variables aléatoires iid (Y_n) uniformes sur $[0,1]$

Par récurrence sur n, conditionnellement à $X_n = y$ on dit que $X_{n+1} = z$

si $$\sum_{z'<z} Q(y,z') \leq Y_{n+1} \leq \sum_{z'\leq z} Q(y,z')$$



4^{ie} intervalle $\rightarrow$ $Y_{n+1} = 4$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = z) = \sum_{z'\leq z} Q(y,z') - \sum_{z'<z} Q(y,z') = Q(y,z)$$

les (Y_n) sont indépendants,

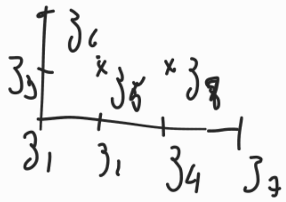
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = z \mid X_0 = x_0, X_1 = x_1, X_2 = x_2 \dots X_n = x_n)$$
$$= \mathbb{P}(X_{n+1} = z \mid X_n = x_n)$$

Pour construire la suite (Y_n), on prend Z uniforme sur $[0,1]$

$$Z = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z_i}{2^i} \qquad z_i \in \{0,1\}$$

à partir de la suite
$(z_1, z_2, z_3, z_4 \dots)$

on peut construire une infinité de suites, qui permettent de définir $(Y_1, Y_2 \dots)$



$$Y_1 = \frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{4} + \frac{z_4}{8} \cdots$$
$$Y_2 = \frac{z_3}{2} + \frac{z_5}{4} \cdots$$

<u>Th</u> : (i) E dénombrable, Q matrice stochastique sur E.
Alors, $\forall x \in E$, il existe une unique mesure de probabilité $\mathbb{P}_x$ à valeurs dans $E^{\mathbb{N}}$ vérifiant : sous $\mathbb{P}_x$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de matrice Q et $\mathbb{P}(X_0 = x) = 1$
(ii) Si μ est une mesure de probabilité sur E, alors il existe une unique mesure de probabilité $\mathbb{P}_\mu$ sur $E^{\mathbb{N}}$ vérifiant : $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de matrice Q sous $\mathbb{P}_\mu$ et $\mathbb{P}_\mu(X_0 = x) = \mu(x)$

<u>dém</u> : (i) existence : proposition
unicité : la loi de $\mathbb{P}_x$ est déterminée par les cylindres de la forme $\{X_0 = a, X_1 = x_1, \ldots X_n = x_n\}$
[les cylindres engendrent la tribu par le lemme des classes monotones]

(ii) E dénombrable, μ est donnée par $(\mu(x), x \in E)$
$\sum_{x\in E} \mu(x) = 1$ et $\forall x$ $\mu(x) \in [0,1]$
$$\mathbb{P}_\mu = \sum_{x\in E} \mu(x)\, \mathbb{P}_x$$

<u>Propriétés de Markov</u>

opérateur de translation : $k \in \mathbb{N}$, $\theta_k : E^{\mathbb{N}} \longrightarrow E^{\mathbb{N}}$
$$(w_0, w_1, w_2 \cdots) \longmapsto (w_k, w_{k+1}, w_{k+2} \cdots)$$

<u>Théorème</u> : propriété de Markov simple
F, G fonctions mesurables positives sur $E^{\mathbb{N}}$

On suppose F mesurable par rapport à $\mathcal{F}_n$, tribu engendrée par

$$(\omega_0 \dots \omega_n, \omega_{n+1} \dots) \longmapsto (\omega_0, \omega_1, \dots \omega_n)$$
$$E^{\mathbb{N}} \longmapsto E^{n+1}$$

Alors $\forall x \in E$, $\mathbb{E}_x (F\, G \circ \theta_n) = \mathbb{E}_x [F\, \mathbb{E}_{X_n}(G)]$

$$\mathbb{E}_x (G \circ \theta_n \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}_{X_n}(G)$$

dém : on peut prendre $F = \mathbb{1}_{(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots X_n = x_n)}$

si G est de la forme $G = \mathbb{1}_{(X_0 = y_0, X_1 = y_1, \dots X_p = y_p)}$ $(*)$

alors $\forall y \in E$, $\mathbb{E}_y(G) = \mathbb{1}_{(X_0 = y)} Q(y_0, y_1) Q(y_1, y_2) \dots Q(y_{p-1}, y_p)$

$$\mathbb{E}_x (F . G \circ \theta_n) = \mathbb{P}_x (X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots X_n = x_n, X_n = y_0, X_{n+1} = y_1, \dots, X_{n+p} = y_p)$$
$$\mathbb{1}_{(x_0 = x)} Q(x_0, x_1) \dots Q(x_{n-1}, x_n) \mathbb{1}_{(x_n = y_0)} Q(y_0, y_1) \dots Q(y_{p-1}, y_p)$$

On a bien la formule du théorème pour G de la forme $(*)$

On utilise le fait que les G de la forme $(*)$ engendrent les fonctions mesurables positives

[informellement : la chaîne de Markov partie de x et regardée après l'instant n a la même loi que la chaîne de Markov partie d'un point aléatoire de loi $\mu_{n,x}$ où $\mu_{n,x}(y) = \mathbb{P}_x(X_n = y)$]

Propriété de Markov forte : on remplace n, temps déterministe, par un temps d'arrêt.

$$F\, G \circ \theta_n (x_0, x_1, x_2 \dots) = F(x_0, x_1, \dots) G \circ \theta_n (x_0, x_1, \dots)$$
$$= F(x_0, x_1, \dots) G(x_n, x_{n+1}, \dots)$$

$$\mathbb{E}_x (F\, \mathbb{E}_{X_n}(G))$$
$$\mathbb{E}_{X_n}(G) = \sum_{y \in E} \mathbb{E}_y(G)\, \mu_{n,x}(y)$$

<u>Th</u> : T temps d'arrêt. F, G fonctions mesurables ≥ 0

On suppose que F est mesurable / $\mathcal{F}_T$. Alors $\forall x \in E$

$$\mathbb{E}_x \left(\mathbb{1}_{\{T<\infty\}} F \cdot G \circ \theta_T \right) = \mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{\{T<\infty\}} F \, \mathbb{E}_{X_T}(G) \right)$$

$$\mathbb{E}_x \left(\mathbb{1}_{\{T<\infty\}} G \circ \theta_T \mid \mathcal{F}_T \right) = \mathbb{1}_{\{T<\infty\}} \mathbb{E}_{X_T}(G)$$

<u>dém</u> soit $n \in \mathbb{N}$. On utilise la propriété de Markov simple sur l'événement $\{T=n\}$

$$\mathbb{E}_x \left(\mathbb{1}_{\{T=n\}} F \cdot G \circ \theta_T \right) = \mathbb{E}_x \left(\mathbb{1}_{(T=n)} F \cdot G \circ \theta_n \right)$$

$$= \mathbb{E}_x \left(\mathbb{1}_{(T=n)} F \, \mathbb{E}_{X_n}(G) \right)$$

On fait la somme sur n