

Summary

The set of vectorial equations are transformed into scalar ones to prepare the numerical computation. Vector fields are decomposed into poloidal and toroidal parts (§2.1). The corresponding scalar equations are discretized in the radial direction using a classical Finite Difference scheme on a nonuniform grid, stretched in the vicinity of the boundaries following geometric progressions (§2.2). On each of the concentric spheres, variables are expanded on a Spherical Harmonic base. All linear relations, including the Coriolis term (following Roberts 1968), are explicitly expressed on this functional basis (§2.3). The quadratic non-linearity in Navier-Stokes equation, as well as heat advection, the Lorentz force and the induction term are computed in the physical space on Gauss collocation points, and are re-integrated in the spectral space. The formulas needed to compute the curl of a non-solenoidal vector field developed on a poloidal, toroidal, spheroidal basis are derived using generalized spherical harmonic functions (§2.4). Time integration is performed using a classical semi-implicit scheme, Crank-Nicholson, for diffusion, and Adams-Bashford for other terms (§2.5). This approach is not original. It departs from the classical polynomial expansion in radius by the use of Finite Differences (also recently used by Kuang et al. 1997), and from the Galerkin method for non-linear terms by the use of a collocation approach (as in Tilgner et al. 1997, and Kuang et al. 1997).

Chapitre 2

Approximation numérique



Nous présentons dans cette section les méthodes utilisées pour approcher numériquement les solutions des équations introduites au chapitre précédent. Elles sont classiques, et ont déjà été utilisées pour ces équations. Le schéma radial aux différences finies diffère de l'expansion spectrale généralement introduite, mais a été récemment utilisé par Kuang et Bloxham (1997). Le calcul des non-linéarités par collocation dans l'espace physique diffère des intégrales de couplage de la méthode de Galerkin généralement utilisées, mais cette méthode est également utilisée par Glatzmaier et Roberts 1995, Tilgner et Busse 1997 et Kuang et Bloxham 1997.

Les équations vectorielles sont d'abord projetées sur une base de deux potentiels scalaires. On élimine à cette occasion le gradient de pression du système, et l'on n'a plus à se soucier de garantir le caractère solénoïdal de nos champs. On discrétise alors la coquille sous forme de sphères concentriques, reliées par un schéma aux différences. Enfin nous décomposons, sur chaque sphère, les champs scalaires sur une base de fonctions harmoniques. Notons que nous écrivons cette décomposition, non seulement pour la diffusion, mais également pour l'accélération de Coriolis, afin de la calculer avec précision. Il reste les termes non-linéaires, qui seront calculés dans l'espace physique, via une méthode de collocation (Canuto et al. 1988, Gottlieb et al. 1977).

2.1 Décomposition Poloïdale-Toroïdale

2.1.1 Définition et propriétés

Tout champ de vecteur solénoïdal¹ peut s'écrire sous la forme

$$(2.1) \quad \vec{V} = \underbrace{\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge (\vec{r} V_p)}_{\text{composante poloïdale}} + \underbrace{\vec{\nabla} \wedge (\vec{r} V_t)}_{\text{composante toroïdale}}.$$

Cette décomposition est appelée “décomposition de Mie”, ou “décomposition Poloïdale-Toroïdale”. Elle nous intéresse particulièrement, car la vitesse et l'induction magnétique sont toutes deux solénoïdales.²

Preuve :

Il est immédiat que tout vecteur s'écrivant sous cette forme est bien solénoïdal, en effet :

$$(2.2) \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{V}) = 0, \quad \forall \vec{V}.$$

De plus, on vérifie facilement que tout vecteur de \mathbb{R}^3 peut s'écrire

$$(2.3) \quad \vec{V} = \alpha \vec{r} + \vec{\nabla} \wedge \beta \vec{r} + \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \gamma \vec{r},$$

où α, β, γ sont fonctions de r, θ, ϕ .

Si le vecteur \vec{V} est solénoïdal, cela implique

$$(2.4) \quad \vec{\nabla} \cdot (\alpha \vec{r}) = 0,$$

$$(2.5) \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \alpha r) = 0.$$

D'où

$$(2.6) \quad \alpha = \frac{\hat{\alpha}}{r^3},$$

où $\hat{\alpha}$ n'est plus fonction que de θ, ϕ , et peut être décomposé comme

$$(2.7) \quad \hat{\alpha}(\theta, \phi) = \hat{\alpha}_1 + L_2(\hat{\alpha}_2(\theta, \phi)),$$

où L_2 est le laplacien Beltrami, c'est-à-dire le laplacien réduit aux composantes horizontales (ou angulaires), défini par

$$(2.8) \quad \begin{aligned} L_2 &= \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} - r^2 \Delta \\ &= -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \end{aligned}$$

1. i.e. à divergence nulle

2. Lorsque l'on décompose le vecteur vitesse de cette façon, u_t est un pseudo-scalaire, et u_p un scalaire. Lorsque l'on décompose le pseudo-vecteur induction magnétique, en revanche, ce sera B_p qui sera le pseudo-scalaire, et B_t le scalaire.

D'où

$$(2.9) \quad \vec{V} \cdot \vec{r} = \frac{1}{r^2} (\hat{\alpha}_1 + L_2(\hat{\alpha}_2)) + \underbrace{(\vec{\nabla} \wedge \beta \vec{r}) \cdot \vec{r}}_{=0} + \underbrace{(\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \gamma \vec{r}) \cdot \vec{r}}_{=L_2(\gamma)}.$$

En notant $\langle \cdot \rangle_r$ la moyenne sur la sphère de rayon r

$$(2.10) \quad \langle \vec{V} \cdot \vec{r} \rangle_r = \frac{1}{r^2} \langle \hat{\alpha}_1 \rangle_r + \frac{1}{r^2} \underbrace{\langle L_2(\hat{\alpha}_2) \rangle_r}_{=0} + \underbrace{\langle L_2(\gamma) \rangle_r}_{=0}.$$

Or, comme $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$, on a par la formule de Green

$$(2.11) \quad \langle \vec{V} \cdot \vec{r} \rangle_r = 0,$$

et donc

$$(2.12) \quad \hat{\alpha}_1 = 0.$$

Le terme α peut s'écrire

$$(2.13) \quad \alpha = \frac{1}{r^3} L_2(\hat{\alpha}_2(\theta, \phi)) = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \gamma' \vec{r},$$

et peut donc être regroupé avec la composante poloïdale.

Tout champ de vecteur solénoïdal peut donc s'écrire

$$(2.14) \quad \vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \beta \vec{r} + \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \gamma \vec{r},$$

reste à étudier l'unicité de cette décomposition. On peut poser sans perdre de généralité

$$(2.15) \quad \langle \beta \rangle_r = \langle \gamma \rangle_r = 0,$$

en effet, une modification de β et γ par une fonction purement radiale ne modifierait pas \vec{V} .

Vérifions qu'avec cette hypothèse supplémentaire, la décomposition (2.1) est unique. Soit

$$(2.16) \quad \vec{\nabla} \wedge \beta_1 \vec{r} + \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \gamma_1 \vec{r} = \vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \beta_2 \vec{r} + \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \gamma_2 \vec{r},$$

par linéarité, on a

$$(2.17) \quad \vec{\nabla} \wedge (\beta_1 - \beta_2) \vec{r} + \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge (\gamma_1 - \gamma_2) \vec{r} = \vec{0}.$$

En prenant la composante radiale de cette équation, il vient

$$(2.18) \quad \underbrace{(\vec{\nabla} \wedge (\beta_1 - \beta_2) \vec{r}) \cdot \vec{r}}_{=0} + \underbrace{(\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge (\gamma_1 - \gamma_2) \vec{r}) \cdot \vec{r}}_{=L_2(\gamma_1 - \gamma_2)} = 0,$$

$$(2.19) \quad L_2(\gamma_1 - \gamma_2) = 0.$$

$\gamma_1 - \gamma_2$ est donc une fonction dépendant exclusivement de r , et comme

$$(2.20) \quad \langle \gamma_1 - \gamma_2 \rangle_r = \langle \gamma_1 \rangle_r - \langle \gamma_2 \rangle_r = 0,$$

on a

$$(2.21) \quad \gamma_1 \equiv \gamma_2 .$$

Pour la composante toroïdale, on procède de même, mais avec la composante radiale du rotationnel de \vec{V} ,

$$(2.22) \quad \underbrace{-\left(\vec{\nabla} \wedge \Delta(\gamma_1 - \gamma_2) \vec{r}\right) \cdot \vec{r}}_{=0} + \underbrace{\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge (\beta_1 - \beta_2) \vec{r}\right) \cdot \vec{r}}_{=L_2(\beta_1 - \beta_2)} = 0 ,$$

$$(2.23) \quad L_2(\beta_1 - \beta_2) = 0 ,$$

et par le même raisonnement

$$(2.24) \quad \beta_1 \equiv \beta_2 .$$

Explicitement, cette décomposition permet d'écrire

$$(2.25) \quad \vec{V} = \begin{cases} \frac{1}{r} L_2(V_p) \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_p) \right) \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_p) \right) \end{cases} + \begin{cases} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial V_t}{\partial \phi} \\ - \frac{\partial V_t}{\partial \theta} \end{cases}$$

On montre que cette décomposition a les propriétés suivantes

$$(2.26) \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = -\vec{\nabla} \wedge (\vec{r} \Delta V_p) + \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge (\vec{r} V_t) ,$$

$$(2.27) \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = -\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge (\vec{r} \Delta V_p) - \vec{\nabla} \wedge (\vec{r} \Delta V_t) ,$$

d'où

$$(2.28) \quad \Delta \vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge (\vec{r} \Delta V_p) + \vec{\nabla} \wedge (\vec{r} \Delta V_t) .$$

On montre que l'on a aussi

$$(2.29) \quad \vec{V} \cdot \vec{r} = L_2 V_p , \quad \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{V} \right) \cdot \vec{r} = L_2 V_t .$$

2.1.2 Champ de vecteur non-solénoïdal

On peut étendre cette décomposition à un champ de vecteur de divergence non nulle. Cela nous sera utile, par exemple, pour calculer le terme $\vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{B})$. Ce terme est bien évidemment de divergence nulle, en revanche $\vec{u} \wedge \vec{B}$ n'a aucune raison de l'être. Nous pouvons utiliser un formalisme proche du précédent en introduisant un troisième scalaire que nous allons appeler sphéroïdal, et noté V_s

$$(2.30) \quad \vec{V} = \begin{cases} \frac{1}{r} L_2(V_p) \\ \frac{\partial V_s}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial V_t}{\partial \phi} \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial V_s}{\partial \phi} - \frac{\partial V_t}{\partial \theta} \end{cases}$$

Si la divergence de \vec{V} est nulle nous avons une relation simple entre V_s et V_p

$$(2.31) \quad V_s = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_p),$$

qui ramène cette écriture à la décomposition précédemment introduite pour les champs à divergence nulle.

2.1.3 Application aux équations

Nous allons projeter la première et la quatrième équation du système (1.71) sur cette base. Le but de cette opération est d'écrire explicitement tous les termes linéaires sur cette base (pour en avoir une expression matricielle, et pouvoir les traiter implicitement en temps). Commençons par l'équation d'induction (1.71.4). En prenant le produit scalaire de cette équation par \vec{r} et en utilisant (2.29.1) et la commutativité de L_2 et Δ , on a

$$(2.32) \quad \frac{\partial}{\partial t} L_2 B_p = \eta \Delta L_2 B_p + \vec{r} \cdot (\vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{B})) .$$

En prenant le produit scalaire par \vec{r} de son rotationnel, et en utilisant (2.29.b), on a

$$(2.33) \quad \frac{\partial}{\partial t} L_2 B_t = \eta \Delta L_2 B_t + \vec{r} \cdot (\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{B}))) .$$

La projection de l'équation en vitesse est moins triviale, d'abord à cause du gradient de pression, que l'on souhaite faire disparaître, ensuite à cause du terme de Coriolis. Comme pour la composante toroïdale du champ magnétique, prenons le produit scalaire par \vec{r} du rotationnel de (1.71.a),

$$(2.34) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} L_2 u_t = & -\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \underline{\nabla} \vec{u}) + \nu \Delta L_2 u_t - 2\Omega \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \wedge (\vec{e}_z \wedge \vec{u}) \\ & + \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \wedge \left(\frac{1}{\mu_0 \rho_0} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B} \right) + \underbrace{\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \wedge (\alpha \Theta g \vec{r})}_{=0} \end{aligned}$$

Comme les champs \vec{u} et \vec{B} sont à divergence nulle, on a

$$(2.35) \quad \vec{u} \underline{\nabla} \vec{u} = (\vec{\nabla} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{u}),$$

$$(2.36) \quad \underline{\underline{\vec{B}\nabla\vec{B}}} = (\underline{\underline{\vec{\nabla}} \wedge \underline{\underline{\vec{B}}}) \wedge \underline{\underline{\vec{B}}} = -\underline{\underline{\vec{B}}} \wedge (\underline{\underline{\vec{\nabla}} \wedge \underline{\underline{\vec{B}}}).$$

L'équation (2.34) s'écrit

$$(2.37) \quad \frac{\partial}{\partial t} L_2 u_t = \nu \Delta L_2 u_t - 2\Omega \underbrace{\vec{r} \cdot \underline{\underline{\vec{\nabla}}} \wedge (\underline{\underline{\vec{e}_z}} \wedge \underline{\underline{\vec{u}}})}_{(*)} \\ - \vec{r} \cdot \underline{\underline{\vec{\nabla}}} \wedge (\underline{\underline{\vec{u}}} \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{\vec{u}}} - \frac{1}{\mu_0 \rho_0} \underline{\underline{\vec{B}\nabla\vec{B}}}).$$

Etudions la projection du terme de Coriolis, marqué (*)

$$(2.38) \quad \begin{aligned} \vec{r} \cdot \underline{\underline{\vec{\nabla}}} \wedge (\underline{\underline{\vec{e}_z}} \wedge \underline{\underline{\vec{u}}}) &= \vec{r} \cdot \underline{\underline{\vec{\nabla}}} \wedge \left(\underline{\underline{\vec{e}_z}} \wedge \left(\underline{\underline{\vec{\nabla}}} \wedge \underline{\underline{\vec{\nabla}}} \wedge (\vec{r} u_p) + \underline{\underline{\vec{\nabla}}} \wedge (\vec{r} u_t) \right) \right) \\ &= \vec{r} \cdot \underline{\underline{\vec{\nabla}}} \wedge \left(\underline{\underline{\vec{e}_z}} \wedge \left(\underline{\underline{\vec{\nabla}}} \wedge \underline{\underline{\vec{\nabla}}} \wedge (\vec{r} u_p) \right) \right) \\ &+ \vec{r} \cdot \underline{\underline{\vec{\nabla}}} \wedge \left(\underline{\underline{\vec{e}_z}} \wedge \left(\underline{\underline{\vec{\nabla}}} \wedge (\vec{r} u_t) \right) \right) \end{aligned}$$

Commençons par la composante toroïdale, en utilisant (B.27)³,

$$(2.39) \quad \begin{aligned} \vec{r} \cdot \underline{\underline{\vec{\nabla}}} \wedge \left(\underline{\underline{\vec{e}_z}} \wedge \left(\underline{\underline{\vec{\nabla}}} \wedge (\vec{r} u_t) \right) \right) &= \vec{r} \cdot \left(\underbrace{\underline{\underline{\vec{e}_z}} \operatorname{div}(\underline{\underline{\vec{\nabla}}} \wedge \vec{r} u_t)}_{\operatorname{div}(rot)=0} - \underbrace{(\underline{\underline{\vec{\nabla}}} \wedge \vec{r} u_t) \operatorname{div} \underline{\underline{\vec{e}_z}}}_{\operatorname{div}(\underline{\underline{\vec{e}_z}})=0} \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{((\underline{\underline{\vec{\nabla}}} \wedge \vec{r} u_t) \cdot \underline{\underline{\vec{\nabla}}}) \cdot \underline{\underline{\vec{e}_z}}}_{=0} - (\underline{\underline{\vec{e}_z}} \cdot \underline{\underline{\vec{\nabla}}}) (\underline{\underline{\vec{\nabla}}} \wedge \vec{r} u_t) \right) \end{aligned}$$

On vérifie que

$$(2.40) \quad \begin{aligned} \vec{r} \cdot \underline{\underline{\vec{\nabla}}} \wedge \left(\underline{\underline{\vec{e}_z}} \wedge \left(\underline{\underline{\vec{\nabla}}} \wedge (\vec{r} u_t) \right) \right) &= -(\underline{\underline{\vec{e}_z}} \cdot \underline{\underline{\vec{\nabla}}}) (\underline{\underline{\vec{\nabla}}} \wedge \vec{r} u_t) \cdot \vec{r} \\ &= -\frac{\partial}{\partial \phi} u_t. \end{aligned}$$

$$(2.41) \quad \text{Or } (\underline{\underline{\vec{e}_z}} \wedge \vec{r}) = r \sin \theta \underline{\underline{\vec{e}_\phi}}, \text{ et } (\underline{\underline{\vec{e}_\phi}} \cdot \underline{\underline{\vec{\nabla}}}) = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi},$$

$$(2.42) \quad \text{donc } \frac{\partial}{\partial \phi} = (\underline{\underline{\vec{e}_z}} \wedge \vec{r}) \cdot \underline{\underline{\vec{\nabla}}},$$

$$(2.43) \quad \text{et } \vec{r} \cdot \underline{\underline{\vec{\nabla}}} \wedge \left(\underline{\underline{\vec{e}_z}} \wedge \left(\underline{\underline{\vec{\nabla}}} \wedge (\vec{r} u_t) \right) \right) = -(\underline{\underline{\vec{e}_z}} \wedge \vec{r}) \cdot \underline{\underline{\vec{\nabla}}} u_t.$$

3. Voir annexe B.

Pour la partie poloïdale, on a

$$\begin{aligned}
& \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{e}_z \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge (\vec{r} u_p) \right) \right) \\
&= \left(\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} L_2 + \frac{\cos \theta}{r} L_2 - \cos \theta L_2 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \sin \theta \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \right) u_p \\
(2.44) \quad &= \left(\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(L_2 - 1 - r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \cos \theta L_2 \left(\frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial r} \right) \right) u_p \\
&= \left(r \cos \theta \Delta - \left(L_2 + r \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right) u_p
\end{aligned}$$

En ajoutant ces deux dernières expressions

$$\begin{aligned}
(2.45) \quad & \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{e}_z \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge (\vec{r} u_p) \right) \right) \\
&= \left(\vec{e}_z \cdot \vec{\nabla} - \frac{1}{2} \left(L_2 \vec{e}_z \cdot \vec{\nabla} + \vec{e}_z \cdot \vec{\nabla} L_2 \right) \right) u_p.
\end{aligned}$$

On définit alors l'opérateur Q_3 (introduit dans Roberts, 1968) comme

$$(2.46) \quad Q_3 = \vec{e}_z \cdot \vec{\nabla} - \frac{1}{2} \left(L_2 \vec{e}_z \cdot \vec{\nabla} + \vec{e}_z \cdot \vec{\nabla} L_2 \right).$$

L'équation (2.37) s'écrit donc

$$\begin{aligned}
(2.47) \quad & \frac{\partial}{\partial t} L_2 u_t = \nu \Delta L_2 u_t + 2\Omega (\vec{e}_z \wedge \vec{r}) \cdot \vec{\nabla} u_t - 2\Omega Q_3 u_p \\
& - \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{u} \underline{\nabla} \vec{u} - \frac{1}{\mu_0 \rho_0} \vec{B} \underline{\nabla} \vec{B} \right).
\end{aligned}$$

Pour dériver l'équation du scalaire poloïdal, on prend le produit scalaire par $-\vec{r}$ du double rotationnel de (1.71.4). Le passage de u_t à u_p s'effectue par l'équation (2.27), en remarquant que

$$\begin{aligned}
(2.48) \quad & \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge [\vec{e}_z \wedge \vec{u}] = \vec{\nabla} \wedge \left[-\frac{\partial u}{\partial z} \right] \\
&= -\frac{\partial}{\partial z} \vec{\nabla} \wedge \vec{u} \\
&= \vec{\nabla} \wedge \left[\vec{e}_z \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{u}) \right].
\end{aligned}$$

De plus, il faut tenir compte de la force d'Archimède, qui cette fois ne s'annule pas. On obtient

$$\begin{aligned}
(2.49) \quad & \frac{\partial}{\partial t} L_2 \Delta u_p = \nu \Delta L_2 \Delta u_p + 2\Omega (\vec{e}_z \wedge \vec{r}) \cdot \vec{\nabla} (\Delta u_p) + 2\Omega Q_3 u_t \\
& - \alpha g L_2 \Theta + \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{u} \underline{\nabla} \vec{u} - \frac{1}{\mu_0 \rho_0} \vec{B} \underline{\nabla} \vec{B} \right) \right)
\end{aligned}$$

On a donc le système d'équations scalaires (Roberts, 1968 ; Cuong et Busse, 1981)

$$(2.50) \left\{ \begin{array}{l} \left(\nu \Delta - \frac{\partial}{\partial t} \right) L_2 \Delta u_p + 2\Omega (\vec{e}_z \wedge \vec{r}) \cdot \vec{\nabla} (\Delta u_p) + 2\Omega Q_3 u_t - \alpha g L_2 \Theta \\ \qquad \qquad \qquad = -\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{u} \underline{\nabla} \vec{u} - \frac{1}{\mu_0 \rho_0} \vec{B} \underline{\nabla} \vec{B} \right) \right) , \\ \left(\nu \Delta - \frac{\partial}{\partial t} \right) L_2 u_t + 2\Omega (\vec{e}_z \wedge \vec{r}) \cdot \vec{\nabla} u_t - 2\Omega Q_3 u_p \\ \qquad \qquad \qquad = +\vec{r} \cdot \left(\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{u} \underline{\nabla} \vec{u} - \frac{1}{\mu_0 \rho_0} \vec{B} \underline{\nabla} \vec{B} \right) \right) , \\ \frac{\partial \Theta}{\partial t} = -\left(\frac{1}{r} \frac{\partial T_s}{\partial r} \right) \vec{u} \cdot \vec{r} + \kappa \Delta \Theta - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \Theta , \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta \Delta \right) L_2 B_p = \vec{r} \cdot \left(\vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{B}) \right) , \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta \Delta \right) L_2 B_t = \vec{r} \cdot \left(\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{B})) \right) . \end{array} \right.$$

On rappelle que L_2 et Q_3 sont définis par

$$(2.51) \quad \begin{aligned} L_2 &= \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} - r^2 \Delta \\ &= -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} , \end{aligned}$$

$$(2.52) \quad \begin{aligned} Q_3 &= \vec{e}_z \cdot \vec{\nabla} - \frac{1}{2} \left(L_2 \vec{e}_z \cdot \vec{\nabla} + \vec{e}_z \cdot \vec{\nabla} L_2 \right) \\ &= r \cos \theta \Delta - \left(L_2 + r \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) . \end{aligned}$$

2.1.4 Conditions aux limites pour cette décomposition

Il reste à établir les conditions aux limites cinématiques pour cette formulation. Dans le cas de déplacement nul (“no-slip”)

$$(2.53) \quad \vec{u} = \vec{0} = \begin{cases} \frac{1}{r} L_2(u_p) \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_p) \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_t}{\partial \phi} \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_p) \right) - \frac{\partial u_t}{\partial \theta} . \end{cases}$$

De $u_r = 0$ on tire $u_p = 0$, et $\frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta (2.53.b) + \frac{\partial}{\partial \phi} (2.53.c)$ donne :

$$(2.54) \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_p) \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_p) \right) = 0 ,$$

$$(2.55) \quad \sin \theta L_2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_p) \right) = 0,$$

d'où $\frac{\partial u_p}{\partial r} = 0$.

De plus $\frac{\partial}{\partial \phi}(2.53.b) - \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta(2.53.c)$ donne :

$$(2.56) \quad \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 u_t}{\partial \phi^2} + \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial u_t}{\partial \theta} = 0,$$

$$(2.57) \quad \sin \theta L_2 u_t = 0.$$

Soit

$$(2.58) \quad \boxed{\begin{array}{l} u_p = 0, \\ \frac{\partial u_p}{\partial r} = 0, \\ u_t = 0. \end{array}}$$

Dans le cas sans frottements, de contrainte horizontale nulle (“stress-free”), suivant une procédure semblable à celle suivie pour le cas rigide, nous obtenons à partir de 1.75,

$$(2.59) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_p = 0, \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r u_p) \right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial r} u_t / r = 0, \end{array} \right.$$

$$(2.60) \quad \boxed{\begin{array}{l} u_p = 0, \\ \frac{\partial^2 u_p}{\partial r^2} = 0, \\ \frac{\partial(u_t/r)}{\partial r} = 0. \end{array}}$$

On peut noter que dans les deux cas, ces conditions aux limites sont bien suffisantes pour contraindre l'opérateur bi-harmonique (du 4^e ordre) de l'équation d'évolution de u_p dans (2.50). En revanche, on ne peut pas simplifier le système en calculant directement l'évolution en temps de Δu_p , car on n'a pas de conditions aux limites sur celui-ci.

Pour le champ magnétique, à la frontière noyau-manteau et au delà ($r > r_e$),

$$(2.61) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{B} = -\vec{\nabla} \Phi, \\ \Delta \Phi = 0. \end{array} \right.$$

Le champ magnétique (et donc la composante radiale de $\vec{\nabla} \wedge \vec{B}$) sont continus à la frontière noyau-manteau. Dans le manteau

$$(2.62) \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \vec{0},$$

dans le noyau on a donc, par continuité,

$$(2.63) \quad (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{e}_r = -\frac{1}{r} L_2 B_t = 0,$$

donc

$$(2.64) \quad B_t = 0, \quad \text{en } r = r_e.$$

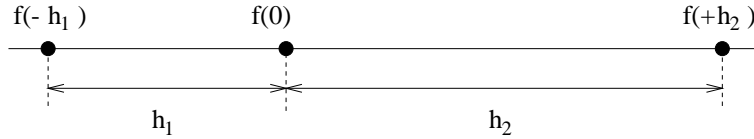
Pour le scalaire poloïdal, on a B_p et $\frac{\partial B_p}{\partial r}$ continus à l'interface et se raccordant au champ potentiel dans l'isolant. Nous verrons, une fois la décomposition en harmoniques sphériques introduite, comment le décrire.

2.2 Discrétisation Verticale

2.2.1 Schéma radial

Nous avons calculé les dérivés radiales par un schéma de différences finies. A cette approche, il est généralement préféré une méthode spectrale utilisant les polynômes de Chebyshev. Nous choisissons de discrétiser nos équations dans l'espace physique pour cette direction pour deux raisons. La première est de pouvoir facilement modifier les conditions aux limites de notre système, ce qui est beaucoup plus facile et moins coûteux dans l'espace physique. La seconde est de pouvoir à terme paralléliser notre approche.

On utilise un schéma consistant (au sens de l'erreur de troncature), aux différences finies centrées, écrit directement sur une grille irrégulière. Basé sur le développement de Taylor, ce schéma s'écrit en notation simplifiée



$$(2.65) \quad (\tilde{\delta}f)_0 = \frac{h_1}{h_1 + h_2} \left(\frac{f(h_2) - f(0)}{h_2} \right) + \frac{h_2}{h_1 + h_2} \left(\frac{f(0) - f(-h_1)}{h_1} \right),$$

$$(2.66) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0) = (\tilde{\delta}f)_0 + \tilde{\tau}_0$$

$$(2.67) \quad \tilde{\tau}_0 = -\frac{h_1 h_2}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0) + \mathcal{O}(h^3),$$

et

$$(2.68) \quad (\tilde{\delta}^2 f)_0 = \frac{\tilde{\delta}f(\frac{h_2}{2}) - \tilde{\delta}f(-\frac{h_1}{2})}{(h_1 + h_2)/2},$$

$$(\tilde{\delta}^2 f)_0 = \frac{h_2 f(-h_1) - (h_1 + h_2) f(0) + h_1 f(h_2)}{(h_1 h_2 (h_1 + h_2))/2}.$$

$$(2.69) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0) = (\tilde{\delta}^2 f)_0 + \tilde{\tau}'_0$$

$$(2.70) \quad \tilde{\tau}'_0 = \underbrace{-\frac{1}{3}(h_2 - h_1) \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0)}_{(*)} - \frac{h_1^2 - h_1 h_2 + h_2^2}{12} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0) + (h_2 - h_1) \mathcal{O}(h^3).$$

Le terme marqué d'un astérisque est spécifique aux différences sur une grille irrégulière (il s'annule pour $h_1 = h_2$). C'est de ce terme que vient toute la difficulté à définir l'ordre d'un schéma sur une grille irrégulière. Il est particulièrement clair lorsqu'on considère ce terme qu'il est préférable d'utiliser une série géométrique pour construire la grille, plutôt qu'une série arithmétique (pour une série géométrique le terme $(h_2 - h_1)$ est proportionnel à h). Dans le cas particulier d'une grille régulière ($h_1 = h_2 = h$) ces schémas dégèrent en δ et δ^2 qui correspondent aux formules classiques centrées d'ordre deux,

$$(2.71) \quad (\delta f)_0 = \frac{f(h) - f(-h)}{2h},$$

$$(2.72) \quad (\delta^2 f)_0 = \frac{f(-h) - 2f(0) + f(h)}{h^2}.$$

On a alors

$$(2.73) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0) = (\delta f)_0 + \tau_0,$$

$$(2.74) \quad \tau_0 = -\frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0) - \frac{h^4}{120} \frac{\partial^5 f}{\partial x^5}(0) + \mathcal{O}(h^6),$$

$$(2.75) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0) = (\delta^2 f)_0 + \tau'_0,$$

$$(2.76) \quad \tau'_0 = -\frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0) - \frac{h^4}{360} \frac{\partial^6 f}{\partial x^6}(0) + \mathcal{O}(h^6).$$

2.2.2 Prise en compte des Conditions aux limites

C'est dans cette dimension que l'on rencontrera tous les problèmes de conditions aux limites. On utilise une condition de symétrie sur un point pour contraindre les dérivées d'ordre un au bord.

Les conditions $u|_0 = 0$ et $\frac{\partial u}{\partial r}|_0 = 0$ permettent de calculer l'opérateur laplacien au bord du domaine sous la forme

$$(2.77) \quad \Delta u|_0 = \frac{u(-1) - 2u(0) + u(1)}{\delta^2},$$

sous la forme

$$(2.78) \quad \Delta u|_0 = \frac{2u(1)}{\delta^2}.$$

On obtient alors le même résultat qu'en utilisant un développement de Taylor au bord du domaine (voir Fletcher II, p.378, éq. 17.104).

2.3 Décomposition spectrale sur la sphère

2.3.1 Définition et propriétés

Les harmoniques sphériques sont un ensemble de fonctions complexes $Y_l^m(\theta, \phi)$ définies sur la sphère.

$$(2.79) \quad Y_l^m(\theta, \phi) = C_l^m P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad \text{pour} \quad \begin{cases} l = 0, 1, 2, \dots, +\infty \\ m = 0, 1, \dots, l \end{cases}$$

où C_l^m est une constante de normalisation, et P_l^m est le polynôme de Legendre associé de degré l et d'ordre m (définis ci-après).

Les harmoniques sphériques ainsi définies sont orthogonales deux à deux. Pour les calculs numériques, on choisit généralement la constante de normalisation C_l^m de manière à ce qu'elles soient orthonormées ("fully normalized")

$$(2.80) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} Y_l^m(\theta, \phi)^* Y_{l'm'}(\theta, \phi) \sin \theta \, d\theta \, d\phi = 4\pi \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

où $Y_l^m^*$ désigne le conjugué de Y_l^m , et où δ_{ij} est le symbole de Kronecker défini par

$$(2.81) \quad \begin{aligned} \delta_{ii} &= 1, \quad \forall i, \\ \delta_{ij} &= 0, \quad \forall i, j, \quad i \neq j. \end{aligned}$$

Cette relation d'orthonormalisation définit C_l^m comme

$$(2.82) \quad C_l^m = \sqrt{(2 - \delta_{m0})(2l + 1) \frac{(l - m)!}{(l + m)!}}$$

La fonction associée de Legendre $P_l^m(x)$ est définie pour $|x| \leq 1$ par:

$$(2.83) \quad P_l^m(x) = (-1)^m (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x), \quad \text{pour } m \geq 0,$$

où $P_l(x)$ est le polynôme de Legendre⁴ de degré l , défini par

$$(2.84) \quad \begin{cases} P_0(x) = 1, \\ P_1(x) = x, \\ (n + 1) P_{n+1}(x) = (2n + 1) x P_n(x) - n P_{n-1}(x) \quad (n > 1). \end{cases}$$

4. Pour la définition numérique des polynomes de Legendre d'ordre élevé il convient de choisir soigneusement la relation de récurrence utilisée. Certaines relations (par exemple Press et al.) sont peu précises pour les grands m , voir à ce sujet Koop et al. 1989.

Nous rappelons ci-dessous les expressions des premières harmoniques sphériques

Y_0^0	1	Y_1^1	$-\sqrt{3} \sin \theta e^{i\phi}$	Y_2^2	$\frac{\sqrt{15}}{2} \sin^2 \theta e^{2i\phi}$
Y_1^0	$\sqrt{3} \cos \theta$	Y_2^1	$-\sqrt{15} \cos \theta \sin \theta e^{i\phi}$		
Y_2^0	$\frac{\sqrt{5}}{2} (3 \cos^2 \theta - 1)$				

Les harmoniques sphériques sont les fonctions propres de l'opérateur L_2 , elles vérifient

$$(2.85) \quad L_2 Y_l^m = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_l^m}{\partial \phi^2} = l(l+1) Y_l^m,$$

ce qui est particulièrement intéressant pour exprimer le laplacien d'une fonction mise sous la forme $F(r) Y_l^m(\theta, \phi)$,

$$(2.86) \quad \Delta [F(r) Y_l^m(\theta, \phi)] = Y_l^m(\theta, \phi) \frac{1}{r^2} \left[\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} F(r) \right) - l(l+1) F(r) \right].$$

Les harmoniques sphériques forment une base de l'ensemble des fonctions continues définies sur la sphère. C'est-à-dire qu'une fonction F vérifiant :

$$F : [0, \pi] \times [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R},$$

avec

$$(2.87) \quad \begin{cases} F(\theta, -\pi) = F(\theta, \pi) & \forall \theta \in [0, \pi] \\ F(0, \phi_1) = F(0, \phi_2) & \forall (\phi_1, \phi_2) \in [-\pi, \pi]^2 \\ F(\pi, \phi_1) = F(\pi, \phi_2) & \forall (\phi_1, \phi_2) \in [-\pi, \pi]^2 \end{cases}$$

s'écrit comme limite d'une somme

$$(2.88) \quad F(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l f_l^m Y_l^m(\theta, \phi),$$

où les coefficients f_l^m sont donnés par

$$(2.89) \quad f_l^m = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} Y_l^{m*}(\theta, \phi) F(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi.$$

Les décompositions en harmoniques sphériques sont l'équivalent, dans la géométrie sphérique, des transformées de Fourier dans le cas plan.

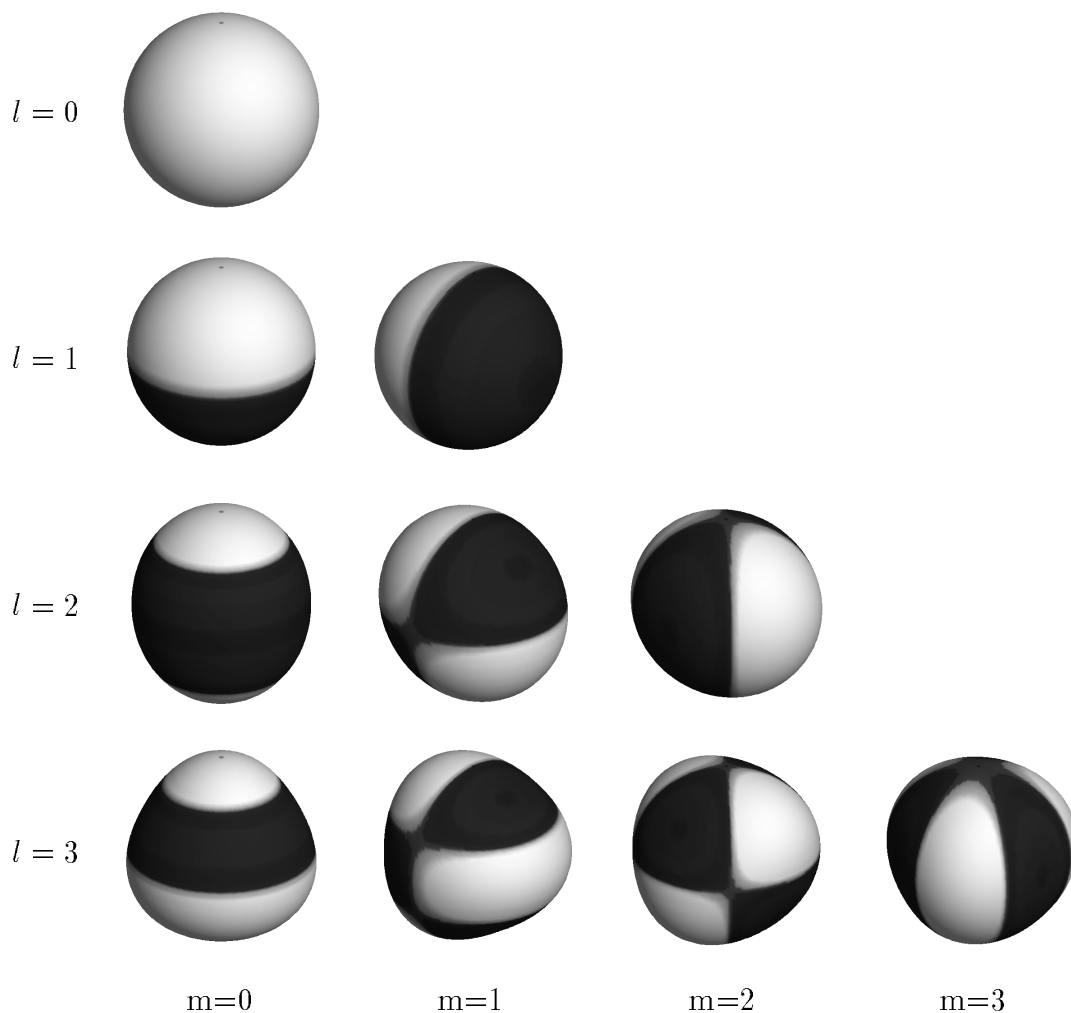


FIG. 2.1 – Harmoniques sphériques (partie réelle) jusqu'à l'ordre et au degré 3.

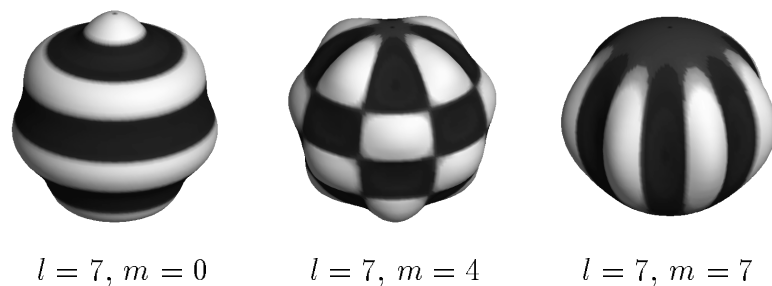


FIG. 2.2 – Exemples d'harmoniques de degrés plus élevés. Une harmonique zonale ($l=7, m=0$), un cas général ($l=7, m=4$), et une harmonique sectorielle ($l=7, m=7$).

2.3.2 Application à nos équations

Nous allons écrire explicitement les termes linéaires de nos équations sur cette base. Pour cela, nous utiliserons les relations suivantes sur les fonctions associées de Legendre. On a (Coulomb-Jobert),

$$(2.90) \quad P_{l+1}^{m+1}(x) = -(l+1+m) \sqrt{1-x^2} P_l^m(x) + x P_l^{m+1}(x),$$

$$(2.91) \quad P_{l-1}^{m+1}(x) = -(m-l) \sqrt{1-x^2} P_l^m(x) + x P_l^{m+1}(x),$$

et (Abramowitz-Stegun),

$$(2.92) \quad (x^2-1) \frac{d}{dx} P_l^m(x) = (l+m)(l-m+1) \sqrt{x^2-1} P_l^{m-1}(x) - m x P_l^m(x).$$

Et (2.90) - (2.91) donne (appliqué à $m-1$)

$$(2.93) \quad P_{l+1}^m(x) - P_{l-1}^m(x) = -\left((l+m) P_l^{m-1}(x) - (m-l-1) P_l^{m-1}(x)\right) \sqrt{1-x^2},$$

$$P_{l+1}^m(x) - P_{l-1}^m(x) = -(2l+1) \sqrt{1-x^2} P_l^{m-1}(x).$$

De même, $(m-l-1)$ (2.90) - $(l+m)$ (2.91) donne (appliqué à $m-1$)

$$(2.94) \quad (m-l-1) P_{l+1}^m(x) - (l+m) P_{l-1}^m(x) = x(-2l-1) P_l^m(x),$$

soit

$$(2.95) \quad x P_l^m(x) = \frac{l-m+1}{2l+1} P_{l+1}^m(x) + \frac{l+m}{2l+1} P_{l-1}^m(x).$$

En reportant (2.93) et (2.95) dans (2.92), il vient

$$(2.96) \quad (x^2-1) \frac{d}{dx} P_l^m = \frac{(l+m)(l-m+1)}{2l+1} (P_{l+1}^m - P_{l-1}^m) + \frac{m}{2l+1} \left((m-l-1) P_{l+1}^m - (l+m) P_{l-1}^m \right),$$

$$(x^2-1) \frac{d}{dx} P_l^m = \frac{l(l-m+1)}{2l+1} P_{l+1}^m - \frac{(l+m)(l+1)}{2l+1} P_{l-1}^m.$$

Commençons par quelques calculs préliminaires utilisant ces relations

- Calcul de : $\cos \theta Y_l^m$

Il vient directement de (2.95) avec $x = \cos \theta$

$$(2.97) \quad \cos \theta Y_l^m = \frac{\overbrace{l-m+1}^{\mathcal{A}_1(l,m)}}{2l+1} Y_{l+1}^m + \frac{\overbrace{l+m}^{\mathcal{A}_2(l,m)}}{2l+1} Y_{l-1}^m.$$

- Calcul de : $\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m$

Comme

$$\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} P_l^m(\cos \theta) = -\sin^2 \theta \frac{dP_l^m}{dx}(\cos \theta) = (\cos^2 \theta - 1) \frac{dP_l^m}{dx}(\cos \theta),$$

en utilisant (2.96) avec $x = \cos \theta$, il vient

$$(2.98) \quad \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m = \overbrace{l \mathcal{A}_1(l, m)}^{c_1(l, m)} Y_{l+1}^m - \overbrace{(l+1) \mathcal{A}_2(l, m)}^{c_2(l, m)} Y_{l-1}^m.$$

Nous pouvons en déduire l'expression des différents opérateurs linéaires intervenant dans le système d'équations 2.50.

– Calcul de : $L_2 f(r) Y_l^m$

Par construction même des Y_l^m :

$$(2.99) \quad L_2 f(r) Y_l^m = l(l+1) f(r) Y_l^m.$$

– Calcul de : $Q_3 f(r) Y_l^m$

Le calcul de $Q_3 f(r) Y_l^m$ demande l'expression préalable de $(\vec{e}_z \cdot \vec{\nabla}) f(r) Y_l^m$ (voir 2.52)

$$\begin{aligned} (\vec{e}_z \cdot \vec{\nabla}) f(r) Y_l^m &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} (f(r) Y_l^m) - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (f(r) Y_l^m) \\ &= \cos \theta \frac{df}{dr} Y_l^m - \frac{1}{r} \sin \theta f(r) \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m, \end{aligned}$$

$$(2.100) \quad (\vec{e}_z \cdot \vec{\nabla}) f(r) Y_l^m = \cos \theta \frac{df}{dr} Y_l^m - \frac{f(r)}{r} \left(\mathcal{C}_1(l, m) Y_{l+1}^m + \mathcal{C}_2(l, m) Y_{l-1}^m \right).$$

D'où

$$\begin{aligned} Q_3 f(r) Y_l^m &= (\vec{e}_z \cdot \vec{\nabla}) f(r) Y_l^m - \frac{1}{2} \left(L_2 (\vec{e}_z \cdot \vec{\nabla}) + (\vec{e}_z \cdot \vec{\nabla}) L_2 \right) f(r) Y_l^m \\ &= \frac{f(r)}{r} \left(\mathcal{C}_1(l, m) \left[-1 + \frac{(l+1)(l+2)}{2} + \frac{l(l+1)}{2} \right] Y_{l+1}^m \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{C}_2(l, m) \left[-1 + \frac{(l+1)l}{2} + \frac{l(l-1)}{2} \right] Y_{l-1}^m \right) \\ &\quad - l(l+1) \cos \theta \frac{df}{dr} Y_l^m \\ &= \frac{f(r)}{r} \left(\mathcal{C}_1(l, m) (l(l+2)) Y_{l+1}^m + \mathcal{C}_2(l, m) (l^2 - 1) Y_{l-1}^m \right) \\ &\quad - l(l+1) \cos \theta \frac{df}{dr} Y_l^m. \end{aligned}$$

Soit, en explicitant $\cos \theta Y_l^m$

$$(2.101) \quad Q_3 f(r) Y_l^m = Y_{l+1}^m \left[\frac{f(r)}{r} \frac{\overbrace{(l+2)l^2(l-m+1)}^{\kappa_{11}(l,m)}}{2l+1} + \frac{df}{dr} \frac{\overbrace{l(l+2)(m-l-1)}^{\kappa_{12}(l,m)}}{2l+1} \right] \\ + Y_{l-1}^m \left[\frac{f(r)}{r} \frac{\overbrace{(1-l^2)(l+m)(l+1)}^{\kappa_{21}(l,m)}}{2l+1} + \frac{df}{dr} \frac{\overbrace{(1-l^2)(l+m)}^{\kappa_{22}(l,m)}}{2l+1} \right]$$

On peut alors écrire le système (2.50) en décomposant u_p , u_t , et Θ sur cette base d'harmoniques sphériques

$$(2.102) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \Delta u_{pl}^m = \nu \Delta^2 u_{pl}^m + i 2\Omega \frac{m}{l(l+1)} \Delta u_{pl}^m + 2\Omega \frac{1}{l(l+1)} Q_3 u_{tl}^m \\ \quad - \alpha g \Theta_l^m \\ \quad + \frac{1}{l(l+1)} \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{u} \underline{\nabla} \vec{u} - \frac{1}{\mu_0 \rho_0} \vec{B} \underline{\nabla} \vec{B} \right) \right) \Big|_{Y_l^m}, \\ \frac{\partial}{\partial t} u_{tl}^m = \nu \Delta u_{tl}^m + i 2\Omega \frac{m}{l(l+1)} u_{tl}^m - 2\Omega \frac{1}{l(l+1)} Q_3 u_{pl}^m \\ \quad - \frac{1}{l(l+1)} \vec{r} \cdot \left(\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{u} \underline{\nabla} \vec{u} - \frac{1}{\mu_0 \rho_0} \vec{B} \underline{\nabla} \vec{B} \right) \right) \Big|_{Y_l^m}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \Theta_l^m = -\left(\frac{1}{r} \frac{\partial T_s}{\partial r} \right) l(l+1) u_{pl}^m + \kappa \Delta \Theta_l^m - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \Theta) \Big|_{Y_l^m}, \\ \frac{\partial}{\partial t} B_{pl}^m = \eta \Delta B_{pl}^m + \frac{1}{l(l+1)} \vec{r} \cdot (\vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{B})) \Big|_{Y_l^m}, \\ \frac{\partial}{\partial t} B_{tl}^m = \eta \Delta B_{tl}^m + \frac{1}{l(l+1)} \vec{r} \cdot (\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{B}))) \Big|_{Y_l^m}. \end{array} \right.$$

2.3.3 Conditions aux limites magnétiques

La composante poloïdale du champ se raccorde continuellement à la frontière externe à un champ dérivant d'un potentiel harmonique. Comme il est dérivable du côté de l'isolant, on peut écrire

$$(2.103) \quad (B_p)_l^m \propto \frac{1}{r^{(l+1)}}.$$

On peut alors écrire au bord

$$(2.104) \quad \frac{\partial}{\partial r}(B_p)_l^m + \frac{(l+1)}{r}(B_p)_l^m = 0,$$

car B_p et $\frac{\partial}{\partial r}B_p$ sont continus. Les conditions aux limites pour le champ s'écrivent alors

$$(2.105) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial r}(B_p)_l^m + \frac{(l+1)}{r}(B_p)_l^m = 0, \\ (B_t)_l^m = 0. \end{cases}$$

On note la force de la décomposition en harmoniques sphériques, qui nous permet de fermer le système sans avoir à calculer la diffusion du champ dans l'isolant.

2.4 Calcul des termes non-linéaires

Reste le calcul des termes non-linéaires. Ils sont calculés dans l'espace physique, puis transférés dans l'espace spectral. En théorie, le calcul de la valeur d'un champ scalaire dans l'espace physique connaissant ses coefficients spectraux ne pose pas de difficultés. Tout comme l'intégration de ces valeurs pour recalculer les coefficients spectraux. La difficulté tient ici à la projection de champs vectoriels calculés dans l'espace physique sur les coefficients spectraux de leurs composantes poloïdales et toroïdales.

Une difficulté supplémentaire est engendrée par le terme d'induction. Ce terme s'écrit comme le rotationnel du produit de deux vecteurs. Il est donc bien solénoïdal, et en tant que tel se projette sur la décomposition de Mie. On pourrait donc envisager de le calculer dans l'espace physique, puis de calculer les coefficients correspondants à sa décomposition spectrale. Cette approche nécessiterait toutefois le calcul du rotationnel dans l'espace physique, ce qui serait d'une faible précision numérique. Il est préférable de ne calculer que le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{B}$ de la vitesse par l'induction dans l'espace physique, et de l'écrire dans l'espace spectral avant d'en prendre le rotationnel. Cela soulève une difficulté supplémentaire, car ce produit n'est pas à divergence nulle.

Nous allons utiliser pour dérivées les formules nécessaires à l'intégration des non-linéarités une note intitulée "Dynamo cinématique" rédigée par Philippe Cardin (1995).

2.4.1 Harmoniques sphériques généralisées

Nous allons utiliser les harmoniques sphériques généralisées pour dériver de façon concise les formules nécessaires à la manipulation des termes non-linéaires. Ces harmoniques permettent de décrire un champ de vecteurs sur la base des harmoniques sphériques et de leurs dérivées. Les familles de dérivées par rapport aux angles θ et ϕ des harmoniques sphériques usuelles ne forment pas des bases, mais une combinaison linéaire de ces dérivées en est une.

On notera les harmoniques sphériques généralisées $Y_{lm}^+, Y_{lm}^-, Y_{lm}^0$, elles sont définies comme (voir Gel'fand et Šapiro 1956 et Phinney et Burridge 1973, pour une présentation rigoureuse)

$$(2.106) \quad Y_{lm}^+ = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \left(\frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta} - \mathbf{i} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi} \right),$$

$$(2.107) \quad Y_{lm}^0 = Y_l^m,$$

$$(2.108) \quad Y_{lm}^- = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \left(-\frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta} - \mathbf{i} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi} \right).$$

A un vecteur $\vec{V} \in \mathbb{R}^3$ de composantes (V_r, V_θ, V_ϕ) dans la base sphérique réelle

$(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$, on peut associer les coordonnées (V^+, V^0, V^-) dans la base canonique des harmoniques sphériques généralisés $(\vec{e}^+, \vec{e}^0, \vec{e}^-)$.

Nous avons les relations suivantes

$$(2.109) \quad \begin{cases} V^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(-V_\theta + \mathbf{i}V_\phi), \\ V^0 = V_r, \\ V^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(V_\theta + \mathbf{i}V_\phi), \end{cases}$$

et

$$(2.110) \quad \begin{cases} \vec{e}^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{e}_\theta - \mathbf{i}\vec{e}_\phi), \\ \vec{e}^0 = \vec{e}_r, \\ \vec{e}^{-} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_\theta - \mathbf{i}\vec{e}_\phi). \end{cases}$$

On peut alors écrire le champ de vecteurs sous la forme

$$(2.111) \quad V^+(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l V_{lm}^+(r) Y_{lm}^+(\theta, \phi),$$

$$(2.112) \quad V^0(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l V_{lm}^0(r) Y_l^m(\theta, \phi),$$

$$(2.113) \quad V^-(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l V_{lm}^-(r) Y_{lm}^-(\theta, \phi),$$

la divergence s'exprime (Gel'fand et Šapiro, 1956 ; Phinney et Burridge, 1973) ,

$$(2.114) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{V}(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_{lm}^0(r)) - \frac{\sqrt{l(l+1)}}{\sqrt{2}r} (V_{lm}^+(r) + V_{lm}^-(r)) \right] Y_l^m(\theta, \phi),$$

et le rotationnel

$$(2.115) \quad \begin{aligned} (\vec{\nabla} \wedge \vec{V})^+(r, \theta, \phi) &= \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \mathbf{i} \left[-\frac{\sqrt{l(l+1)}}{\sqrt{2}r} V_{lm}^0(r) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_{lm}^+(r)) \right] Y_{lm}^+(\theta, \phi) \\ (\vec{\nabla} \wedge \vec{V})^0(r, \theta, \phi) &= \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \left[\frac{\mathbf{i}\sqrt{l(l+1)}}{\sqrt{2}r} (V_{lm}^+(r) - V_{lm}^-(r)) \right] Y_l^m(\theta, \phi) \\ (\vec{\nabla} \wedge \vec{V})^-(r, \theta, \phi) &= \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \mathbf{i} \left[\frac{\sqrt{l(l+1)}}{\sqrt{2}r} V_{lm}^0(r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_{lm}^-(r)) \right] Y_{lm}^-(\theta, \phi) \end{aligned}$$

Nous allons utiliser ce formalisme pour expliciter le calcul des composantes poloïdale V_p , toroïdale V_t et sphéroïdale V_s d'un champ de vecteurs.

Connaissant la composante radiale de \vec{V} , on peut écrire sa décomposition en harmoniques sphériques (2.89),

$$(2.116) \quad V_r^m(r) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} Y_l^{m*}(\theta, \phi) V_r(r, \theta, \phi) \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

d'où, avec (2.25)

$$(2.117) \quad \begin{aligned} V_r(r, \theta, \phi) &= \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l V_r^m(r) Y_l^m(\theta, \phi) \\ &= \frac{1}{r} L_2(P) \\ &= \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l \frac{l(l+1)}{r} V_p^m(r) Y_l^m(\theta, \phi). \end{aligned}$$

On exprime alors la composante poloïdale $V_p^m(r)$,

$$(2.118) \quad V_p^m(r) = \frac{r}{l(l+1)} V_r^m(r),$$

qui s'écrit encore

$$(2.119) \quad V_p^m(r) = \frac{r}{l(l+1)} V_{lm}^0(r).$$

Pour calculer la composante toroïdale, on peut écrire (équation 2.25),

$$(2.120) \quad \begin{aligned} V_\theta(r, \theta, \phi) &= \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l V_s^m(r) \frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta}(\theta, \phi) + V_t^m(r) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi}(\theta, \phi), \\ V_\phi(r, \theta, \phi) &= \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l V_s^m(r) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi}(\theta, \phi) - V_t^m(r) \frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta}(\theta, \phi). \end{aligned}$$

On a alors

$$(2.121) \quad \begin{aligned} V_\theta &= \vec{V} \cdot \vec{e}_\theta, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{V} \cdot (\vec{e}^- - \vec{e}^+), \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l V_{lm}^- Y_{lm}^- - V_{lm}^+ Y_{lm}^+, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2l(l+1)}} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^l (-V_{lm}^- - V_{lm}^+) \frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta} + \mathbf{i} (V_{lm}^+ - V_{lm}^-) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^m}{\partial \phi}. \end{aligned}$$

On obtient par identification,

$$(2.122) \quad V_s^m = \frac{-1}{\sqrt{2l(l+1)}} (V_{lm}^+ + V_{lm}^-),$$

$$(2.123) \quad V_t^m = \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2l(l+1)}} (V_{lm}^+ - V_{lm}^-).$$

On peut vérifier que dans le cas d'un champ de vecteurs à divergence nulle, on retrouve la relation entre déjà établie entre la composante sphéroïdale et la composante poloïdale. Il vient de l'équation (2.114)

$$(2.124) \quad \begin{aligned} 0 &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_{lm}^0) - \frac{\sqrt{l(l+1)}}{\sqrt{2} r} (V_{lm}^+ + V_{lm}^-), \\ \frac{l(l+1)}{r} V_{sl}^m &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{l(l+1)}{r} V_{pl}^m) \\ V_{sl}^m &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_{pl}^m). \end{aligned}$$

Enfin, en explicitant (2.122) et (2.123), il vient

$$(2.125) \quad \begin{aligned} V_{tl}^m &= \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2l(l+1)}} (V_{lm}^+ - V_{lm}^-) \\ &= \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2l(l+1)}} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} (V^+ Y_{lm}^{+*} - V^- Y_{lm}^{-*}) \sin \theta \, d\theta \, d\phi \\ &= \frac{\mathbf{i}}{2l(l+1)} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} (-V_{\theta} + \mathbf{i} V_{\phi}) \left(\frac{\partial Y_l^{m*}}{\partial \theta} + \mathbf{i} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^{m*}}{\partial \phi} \right) \\ &\quad - (V_{\theta} + \mathbf{i} V_{\phi}) \left(-\frac{\partial Y_l^{m*}}{\partial \theta} + \mathbf{i} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^{m*}}{\partial \phi} \right) \sin \theta \, d\theta \, d\phi \\ &= \frac{1}{l(l+1)} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \left(V_{\theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^{m*}}{\partial \phi} - V_{\phi} \frac{\partial Y_l^{m*}}{\partial \theta} \right) \sin \theta \, d\theta \, d\phi, \end{aligned}$$

$$(2.126) \quad \boxed{V_{tl}^m = \frac{1}{l(l+1)} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \left(V_{\theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^{m*}}{\partial \phi} - V_{\phi} \frac{\partial Y_l^{m*}}{\partial \theta} \right) \sin \theta \, d\theta \, d\phi.}$$

et

$$(2.127) \quad \begin{aligned} V_{sl}^m &= \frac{-1}{\sqrt{2l(l+1)}} (V_{lm}^+ + V_{lm}^-) \\ &= \frac{-1}{l(l+1)} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \left(-V_{\theta} \frac{\partial Y_l^{m*}}{\partial \theta} - V_{\phi} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^{m*}}{\partial \phi} \right) \sin \theta \, d\theta \, d\phi, \end{aligned}$$

$$(2.128) \quad \boxed{V_{sl}^m = \frac{1}{l(l+1)} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \left(V_{\theta} \frac{\partial Y_l^{m*}}{\partial \theta} + V_{\phi} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^{m*}}{\partial \phi} \right) \sin \theta \, d\theta \, d\phi.}$$

On peut adopter la même approche pour déterminer les composantes poloïdales et toroïdales du rotationnel d'un champ de vecteur (également utile pour le calcul de l'induction). La composante poloïdale du rotationnel $(\text{rot}V)_p$ s'écrit

en utilisant (2.119),

$$\begin{aligned}
 (\text{rot}V)_{pl}^m &= \frac{r}{l(l+1)} (\vec{\nabla} \wedge \vec{V})_{lm}^0 \\
 (2.129) \quad &= \frac{r}{l(l+1)} \frac{\mathbf{i}\sqrt{l(l+1)}}{\sqrt{2}r} (V_{lm}^+ - V_{lm}^-) \\
 &= \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2l(l+1)}} (V_{lm}^+ - V_{lm}^-) \\
 &= V_{tl}^m.
 \end{aligned}$$

La composante toroïdale $(\text{rot}V)_t$ vient de (2.123),

$$\begin{aligned}
 (\text{rot}V)_{tl}^m &= \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2l(l+1)}} ((\vec{\nabla} \wedge \vec{V})_{lm}^+ - (\vec{\nabla} \wedge \vec{V})_{lm}^-) \\
 &= \frac{-1}{\sqrt{2l(l+1)}} \left[\left(-\frac{\sqrt{l(l+1)}}{\sqrt{2}r} V_{lm}^0 - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_{lm}^+) \right) - \left(\frac{\sqrt{l(l+1)}}{\sqrt{2}r} V_{lm}^0 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_{lm}^-) \right) \right] \\
 &= \frac{1}{r} V_{lm}^0 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{\sqrt{2l(l+1)}} (V_{lm}^+ + V_{lm}^-) \right) \\
 (2.130) \quad &= \frac{1}{r} V_{lm}^0 - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_{sl}^m).
 \end{aligned}$$

2.4.2 Aliasing

La méthode de calcul des termes non-linéaires que nous utilisons, par calcul dans l'espace physique en des points de collocation et intégration dans l'espace spectral, pose le problème de l'aliasing. Le nombre \mathbf{M} de points de collocations est choisi de sorte qu'il contraigne le spectre jusqu'au degré maximum calculé. Une fonction connue dans l'espace spectral jusqu'au degré \mathbf{Lmax} peut alors être évaluée dans l'espace physique, puis intégrée dans l'espace spectral sans être altérée (aux erreurs d'arrondis près). Si l'on évalue deux fonctions de ce type dans l'espace physique, le spectre de leur produit a un contenu spectral allant jusqu'à $2 \times \mathbf{Lmax}$. Si le nombre de points dans l'espace physique n'a été fixé qu'en fonction du degré \mathbf{Lmax} , l'intégration dans l'espace spectral est sous échantillonnée et l'on risque un transfert d'énergie des petites échelles vers les grandes. C'est le phénomène d'aliasing.

Pour tous les calculs présentés dans ce travail, nous avons pris soin de vérifier que l'approximation spectrale converge largement (un rapport d'au moins 10^6 a été maintenu entre les haut et bas degrés). Pour cette raison, nous avons adopté une méthode de calcul conservant l'aliasing (dite "fully aliased").

Il est important de noter que dans des études en turbulence développée, une telle convergence ne pourra plus être garantie, et qu'il sera alors nécessaire d'introduire une méthode de dé-aliasing.

Il existe au moins deux approches pour réduire l'aliasing (*c.f.* Canuto et al. 1988). La première ("padding") consiste à utiliser un nombre plus élevé de points de collocation. On utilise généralement $3M/2$ points. La seconde ("phase shift") consiste à effectuer le calcul dans l'espace physique sur deux ensembles de points décalés.

2.5 Schéma d'intégration temporel

On intègre ces équations par un schéma aux différences finies de type semi-implicite *Crank-Nicholson* pour la diffusion, et *Adams-Bashford* pour les termes de forces (termes non-linéaires, Coriolis,...).

Les équations des systèmes précédents peuvent s'écrire de façon générique sous la forme

$$(2.131) \quad \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{A} f_l^m(t) = \mathcal{B} f_l^m(t) + g_l^m(t),$$

où les opérateurs linéaires \mathcal{A} et \mathcal{B} sont à une constante multiplicative près des laplaciens ou des bi-laplaciens. On discrétise ces opérateurs par le schéma de différences finies introduit précédemment pour les dérivées radiales, et en utilisant les propriétés des harmoniques sphériques, ce qui mène à un schéma approché :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{A}_h f_l^m(t) = \mathcal{B}_h f_l^m(t) + g_l^m(t).$$

Le schéma d'intégration temporel est alors le suivant

$$(2.132) \quad \frac{\mathcal{A}_h f_l^m(t + \delta t) - \mathcal{A}_h f_l^m(t)}{\delta t} = \frac{1}{2} \mathcal{B}_h f_l^m(t) + \frac{1}{2} \mathcal{B}_h f_l^m(t + \delta t) + \frac{3}{2} g_l^m(t) - \frac{1}{2} g_l^m(t - \delta t),$$

qui s'écrit

$$(2.133) \quad \left(\frac{1}{\delta t} \mathcal{A}_h - \frac{1}{2} \mathcal{B}_h \right) f_l^m(t + \delta t) = \left(\frac{1}{\delta t} \mathcal{A}_h + \frac{1}{2} \mathcal{B}_h \right) f_l^m(t) + \frac{3}{2} g_l^m(t) - \frac{1}{2} g_l^m(t - \delta t).$$

Pour chaque équation, le calcul d'un pas de temps nécessite donc un produit matrice vecteur, et une inversion de matrice. Ces matrices sont 5-bandes pour les deux premières équations (bi-laplacien)⁵ et tri-diagonales pour les suivantes. Elles sont résolues par une méthode de pivot de Gauss ($\mathcal{O}(N)$ pour une matrice tridiagonale) accompagnée d'une décomposition "LU" pour la matrice pentadiagonale.

La partie diffusive (*Crank-Nicholson*) est inconditionnellement stable (mais peut être oscillante pour les courtes longueurs d'ondes spatiales). Le terme d'*Adams-Bashford* est conditionnellement stable. Nous avons déterminé la stabilité empiriquement dans nos simulations.

Notre algorithme a été mis au point sur des machines vectorielles puissantes (Cray J-90 & C-90).

5. Comme nous l'avons vu précédemment, on ne peut pas calculer simplement par une matrice tri-diagonale l'évolution temporelle de Δu_p car on n'a pas de conditions aux limites sur celui-ci.

Bibliographie

- Milton Abramowitz, Irene Stegun, 1972
Handbook of Mathematical Functions
 National Bureau of Standards.
- George Backus, Robert Parker et Catherine Constable, 1996
Foundations of Geomagnetism
 Cambridge University Press.
- Claudio Canuto, Yousuff Hussaini, Affio Quateroni, et Thomas Zang, 1988
Spectral Methods in Fluid Dynamics
 Springer Verlag.
- Philippe Cardin, 1995
Dynamo cinématique
 Notes personnelles.
- Jean Coulomb, Georges Jobert, 1976
Traité de géophysique interne, tome I
 Masson.
- P. Cuong, Fritz Busse, 1981
Generation of magnetic fields by convection in a rotating sphere. I
 Physics of the Earth and Planetary Interiors, **24**, 272-283.
- Clive Fletcher, 1988, 1991
Computational techniques for Fluid Dynamics, volumes I & II
 Springer.
- I. Gel'fand et Z. Šapiro, 1956
*Representations of the group of rotations of
 3-dimensional space and their applications*
 American Mathematical Society Translations, Serie 2, **2**, p. 207–316.
 Traduit de: Uspehi Mat. Nauk (N.S.) **7**, no. 1(47), p. 3–117, (1952).
- Gary Glatzmaier et Paul Roberts, 1995
*A three-dimensional convective dynamo solution with rotating and finitely
 conducting inner core and mantle*
 Physics of the Earth and Planetary Interiors, **91**, p. 63–75.
- David Gottlieb et Steven Orzag, 1977
Numerical analysis of spectral methods: theory and applications
 SIAM Publications.

- R. **Koop** et D. Stelpstra, 1989
On the computation of the gravitational potential and its first and second order derivatives.
Manuscripta Geodactica, **14**, 373-382.
- Weijia **Kuang** et Jeremy Bloxham, 1997
An Earth-like numerical dynamo model
Nature, **389**, p. 371–374.
- Robert **Phinney** et Robert Burridge, 1973
Representation of the Elastic-Gravitational Excitation of a Spherical Earth Model by Generalized Spherical Harmonics
Geophys. J. R. Astr. Soc., **34**, 451-487.
- William **Press**, Saul Teukolsky, William Vetterling, Brian Flannery, 1986, 1992
Numerical Recipes
Cambridge University Press.
- Paul **Roberts**, 1968
On the thermal instability of a rotating-fluid sphere containing heat sources
Philosophical Transaction A, **263**, p 93-117.
- Andreas **Tilgner** et Friedrich Busse, 1997
Finite Amplitude Convection in Rotating Spherical Fluid Shells
Journal of Fluid Mechanics, **332**, p. 359–376.