

Summary

In this chapter, we introduce the equations of incompressible MHD, that will be used as a model for induction in the Earth's core. Doing so, we try and insist on the underlying hypotheses (for clarity they are expressed in the beginning of each section of §1.1). Boussinesq approximation is adopted (leaving aside the question of the adiabatic gradient); precession forces are neglected (the core is considered spherical); variations of the length of the day are also neglected; the fluid in the core is supposed to be newtonian. Buoyancy force is adopted as the only driving force.

In §1.2, we recall boundary conditions for velocity, temperature, and induction fields. Most of our studies will be performed with no-slip boundary conditions. Both no-slip and free-slip boundary conditions are presented here.

Chapitre 1

Modélisation



Nous allons approcher la géométrie du noyau liquide de la terre par une coquille parfaitement sphérique, de rayon interne r_i , et externe r_e (cf figure 1).

On définit le rapport d'aspect $\tilde{\eta}$ de cette coquille par

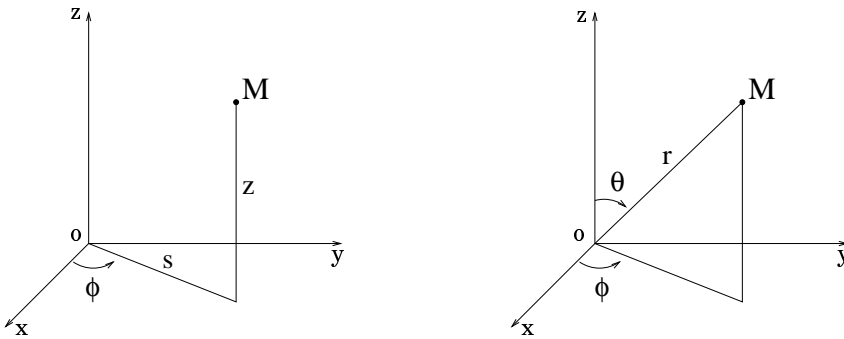
$$(1.1) \quad r_i = \tilde{\eta} r_e,$$

et la distance d par

$$(1.2) \quad d = r_e - r_i = (1 - \tilde{\eta}) r_e.$$

On utilisera par la suite les coordonnées cylindriques $(\vec{e}_s, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$, ou les coordonnées sphériques $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$ en fonction des simplifications qu'elles apportent aux calculs. On définit les vecteurs

$$(1.3) \quad \vec{s} = s \vec{e}_s, \quad \vec{r} = r \vec{e}_r.$$



Il existe deux candidats pour générer les mouvements, le couple luni-solaire et la force d'Archimède. L'axe de rotation terrestre décrit en 26000 ans un cône dont

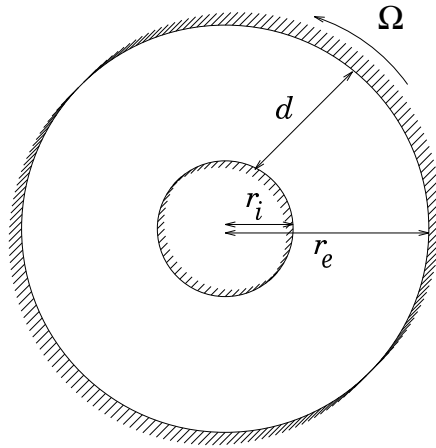


FIG. 1.1 – La géométrie que nous nous proposons d’étudier (représentée ici en coupe) est une simplification de celle du noyau liquide de la terre ; les éventuels reliefs des frontières sont négligés, et l’ellipsoïde est ramené à une sphère.

l’axe est la normale au plan de l’écliptique : c’est la précession luni-solaire. Les calculs d’ordres de grandeur montrent qu’elle pourrait fournir l’énergie nécessaire à la dynamo (voir Malkus, 1994). Pour étudier cet apport d’énergie, on ne peut négliger l’écart à la sphéricité, et il est nécessaire de travailler dans un ellipsoïde. La force d’Archimède suppose qu’en certains endroits le fluide soit plus léger qu’en d’autres, cela peut avoir au moins deux causes. La première est la dilatation thermique : si le liquide est chauffé, il se dilate, et est localement plus léger. La prise en compte de ce “moteur” nécessite donc la modélisation de la température dans le fluide (ou plutôt de sa perturbation par rapport à un état de référence). Les sources de chaleur possibles sont diverses. La première est sans doute le refroidissement séculaire de la terre, qui mène à une température plus faible près de l’interface avec le manteau qu’au centre du noyau. A ce refroidissement est associé la croissance de la graine, et la chaleur latente de solidification du fer près de la graine. Le mouvement lui-même crée de la chaleur à l’intérieur du domaine par dissipation ohmique. On ne peut pas exclure non plus la possibilité de sources radioactives de chaleur (comme c’est le cas dans le manteau), mais elles seraient de faible importance. A ces différences de densité peuvent être associés des mouvements, on parle alors de convection thermique (voir Verhoogen 1980, Cardin et al. 1992, Labrosse 1997). Une autre source de différence de densité pourrait résider en une différence de composition locale du fluide. On l’a dit, le fer dans le noyau liquide n’est pas tout à fait pur, la croissance de la graine par solidification va donc concentrer la composition du fluide en certains de ses éléments légers qui sont contenus dans le fluide (le noyau n’a probablement pas la composition eutectique), cela mène à des différences de densité, donc à une force d’Archimède, on parle alors de convection solutale.

Nous n’étudierons ni les effets de la précession, ni la convection solutale, et

nous nous concentrerons sur les différents chauffages possibles et leurs conséquences.

Il existe divers modes de propagation de la chaleur

- Par rayonnement : tout corps émet par sa surface des radiations (visibles ou non). Les métaux étant opaques aux radiations, ce mode ne peut servir à l'intérieur du noyau (car le libre parcours moyen des photons y est très faible).
- Par conduction : c'est-à-dire par transport direct de la chaleur à travers un milieu au repos et sans intervention de rayonnement.
- Par convection : c'est-à-dire par mouvements (dans un fluide).

Nous retiendrons la conduction et la convection. On peut dériver un profil conductif qui servira d'état de base pour la convection, et qui dépend du chauffage envisagé. C'est au dessus de cet état de base que se développera la convection. L'hypothèse la plus discutée que nous ferons pour étudier la convection est sans doute celle de Boussinesq, qui consiste à supposer que le fluide est incompressible (sauf pour la densité du fluide dans la force d'Archimède). En se référant au modèle PREM on obtient une compressibilité de 20% .

Apparaît alors une notion importante pour le noyau : le gradient thermique adiabatique. Si l'on déplace une particule de fluide radialement, elle subit une variation de pression, entraînant une variation de volume et de température. Si on la déplace sans échange de chaleur avec l'extérieur, elle décrit le gradient thermique que l'on nomme "adiabatique". Ce gradient de température est donc tel que la variation de température d'une particule fluide ainsi déplacée la laisse en équilibre thermique avec le milieu qui l'entoure.

On le définit comme

$$(1.4) \quad \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{g\alpha T}{c_p},$$

où α est le coefficient de dilatation thermique, et c_p la chaleur spécifique à pression constante, et $g = \vec{g} \cdot \vec{e}_r$ est compté négativement.

On observe expérimentalement qu'un gradient adiabatique s'établit quand le fluide est bien brassé. On espère donc que ce modèle incompressible est significatif pour la convection développée, il ne permet toutefois pas de rendre compte de la convection au seuil dans le noyau.

La notion de gradient adiabatique n'a bien sûr de sens que si l'on tient compte de la compressibilité du fluide. Elle n'a pas de sens pour un modèle Boussinesq. Le gradient moteur de la convection dans un fluide compressible est le gradient sur-adiabatique. Pour tenter de comparer les simulations Boussinesq avec la terre, il faut donc considérer, comme paramètre pour la simulation, la température à l'intérieur de la Terre, une fois soustrait le gradient adiabatique. Ceci est un problème, car si le gradient de température de la terre est assez bien connu, le gradient sur-adiabatique est quant à lui très mal connu.

Nous définissons dans la section suivante les équations que nous considérerons.

1.1 Les équations du problème

Ces équations ne sont pas nouvelles, elles remontent pour la partie mécanique des fluides à Leonhard Euler et Jean d'Alembert (XVIII^e siècle) pour un fluide “parfait”, puis à Louis Navier (XIX^e siècle). Pour la partie magnétisme les équations fondamentales sont celles de Maxwell (XIX^e siècle), et l'équation d'induction est déjà sous cette forme dans l'article de 1946 de Walter Elsasser. Nous insisterons surtout ici sur les hypothèses sous-jacentes à ce modèle. Elle seront énoncées pour plus de clarté au début de chaque sous-section.

1.1.1 Equation du mouvement

H: Nous allons utiliser l'approximation d'un fluide newtonien et Boussinesq, c'est-à-dire que nous supposerons que le fluide étudié est homogène et incompressible, sauf pour le terme de force d'Archimède, où nous tiendrons compte au premier ordre des variations spatiales de masse volumique.

Cela implique entre autres que la viscosité du fluide ne varie pas avec les variations de température.

Nous supposerons de plus que la rotation $\vec{\Omega}$ de la terre est invariante au cours du temps (ce qui revient à supposer que le moment d'inertie du manteau est infini devant celui du noyau).

On va redériver l'équation de Navier-Stokes pour un fluide conducteur en rotation. Si l'on suppose le fluide incompressible, on a

$$(1.5) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0.$$

Où \vec{u} est le champ de vitesse. Ecrivons la conservation de la masse, soit ρ la densité

$$(1.6) \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = 0,$$

$$(1.7) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \rho + \rho(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = 0,$$

L'hypothèse d'homogénéité du fluide implique l'invariance de ρ en espace, et (1.5) avec (1.7) implique alors son invariance en temps

$$(1.8) \quad \rho = \rho_0.$$

puis la conservation de la quantité de mouvement (on utilise ici la convention de sommation sur les indices répétés)

$$(1.9) \quad \frac{d\rho u_i}{dt} = \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial j} u_j = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial j} + f_i,$$

où σ_{ij} est le tenseur des contraintes et f_i représente les termes de forces volumiques.

On va supposer le fluide newtonien, c'est-à-dire que le tenseur des contraintes est une fonction linéaire du gradient de vitesse. On peut alors écrire la loi de comportement d'un fluide newtonien sous la forme

$$(1.10) \quad \sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda \cdot \varepsilon_{\ell\ell}(u) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}(u),$$

elle fait intervenir les coefficients de viscosité λ , et μ (μ est appelé viscosité dynamique), et le tenseur des vitesses de déformation ε_{ij} défini par

$$(1.11) \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i} \right).$$

Comme le fluide est incompressible ($\varepsilon_{\ell\ell} = \sum_{\ell} \frac{\partial u_{\ell}}{\partial \ell} = 0$), cette loi se simplifie en

$$(1.12) \quad \sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}(u).$$

Il vient alors, en réécrivant (1.9)

$$(1.13) \quad \rho_0 \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial j} u_j \right) = -\frac{\partial}{\partial j} p \delta_{ij} + 2\frac{\partial}{\partial j} \mu \varepsilon_{ij}(u) + f_i,$$

$$(1.14) \quad \rho_0 \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial j} u_j \right) = -\frac{\partial p}{\partial i} + \frac{\partial}{\partial j} \mu \frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial}{\partial j} \mu \frac{\partial u_j}{\partial i} + f_i,$$

En utilisant l'homogénéité du fluide (pour $\frac{\partial \mu}{\partial j} = 0$), puis son incompressibilité

$$(1.15) \quad \rho_0 \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial j} u_j \right) = -\frac{\partial p}{\partial i} + \mu \sum_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial j^2} + \underbrace{\mu \frac{\partial}{\partial i} \sum_j \frac{\partial u_j}{\partial j}}_{=0} + f_i,$$

$$(1.16) \quad \rho_0 \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial j} u_j \right) = -\frac{\partial p}{\partial i} + \mu \Delta u_i + f_i,$$

Soit sous forme tensorielle (Navier-Stokes)

$$(1.17) \quad \rho_0 \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \underline{\nabla} \vec{u} \right) = -\vec{\nabla} p + \rho_0 \nu \Delta \vec{u} + \vec{f},$$

On a introduit ici la viscosité cinématique ν , définie comme $\nu = \mu / \rho_0$. Le tableau suivant donne, pour fixer les idées, quelques ordres de grandeurs de viscosité

(d'après Chassaing 1997, C.R.C. 1994, Padet 1991, et Poirier 1991 1994) :

	Viscosité dynamique		Viscosité cinématique	
Mercure ⁽¹⁾	$1,43 \cdot 10^{-5}$	$kg \cdot (m \cdot s)^{-1}$	$1,1 \cdot 10^{-7}$	$m^2 \cdot s^{-1}$
Gallium ⁽¹⁾	$1,02 \cdot 10^{-3}$	$kg \cdot (m \cdot s)^{-1}$	$1,7 \cdot 10^{-7}$	$m^2 \cdot s^{-1}$
Sodium ⁽¹⁾	$7,4 \cdot 10^{-4}$	$kg \cdot (m \cdot s)^{-1}$	$7,4 \cdot 10^{-7}$	$m^2 \cdot s^{-1}$
→ Noyau liq.	10^{-2}	$kg \cdot (m \cdot s)^{-1}$	10^{-6}	$m^2 \cdot s^{-1}$
Eau ⁽²⁾	10^{-3}	$kg \cdot (m \cdot s)^{-1}$	10^{-6}	$m^2 \cdot s^{-1}$
Air ⁽²⁾	$1,85 \cdot 10^{-5}$	$kg \cdot (m \cdot s)^{-1}$	$1,43 \cdot 10^{-5}$	$m^2 \cdot s^{-1}$
Huiles ⁽²⁾	$1,8 \cdot 10^{-1}$	$kg \cdot (m \cdot s)^{-1}$	$2,0 \cdot 10^{-4}$	$m^2 \cdot s^{-1}$
Glycérine ⁽²⁾	$8,0 \cdot 10^{-1}$	$kg \cdot (m \cdot s)^{-1}$	$6,3 \cdot 10^{-4}$	$m^2 \cdot s^{-1}$
Verre ⁽³⁾	10^{+6}	$kg \cdot (m \cdot s)^{-1}$	$3,9 \cdot 10^2$	$m^2 \cdot s^{-1}$

(1) à température expérimentale (i.e. supérieure à la valeur de fusion).

(2) aux conditions de températures et de pressions usuelles.

(3) à température de soufflage.

Rappelons au passage que si la viscosité cinématique est bien celle qui est significative pour nos équations, ce n'est pas celle dont on a l'intuition. Ainsi, lorsque l'on parle de viscosité cinématique, l'air est près de 15 fois plus visqueux que l'eau (à cause de sa faible densité). La viscosité dynamique du noyau liquide est comme on l'imagine plus élevée que celle de l'eau, mais la densité du noyau étant dix fois supérieure, les viscosités cinématiques sont identiques.

Le terme f dans (1.17) regroupe l'ensemble des densité de forces¹ en volume, ainsi qu'une "pseudo-force" (Coriolis) :

- la force d'*Archimède*, on utilise l'approximation dite de *Boussinesq*.

Alors que pour tout ce qui précède on a supposé le fluide homogène (cette hypothèse a été introduite pour établir l'équation (1.8)), on ne négligera pas ici la variation spatiale de ρ . La force d'*Archimède*, s'écrit

$$(1.18) \quad \delta\rho \vec{g},$$

où le vecteur \vec{g} est supposé parfaitement radial, et tel que $\vec{g} = g \vec{r} = g r \vec{e}_r$, donc non uniforme.

On utilise l'expansion thermique (variation de la masse volumique en fonction de la température) sous sa forme linéarisée

$$(1.19) \quad \rho = \rho_0 + \delta\rho = \rho_0 (1 - \alpha \Theta),$$

où $\Theta = T - T_s$. La force d'*Archimède*, s'écrit alors

$$(1.20) \quad -\rho_0 \alpha \Theta \vec{g} = \rho_0 \alpha \Theta g \vec{r}.$$

1. On parlera souvent de "forces" par abus de langage, il s'agit en fait de densité de forces (c.f. Appendice A.3)

- l'accélération de Coriolis, le fluide est en rotation rapide, nous nous plaçons dans un repère également en rotation. Le fluide subit alors une accélération d'inertie. Il ne s'agit pas à proprement parler d'une force.

Si on indice "a" les calculs effectués dans le repère absolu, et "r" ceux effectués dans le repère relatif (en rotation), on note que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial_a \rho \vec{u}_a}{\partial t} &= \frac{\partial_a}{\partial t} \rho \frac{\partial_a \vec{x}_a}{\partial t} \\
&= \left(\frac{\partial_r}{\partial t} + \vec{\Omega} \wedge \right) \rho \left(\frac{\partial_r}{\partial t} + \vec{\Omega} \wedge \right) \vec{x}_a \\
&= \left(\frac{\partial_r}{\partial t} + \vec{\Omega} \wedge \right) \left(\rho \vec{u}_r + \rho \vec{\Omega} \wedge \vec{x}_a \right) \\
&= \frac{\partial_r \rho \vec{u}_r}{\partial t} + \frac{\partial_r \rho}{\partial t} (\vec{\Omega} \wedge \vec{x}_a) + 2\rho \vec{\Omega} \wedge \vec{u}_r + \frac{\partial_r \vec{\Omega}}{\partial t} \wedge \rho \vec{x}_a + \vec{\Omega} \wedge (\rho \vec{\Omega} \wedge \vec{x}_a) \\
&= \frac{\partial_r \rho \vec{u}_r}{\partial t} + \frac{\partial_r \rho}{\partial t} (\vec{\Omega} \wedge \vec{x}_a) + 2\rho \vec{\Omega} \wedge \vec{u}_r + \rho \frac{\partial_r \vec{\Omega}}{\partial t} \wedge \vec{r} + \rho \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) .
\end{aligned}$$

En faisant l'hypothèse que les variations temporelles de $\vec{\Omega}$ (terme de Poincaré), comme celles de ρ , sont négligeables, il reste les deux termes

$$(1.21) \quad -2\rho \vec{\Omega} \wedge \vec{u}_r - \rho \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) .$$

Le terme d'inertie centrifuge $-\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r})$, peut s'écrire sous la forme

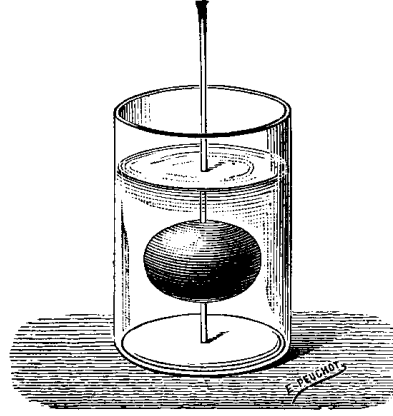
$$(1.22) \quad -\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{s}) ,$$

où \vec{s} est le rayon cylindrique (précédemment défini), soit

$$(1.23) \quad -\vec{\Omega} \wedge (s\Omega \vec{e}_\phi) = -s\Omega (\vec{\Omega} \wedge \vec{e}_\phi) = s\Omega^2 \vec{e}_s = \frac{1}{2} \vec{\nabla}(\Omega^2 s^2) .$$

On peut donc écrire le terme d'accélération centrifuge sous la forme d'un gradient, et le regrouper avec le gradient de pression (cette opération utilise $\rho = \rho_0$). Plus généralement ce terme reviendrait à une modification de la pesanteur, modification que l'on négligera en supposant que la pesanteur reste radiale, et que son intensité est peu modifiée par ce terme. En fait, le problème complet suppose un équilibre entre trois forces, la gravité, la pression, et la force centrifuge; la géométrie du problème est alors un ellipsoïde (figure d'équilibre hydrostatique en rotation, *c.f.* Figure 1.2). Le détail de cet équilibre ne nous intéresse pas, puisqu'on veut en réalité étudier des perturbations de celui-ci. Pour notre modèle, nous ramenons donc cet ellipsoïde à une sphère, et cet équilibre à celui de deux forces. De ce fait, nous pouvons interpréter ce terme comme une modification de la pesanteur, dont nous ne tiendrons pas compte.

FIG. 1.2 – Une masse d’huile au sein d’un mélange d’eau et d’alcool se rassemble et prend la forme d’une sphère (les effets de la gravité étant simulés par la tension de surface). Lorsqu’on lui imprime un mouvement de rotation, au moyen d’un petit disque traversé par une aiguille, cette sphère se transforme et prend la forme d’un ellipsoïde de révolution aplati, dont le petit axe coïncide avec l’axe de révolution. Cette expérience est due au physicien belge Plateau (1873) [I.1].



— Expérience de Plateau.

On peut donc écrire l’accélération de *Coriolis* dans le référentiel relatif ($\vec{u} = \vec{u}_r$) sous la forme

$$(1.24) \quad -2\rho\vec{\Omega} \wedge \vec{u},$$

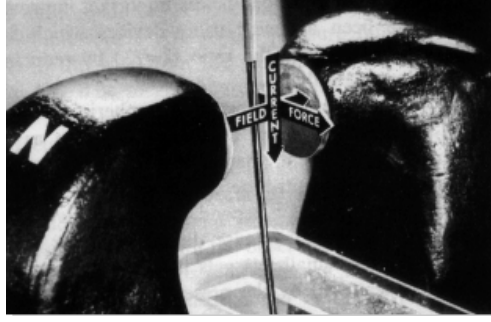
que l’on notera encore en introduisant le pseudo-scalaire Ω

$$(1.25) \quad -2\rho\Omega(\vec{e}_z \wedge \vec{u}).$$

Une autre façon de comprendre l’accélération de Coriolis (directement à partir de la vitesse) consiste à décomposer en perturbation : $u = U + u'$, où U correspond à la rotation en bloc Ω . On s’intéresse alors à l’évolution de u' , et on utilise le terme non-linéaire d’advection pour rendre compte du transport associé à l’écoulement principal en rotation en bloc. Il faut cependant prendre garde de bien écrire les variations temporelles de u' dans le nouveau repère (c’est-à-dire un repère lié à l’écoulement principal de rotation en bloc). Ainsi

$$(1.26) \quad \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_a \vec{u}_a &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{u}_a^t(\phi) - \vec{u}_a^{t-\delta t}(\phi)}{\delta t}, \\ &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{u}_r^t(\phi) - \vec{u}_r^{t-\delta t}(\phi + \delta\phi)}{\delta t}, \\ &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{u}_r^t(\phi) - \vec{u}_r^{t-\delta t}(\phi)}{\delta t} + \frac{\vec{u}_r^{t-\delta t}(\phi) - \vec{u}_r^{t-\delta t}(\phi + \delta\phi)}{\delta t}, \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_r \vec{u}_r - \Omega \frac{\partial \vec{u}_r}{\partial \phi}. \end{aligned}$$

FIG. 1.3 – Un jet de mercure vertical parcouru par un courant électrique, dans un champ magnétique horizontal est dévié par la force de Laplace (Shercliff, 1972).



On a donc

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d}{dt}\right)_a \vec{u}_a &= \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_a \vec{u}_a + \vec{u}_a \underline{\nabla} \vec{u}_a, \\
 &= \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_r \vec{u}' - \Omega \frac{\partial \vec{u}'}{\partial \phi} + (\vec{U} + \vec{u}') \underline{\nabla} (\vec{U} + \vec{u}'), \\
 (1.27) \quad &= \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_r \vec{u}' - \underbrace{\Omega \frac{\partial \vec{u}'}{\partial \phi}}_{(a)} + \underbrace{\vec{u}' \underline{\nabla} \vec{u}'}_{(b)} + \underbrace{\vec{U} \underline{\nabla} \vec{u}'}_{(c)} + \underbrace{\vec{u}' \underline{\nabla} \vec{U}}_{(c)} + \underbrace{\vec{U} \underline{\nabla} \vec{U}}_{(d)},
 \end{aligned}$$

où (a)+(b)+(c) correspond au terme d'accélération de Coriolis et (d) correspond à l'accélération centrifuge.

- la force de Laplace (de *Lorentz* dans la littérature anglo-saxonne) qui s'exerce sur la matière parcourue par un courant (*c.f.* figure 1.3),

$$(1.28) \quad \vec{j} \wedge \vec{B}.$$

En utilisant la loi d'*Ampère*², sous la forme $\mu_0 \vec{j} = \vec{\nabla} \wedge \vec{B}$, elle s'écrit

$$(1.29) \quad \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B}.$$

L'équation (1.17) s'écrit donc, dans le repère en rotation

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\rho_0 \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \underline{\nabla} \vec{u}\right)}_{\text{inertie}} &= - \underbrace{\vec{\nabla} \pi}_{\text{potentiel}} + \underbrace{\rho_0 \nu \Delta \vec{u}}_{\text{diffusion visqueuse}} + \underbrace{\rho_0 \alpha \Theta g \vec{r}}_{\text{Archimède}} \\
 &\quad - \underbrace{2\rho_0 (\vec{\Omega} \wedge \vec{u})}_{\text{Coriolis}} + \underbrace{\frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B}}_{\text{Laplace}},
 \end{aligned}$$

² Les hypothèses nécessaires à son écriture seront détaillées section 2.3: Equation de l'induction.

$$(1.30) \quad \boxed{\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} &= -\vec{u} \cdot \underline{\nabla} \vec{u} - \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} \pi + \nu \Delta \vec{u} - 2\Omega (\vec{e}_z \wedge \vec{u}) \\ &+ \frac{1}{\mu_0 \rho_0} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B} + \alpha \Theta g \vec{r}. \end{aligned}}$$

1.1.2 Equation d'énergie

H: Nous supposons, dans cette partie, le fluide isotrope, et parfait.

Nous supposons le fluide incompressible, la conservation de la masse tient lieu d'équation d'état.

L'équation de conservation de l'énergie s'écrit (Dautray et Lions 1984)

$$(1.31) \quad \frac{d\rho e}{dt} = \frac{\partial \rho e}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \rho e = \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial j} - \frac{\partial q_i}{\partial i} + S,$$

où l'on note q le flux de chaleur, e l'énergie interne par unité de masse et S l'ensemble des termes sources en volume.

Puisque le fluide est newtonien et incompressible ($\lambda = 0$ dans la loi de comportement)

$$(1.32) \quad \rho_0 \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} e \right) = -p \underbrace{\delta_{ij}}_{=0} \frac{\partial u_i}{\partial j} + 2\mu \varepsilon_{ij}(u) \frac{\partial u_i}{\partial j} - \frac{\partial q_i}{\partial i} + S.$$

De plus, nous nous placerons ici dans le cas d'un fluide parfait ($\mu = 0$), c'est-à-dire que nous négligerons les effets thermiques associés à la viscosité

$$(1.33) \quad \rho_0 \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} e \right) = -\frac{\partial q_i}{\partial i} + S.$$

Le terme de dissipation thermique est approché par la loi de *Fourier*, (relation phénoménologique) faisant apparaître le coefficient de proportionnalité K_{ij} (tenseur de conduction thermique) entre le flux de chaleur et le gradient de température

$$(1.34) \quad q_i = -K_{ij} \frac{\partial T}{\partial j},$$

si le fluide est supposé isotrope, cette relation devient (avec $K_{ij} = k \delta_{ij}$).

$$(1.35) \quad \vec{q} = -k \vec{\nabla} T.$$

L'équation d'énergie s'écrit alors

$$(1.36) \quad \rho_0 \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} e \right) = \frac{\partial}{\partial i} k \frac{\partial T}{\partial i} + S.$$

Si l'on suppose à présent que le fluide est à chaleur spécifique constante c (ce qui revient à supposer que l'énergie ne varie en temps qu'à travers les variations temporelles de la température), on a $e(T)$ sous la forme

$$(1.37) \quad e = c T,$$

et

$$(1.38) \quad \rho_0 c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} T \right) = \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) + S.$$

En utilisant l'homogénéité du fluide pour la conductivité thermique k , on l'écrit

$$(1.39) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = -\vec{u} \cdot \vec{\nabla} T + \frac{k}{\rho_0 c} \Delta T + \frac{S}{\rho_0 c},$$

posons

$$(1.40) \quad \kappa = \frac{k}{\rho_0 c},$$

$$(1.41) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = -\vec{u} \cdot \vec{\nabla} T + \kappa \Delta T + \frac{S}{\rho_0 c}.$$

Il est intéressant de noter qu'à ce modèle de transport de l'énergie correspond, en l'absence d'advection, une équation parabolique. Une étude mathématique de ce type d'équation montre que les caractéristiques³ sont horizontales, c'est-à-dire que l'information se propage à vitesse infinie⁴. Une modification ponctuelle de la température entraîne donc une modification immédiate (mais infinitésimale) de la température en tout point du modèle⁵. Lors d'une résolution numérique de cette équation, l'information se propagera à la "vitesse numérique" du schéma ($\delta x / \delta t$).

Le tableau suivant donne, pour fixer les idées, quelques valeurs de la diffusivité thermique⁶ (d'après Le Mouël et al. 1994, Fabry 1942, C.R.C. 1994 et Chassaing 1997):

Eau	$1,0 \cdot 10^{-7}$	$m^2 \cdot s^{-1}$
Verre (moyenne)	$4,0 \cdot 10^{-7}$	$m^2 \cdot s^{-1}$
Sol (moyenne)	$7,5 \cdot 10^{-7}$	$m^2 \cdot s^{-1}$
Pierre calcaire	$1,0 \cdot 10^{-6}$	$m^2 \cdot s^{-1}$
Mercure	$4,4 \cdot 10^{-6}$	$m^2 \cdot s^{-1}$
→ Noyau	$8,0 \cdot 10^{-6}$	$m^2 \cdot s^{-1}$
Gallium	$1,8 \cdot 10^{-5}$	$m^2 \cdot s^{-1}$
Air	$2,2 \cdot 10^{-5}$	$m^2 \cdot s^{-1}$
Plomb	$2,4 \cdot 10^{-5}$	$m^2 \cdot s^{-1}$
Cuivre	$1,1 \cdot 10^{-4}$	$m^2 \cdot s^{-1}$
Sodium	$1,2 \cdot 10^{-4}$	$m^2 \cdot s^{-1}$

3. C'est-à-dire les courbes qui définissent dans un diagramme espace-temps le domaine influencé par une perturbation ponctuelle de l'espace et du temps.

4. par opposition aux équations hyperboliques, où elle se propage à vitesse finie.

5. sous forme d'une décroissance exponentielle

6. ces valeurs très faibles pour l'air comme pour l'eau surprennent l'intuition. C'est que le transport thermique s'y effectue largement par convection.

Comme la température n'entre dans notre modèle que via la force d'Archimède, on décompose la température comme précédemment en un champ statique T_s , et une variation Θ

$$(1.42) \quad T = T_s + \Theta,$$

le champ de température statique vérifiant l'équation (1.41) pour $\vec{u} = \vec{0}$, il satisfait

$$(1.43) \quad \kappa \Delta T_s = -\frac{S}{\rho_0 c},$$

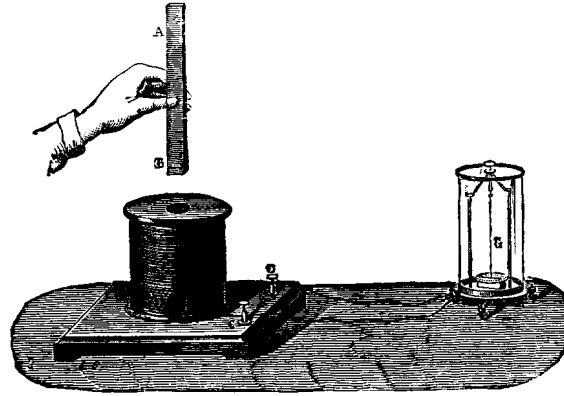
Le terme de sources volumiques S peut avoir des origines diverses par exemple la chaleur conduite le long de l'adiabat (terme source ou puit), le chauffage radioactif (considéré comme peu important dans le noyau). Nous discuterons plus en détail les différents chauffages envisageables pour les études numériques au chapitre 3.

L'équation (1.41) s'écrit alors

$$(1.44) \quad \underbrace{\frac{\partial T_s}{\partial t}}_{\stackrel{\text{def}}{=} 0} + \frac{\partial \Theta}{\partial t} = -\vec{u} \cdot \vec{\nabla} T_s - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \Theta + \kappa \Delta \Theta + \underbrace{\kappa \Delta T_s + \frac{S}{\rho_0 c}}_{\stackrel{\text{def}}{=} 0}.$$

$$(1.45) \quad \boxed{\frac{\partial \Theta}{\partial t} = -\vec{u} \cdot \vec{\nabla} T_s - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \Theta + \kappa \Delta \Theta.}$$

FIG. 1.4 – Le déplacement d'un aimant (AB) dans une bobine conductrice reliée à un galvanomètre (G) crée un courant induit mesuré par l'aiguille du galvanomètre pendant tout le temps que dure le mouvement de l'aimant [I.2].



— Induction par les aimants.

1.1.3 Equation de l'induction

H: On suppose le conducteur linéaire isotrope et homogène.

On se place dans l'approximation des états quasi-stationnaires ($\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{0}$).

On néglige les phénomènes d'aimantation ($\vec{M} = \vec{0}$, ou encore $\mu = \mu_0$) car la température du noyau terrestre est largement supérieure à la température de Curie du fer.

Les équations de *Maxwell* dans la matière s'écrivent (voir Pérez et al. 1996)

$$(1.46) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_q,$$

$$(1.47) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0,$$

$$(1.48) \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$(1.49) \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

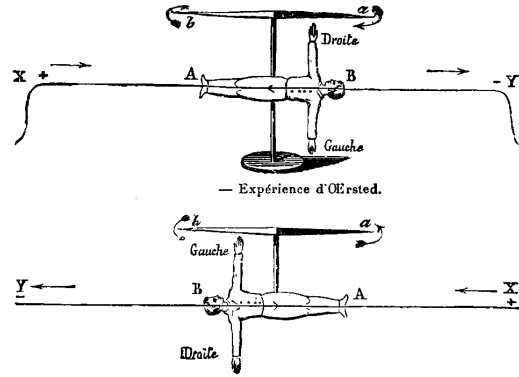
La première équation de ce système exprime (à l'aide de la formule de *Green*) que l'induction électrique créée par une charge ponctuelle décroît avec le carré de la distance, et qu'en l'absence de charge sa divergence est nulle (ρ_q représente la distribution de charge).

La deuxième est l'équivalent magnétique de la première, en cela qu'elle traduit l'absence de charges magnétiques.⁷

La troisième équation exprime la création d'un champ électrique induit par les variations d'induction magnétique (expérience de la spire soumise à un champ magnétique variant avec le temps, cf. figure 1.4).

⁷. au moins, qu'on n'en rencontre pas lors des expériences usuelles.

FIG. 1.5 – Oersted, physicien danois, proposa en 1820 une expérience qui met en évidence les lignes de force de l'induction magnétique associées à un courant électrique à l'aide d'une boussole. On montre que lorsqu'on fait agir un courant sur un aimant, l'aimant se met "en croix" avec le courant, et que son orientation dépend de la direction du courant. La direction est indiquée ici par le "petit bonhomme d'Ampère" [I.2].



La quatrième enfin exprime l'induction de champ magnétique par un courant (cf. figure 1.5 expérience d'Oersted).

Pour fermer ce système d'équations il faut introduire des équations constitutives (phénoménologiques) liant \vec{H} à \vec{B} , \vec{D} à \vec{E} , et \vec{j} à \vec{E} .

Si l'on pose que le comportement du milieu est linéaire, on peut écrire pour un milieu au repos⁸

$$(1.50) \quad \vec{D} = \underline{\underline{\varepsilon}} \vec{E},$$

$$(1.51) \quad \vec{B} = \underline{\underline{\mu}} \vec{H},$$

$$(1.52) \quad \vec{j} = \underline{\underline{\sigma}} \vec{E}.$$

Si l'on pose à présent que le milieu est isotrope, les tenseurs $\underline{\underline{\mu}}$, $\underline{\underline{\varepsilon}}$, $\underline{\underline{\sigma}}$ peuvent être remplacés par leurs homologues scalaires

$$(1.53) \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E},$$

$$(1.54) \quad \vec{B} = \mu \vec{H},$$

$$(1.55) \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}.$$

Aux échelles de temps qui seront les nôtres, on peut négliger les phénomènes propagatifs ($\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{0}$). Notre système d'équations est donc

$$(1.56) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0,$$

$$(1.57) \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$(1.58) \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{j},$$

$$(1.59) \quad \vec{B} = \mu \vec{H},$$

$$(1.60) \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}.$$

8. plus généralement : pour un milieu en mouvement, dans le référentiel lié au mouvement.

Il faut à présent exprimer ces relations pour un milieu animé d'une vitesse \vec{u} , dans un référentiel au repos⁹

$$(1.61) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0,$$

$$(1.62) \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$(1.63) \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{j},$$

$$(1.64) \quad \vec{B} = \mu \vec{H},$$

$$(1.65) \quad \vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B}).$$

Sans la justifier parfaitement (une démonstration rigoureuse fait appel à la relativité), cette modification se comprend si l'on revient à l'expérience de variation de l'induction magnétique à travers une spire. Supposons un champ magnétique qui ne varie pas avec le temps, mais seulement avec l'espace, et déplaçons une spire avec une vitesse \vec{u} , le flux à travers la spire va néanmoins varier avec le temps, entraînant l'apparition d'un courant induit. Dans le référentiel de la spire les équations sont celles du système (1.56) à (1.60) et l'équation (1.57) rend compte de ce phénomène. Dans un référentiel au repos, il faut également rendre compte de ce phénomène; comme les équations de Maxwell sont valables dans n'importe quel référentiel, ce sont les relations constitutives (la loi d'Ohm) qui sont modifiées en posant

$$(1.66) \quad \vec{E}' = \vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B},$$

on comprend alors la modification de (1.60) en (1.65).

Le noyau liquide terrestre étant au dessus de la température de Curie¹⁰ du fer, les phénomènes d'aimantation se limitent à l'aimantation diamagnétique, que l'on peut négliger. Négliger l'aimantation d'un matériau linéaire isotrope, c'est approcher μ par μ_0 , perméabilité magnétique du vide.

Partant de la loi d'Ohm (1.65), et en utilisant l'équation d'Ampère, $\mu_0 \vec{j} = \vec{\nabla} \wedge \vec{B}$, qui découle de (1.63) et (1.64), on peut écrire

$$(1.67) \quad \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = \sigma (\vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B}).$$

En prenant le rotationnel de cette équation, et en utilisant l'homogénéité du fluide (pour $\vec{\nabla} \cdot \mu_0 = \vec{0}$), ainsi que la loi de Gauss (1.61), on obtient

$$(1.68) \quad -\frac{1}{\mu_0} (\Delta \vec{B}) = \sigma (\vec{\nabla} \wedge \vec{E} + \vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{B})).$$

9. On se place dans le cadre de la mécanique classique, puisque $\|\vec{u}\| \ll c^2$.

10. température au delà de laquelle l'aimantation ferromagnétique disparaît, i.e. l'aimantation du milieu disparaît quand on coupe l'induction magnétique.

L'équation de *Faraday* (1.62), donne alors

$$(1.69) \quad -\frac{1}{\sigma\mu_0} (\Delta\vec{B}) = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{B}),$$

d'où l'équation d'induction, en posant $\eta = \frac{1}{\sigma\mu_0}$,

$$(1.70) \quad \boxed{\begin{cases} \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} &= \vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{B}) + \eta\Delta\vec{B} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0. \end{cases}}$$

On donne ici, comme pour les coefficients de diffusivité des équations précédentes un tableau pour se fixer les idées. Il est important de noter toutefois que si les valeurs de conductivité ont un sens en elles mêmes, celles de la “diffusivité magnétique” ne sont données qu'à titre de comparaison avec le noyau (C.R.C. 1994):¹¹

	conductivité		diffusivité magnétique	
Cuivre	$5,9 \cdot 10^7$	$\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$	$1,3 \cdot 10^{-2}$	$m^2 \cdot s^{-1}$
Aluminium	$3,5 \cdot 10^7$	$\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$	$2,3 \cdot 10^{-2}$	$m^2 \cdot s^{-1}$
Fer ⁽¹⁾	$1,1 \cdot 10^7$	$\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$	$7,2 \cdot 10^{-2}$	$m^2 \cdot s^{-1}$
Etain	$8,7 \cdot 10^6$	$\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$	$9,1 \cdot 10^{-2}$	$m^2 \cdot s^{-1}$
Sodium ⁽²⁾	$7,9 \cdot 10^6$	$\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$	0,1	$m^2 \cdot s^{-1}$
Plomb	$5 \cdot 10^6$	$\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$	0,2	$m^2 \cdot s^{-1}$
Gallium ⁽²⁾	$2,6 \cdot 10^6$	$\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$	0,3	$m^2 \cdot s^{-1}$
Mercure ⁽²⁾	$1 \cdot 10^6$	$\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$	0,8	$m^2 \cdot s^{-1}$
→Noyau	$7 \cdot 10^5$	$\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$	1,1	$m^2 \cdot s^{-1}$
Germanium	0,5	$\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$	$1,6 \cdot 10^6$	$m^2 \cdot s^{-1}$
Carbone (graphite)	$5 \cdot 10^{-5}$	$\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$	$1,6 \cdot 10^{10}$	$m^2 \cdot s^{-1}$

(1) à 0°C.

(2) à température expérimentale (i.e. supérieure à la valeur de fusion).

Notons que, bien que le noyau soit assez bon conducteur électrique, les effets de résistivité entraînent une diffusivité magnétique importante (de l'ordre de 10^6 fois la viscosité cinématique et 10^5 fois la diffusivité thermique). C'est la raison pour laquelle on pense que le champ magnétique de la terre est de grande échelle même à la surface du noyau, alors que l'écoulement qui le crée peut inclure de petites échelles (à titre indicatif, la couche d'Ekman dans le noyau aurait environ un mètre d'épaisseur).

11. L'approximation $\mu = \mu_0$ étant justifié par la température élevée.

1.2 Conditions aux limites

Le système d'équations obtenu s'écrit donc

$$(1.71) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\vec{u} \cdot \nabla \vec{u} - \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} \pi + \nu \Delta \vec{u} - 2\Omega (\vec{e}_z \wedge \vec{u}) \\ \quad + \frac{1}{\mu_0 \rho_0} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B} + \alpha \theta g \vec{r}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, \\ \frac{\partial \Theta}{\partial t} = -\vec{u} \cdot \vec{\nabla} T_s - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \Theta + \kappa \Delta \Theta, \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{B}) + \eta \Delta \vec{B}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \end{array} \right.$$

Il convient d'y ajouter des conditions aux limites pour pouvoir en proposer une solution.

1.2.1 Conditions cinématiques

Pour l'équation de vitesse, la condition naturelle est d'imposer le déplacement nul aux limites (condition de Dirichlet). On pose donc

$$(1.72) \quad \begin{array}{l} \vec{u}(r_i, \theta, \phi) = \vec{0} \quad \forall \theta, \phi, \\ \vec{u}(r_e, \theta, \phi) = \vec{0} \quad \forall \theta, \phi. \end{array}$$

Certains auteurs préfèrent utiliser une condition de contrainte nulle, ou sans frottements, aux frontières du système. Ce choix n'a pas de justification physique dans le cas de l'étude du noyau terrestre, mais a pour effet de supprimer les couches d'Ekman. Ce qui rend la résolution numérique beaucoup plus facile. La justification généralement invoquée (Zhang et Busse 1987, Kuang et Bloxham 1997, ...) est que dans la limite des petites viscosités (significative pour le noyau) la solution dans l'écoulement principal (i.e. hors couches limites) serait la même dans les deux cas. Cette proposition n'a jamais été démontrée de manière générale, il n'existe qu'une démonstration linéaire pour un mode de convection non réalisé, qui serait confiné près de l'axe de rotation (Roberts, 1965). Peut-être s'applique-t-elle plus généralement.

On pose alors la non-pénétration et la contrainte horizontale nulle

$$(1.73) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_r = 0, \\ \sigma_{r\theta} = 0, \\ \sigma_{r\phi} = 0, \end{array} \right.$$

qui est équivalent pour un fluide newtonien à

$$(1.74) \quad \begin{cases} u_r = 0, \\ \varepsilon_{r\theta} = 0, \\ \varepsilon_{r\phi} = 0, \end{cases}$$

ou encore

$$(1.75) \quad \begin{cases} u_r = 0, \\ \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{2r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} = 0, \\ \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \frac{u_\phi}{r} + \frac{1}{2r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} = 0. \end{cases}$$

1.2.2 Conditions thermiques

Les conditions aux limites pour la température peuvent consister à maintenir la température des parois constante, ce qui s'écrit pour la perturbation Θ

$$(1.76) \quad \Theta = 0.$$

Ou bien à imposer un flux de chaleur, ce qui en vertu de la loi de Fourier, implique pour Θ

$$(1.77) \quad \frac{\partial \Theta}{\partial r} = 0.$$

1.2.3 Conditions magnétiques

L'induction magnétique diffuse dans la graine, qui est un conducteur. Celle-ci ne constitue donc pas une limite pour l'induction. L'équation d'induction devra être intégrée jusqu'au centre du modèle. A la frontière avec le manteau, en revanche, le milieu est supposé isolant électriquement,

$$(1.78) \quad \vec{j}(r > r_e, \theta, \phi) = \vec{\nabla} \wedge \vec{B}(r > r_e, \theta, \phi) = \vec{0}.$$

Cela implique que le champ magnétique à l'extérieur du noyau (volume simplement connecté) dérive d'un potentiel scalaire

$$(1.79) \quad \begin{cases} \vec{B} = -\vec{\nabla} \Phi, \\ \Delta \Phi = 0. \end{cases}$$

Bibliographie

- Stanislas **Braginsky** et Paul Roberts, 1995
Equations governing core convection and the geodynamo
Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics, **79**, p. 1–97.
- Philippe **Cardin** et Peter Olson, 1992
An experimental approach to thermochemical convection in the Earth's core
Geophysical Research Letters, **19**, 20, 1995–1998.
- Patrick **Chassaing**, 1997
Mécanique des fluides
Cépaduès-Éditions.
- C.R.C., Hand Book of Chemistry and Physics, 1974, 1994
Ed. David Lide
C.R.C. Press.
- Jacques **Dautray** et Jacques-Louis Lions, 1984
Analyse mathématique et calcul numérique, vol. 1
Masson.
- Charles **Fabry**, 1942
Propagation de la Chaleur
Librairie Armand Colin.
- John **Jacobs**, 1987
Geomagnetism, vol. 2
Academic Press, London.
- Weijia **Kuang** et Jeremy Bloxham, 1997
An Earth-like numerical dynamo model
Nature, **389**, p. 371–374.
- Jean-Louis **Le Mouél**, Jean-Paul Poirier, et M. Assoumani, 1994
Sur le refroidissement du noyau terrestre
C.R.Acad.Sci. Paris, **319**, 1497-1501.
- Stéphane **Labrosse**, 1997
Contribution à l'étude du refroidissement de la Terre
Thèse, Université Paris 7.
- Jean-Louis **Le Mouél**, 1976
L'origine du champ magnétique terrestre
dans *Traité de Géophysique Interne, tome II*

Jean Coulomb et Georges Jobert
Masson, Paris.

W. Malkus, 1994
Energy Sources for Planetary Dynamos
dans *Lectures on Solar and Planetary Dynamos*
(M. Proctor et A. Gilbert)
Publications of the Newton Institute
Cambridge University Press.

Jacques Padet, 1991
Fluides en écoulement
Masson, Paris.

Jean-Paul Poirier, 1991
Les profondeurs de la terre
Masson, Paris.

Jean-Paul Poirier, 1994
Physical properties of the Earth's core
C.R.Acad.Sci. Paris, **318**, 341–350.

José-Philippe Pérez, Robert Carles et Robert Fleckinger, 1990, 1996
Electromagnétisme
Masson, Paris.

Joseph Plateau, 1873
*Statique expérimentale et théorique des liquides
soumis aux seules forces moléculaires.*
Gauthier-Villars, Paris.

Paul Roberts, 1965
On the thermal instability of a highly rotating fluid sphere
Astrophys. Journal, **141**, 240-250.

John Shercliff, 1972
*Illustrated Experiments in Fluid Mechanics,
Magnetohydrodynamics,*
MIT Press, Cambridge, U.S.A.

John Verhoogen, 1980
Energetics of the Earth,
National Academy of Science, Washington.

Keke Zhang et Friedrich Busse, 1987
On the onset of convection in rotating spherical shells
Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics, **39**, p. 119–147.

Illustrations

- [I.1] COURS DE COSMOGRAPHIE pour la classe de mathématiques,
par une réunion de professeurs,
Librairie Générale (Paris), 1927.
- [I.2] NOUVEAU DICTIONNAIRE DES SCIENCES ET DE LEURS APPLICATIONS,
par Paul Poiré,
Librairie Delagrave (Paris), 1900.