

Remerciements

Une thèse se doit d'être signée par son auteur ; cependant chacun est bien conscient qu'il n'a pas effectué ce travail en solitaire. C'est pour cela que sont faits les *remerciements*.

Je voudrais profiter de cette opportunité pour dire à quel point la chance (?), ou au moins les autres, sont pour beaucoup, non seulement dans ce travail, mais aussi plus généralement dans mon choix pour la recherche.

Mon premier contact avec la recherche, j'ai eu la chance de l'avoir à 17 ans. A cet époque, les mathématiques représentent (en tout cas pour moi) *l'art de se passionner pour un système de N équations à N inconnues*, et la physique se résume en *l'étude du glissement d'une savonnette sur un plan incliné*. Est-il besoin de préciser qu'un "prof" de l'une de ces deux disciplines est alors essentiellement un individu inquiétant dont le stock de problèmes barbares et in-intéressants paraît illimité. C'est dans ce décor pour le moins classique que mon père me propose d'aller, un soir que nous étions seuls à Paris, dîner au restaurant avec un de ses amis "prof de math" (en fait professeur à l'université de Strasbourg). J'accepte finalement en traînant la patte et sans grand enthousiasme. C'est ainsi que j'ai fait la connaissance de Claude Godbillon. Quelle surprise ! La première chose qui m'a frappé, c'est qu'il était pétillant et drôle (le dîner a commencé par la description de l'art du transport d'un munster "bien fait" dans un attaché-case). La seconde révélation, c'est que ce qu'il faisait avait l'air de le passionner. Il m'a décrit les problèmes de topologie liés aux retournements du disque, de la sphère, du tore, puis comment un mathématicien aveugle fut le premier à "voir" en trois dimensions le retournement de la sphère ! A la fin du repas la nappe en papier du restaurant chinois était recouverte de sphères, tores et autres objets, et j'avais le cerveau en ébullition ! Claude Godbillon est hélas décédé quelque deux ans plus tard, je garderai longtemps le souvenir de sa rencontre. C'est sans doute suite à ce dîner (il s'en faut parfois de peu) que j'ai continué dans la voie des mathématiques, m'orientant vers les mathématiques appliquées pour lesquelles j'avais le plus d'attrance.

J'aurais vraisemblablement fini par appliquer cette science à toutes sortes de problèmes d'origine industrielle si je n'avais pas subi un deuxième choc (le mot n'est pas trop fort) en rencontrant Vincent Courtillot. Cela s'est encore passé dans un petit restaurant, et cette fois la nappe en papier s'est retrouvée bariolée de coupes du manteau et du noyau terrestre, de panaches et points chauds, de plaques en mouvement, de séries stratigraphiques et de trappes apocalyptiques (je crois me souvenir qu'il a fallu deux nappes). Les sciences de la terre décrites par Vincent Courtillot ont tout pour faire rêver. Une discipline en pleine expansion où la science progresse vite, et où de nombreuses questions restent ouvertes. Il ne lui aura pas fallu beaucoup de temps pour me donner l'envie d'aller voir ça de plus près, sa passion sur ces sujets est telle qu'elle ne peut être que contagieuse !

Les rencontres suivantes sont venues renforcer cette certitude désormais ac-

quise que je voulais faire de la recherche. Je n'étais plus surpris de rencontrer des personnes passionnées et passionnantes (le contraire m'aurait davantage étonné). Il y eu d'abord Albert Tarantola, qui a guidé mes premiers pas en géophysique et à qui je dois mon premier article scientifique. Puis Claude Basdevant qui m'a initié à la mécanique des fluides et m'a présenté Peter Frick avec lequel j'ai écrit un deuxième papier.

Enfin, nous arrivons dans le vif du sujet : la thèse. C'est à Jean-Louis Le Mouél que je dois ce superbe sujet de thèse et ma rencontre avec Dominique Jault, qui a dirigé ce travail. Je lui en suis très reconnaissant. Quelle chance de tomber dans une équipe pareille ! Trois jeunes chercheurs : Dominique Jault, Philippe Cardin, et Henri-Claude Nataf ; différents et complémentaires, qui s'entendent si bien qu'ils décident de fonder ensemble une équipe à Grenoble. Je ne peux m'empêcher de penser que j'ai été là "au bon endroit, et au bon moment" ! Leur projet est ambitieux, et excitant. Je leur souhaite bonne chance pour leur équipée grenobloise et espère que j'aurai l'occasion de continuer à travailler avec eux. Dominique a toujours été d'une disponibilité extrême, m'a appris énormément de choses¹ et a fait preuve d'une grande patience face à mes questions parfois déroutantes. Philippe n'a jamais non plus compté son temps lorsqu'il s'agissait de m'aider. Il m'a souvent donné l'impression d'un *Bulldozer* fonçant sur un obstacle : rien ne semble pouvoir ébranler son optimisme, et je n'échangerai pas ma place avec l'obstacle en question.

I am very grateful to Professor Andrew Soward for the helpful discussions we have had in Uppsala, during the IAGA-97 meeting, as well as for his kind interest in my work.

Je souhaite remercier également Yann Brenier, Claude Jaupart, et Christophe Sotin de me faire l'honneur d'être membres de mon jury.

Pendant ces trois années de thèse, j'ai été moniteur au département de mathématiques du Palais de la Découverte. Je voudrais remercier Jean Brette qui a guidé mes premiers pas dans le domaine de la "divulgation scientifique", mais qui a aussi considérablement enrichi ma culture mathématique au cours des nombreuses et passionnantes conversations que nous avons pu avoir.

Il y a aussi de nombreux problèmes techniques (\LaTeX , A.V.S.) qui se posent au cours du travail, on y perdrait facilement une journée ou plus. Geneviève Moguilny (C.N.C.P.S.T.) et Thierry Goldmann (I.D.R.I.S.) sont passés maître dans l'art de les résoudre en quelques minutes.

Je souhaite aussi remercier tous ceux (thésards, post-docs, chercheurs) en compagnie de qui j'ai passé ces trois années au laboratoire de géomagnétisme de l'IPGP, en particulier Pascale, Lionel, et Marianne avec qui j'ai partagé un bureau.

Je voudrais également adresser un grand merci à Jacqueline Wermelinger,

1. dont l'art de dévaler un 3000m sous la grêle, le mode de cuisson du Baeckhoff, et une excellente recette de mousse au chocolat.

secrétaire du laboratoire, qui fait un travail formidable, et surtout qui ne fait aucune différence entre les requêtes d'un thésard et celles d'un chercheur. J'ai toujours pu compter sur son aide, et cela m'a été plus d'une fois très utile.

Merci à Tutti qui m'a prêté pendant une semaine les clefs de sa maison provinciale, pour me permettre d'avancer la rédaction de cette thèse au calme (et au vert).

Pendant ces trois années, le moral subit (et c'est normal) des hauts et des bas. Heureusement qu'il y a les copains : Sam, Tim, Jul, Tof et Dima avec lesquels je partage les bons moments, mais qui savent aussi supporter mon sale caractère. J'ai aussi pu compter sur le soutien de mes parents et de mon frère Ben. Je voudrais adresser un remerciement tout particulier à Marine, dont le soutien et la patience ont été sans failles, tout particulièrement pendant les derniers mois.

Mon dernier mot sera, vous vous en doutez, pour les nappes en papier des petits restaurants de quartier, sans lesquelles rien de tout cela n'aurait sans doute eu lieu !

Summary

I rapidly recall the history of the knowledge of the Earth's magnetic field, from the magnetic compass to the observatories and paleomagnetic studies. I also briefly present the knowledge we have of the Earth's interior (through seismologic studies, geochemistry, and high pressure physics). Then I introduce the very basic ideas of dynamo theory, and admit that it is the only theory that can agree with observational constraints.

I will try, in the following work, to investigate whether numerical modeling can, or cannot, improve our understanding of the source of the Earth's magnetic field. I will focus on numerical difficulties associated with this problem, and try to defend the idea that, if performed in close interaction with theoretical and experimental studies, numerical modeling can indeed guide our understanding.

Introduction

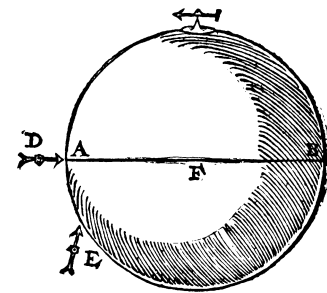


Le champ magnétique terrestre est connu des hommes depuis fort longtemps. Les plus anciens textes retrouvés qui font référence à la boussole sont chinois et remontent au premier siècle de notre ère. Mais l'explication du phénomène restera longtemps mystérieuse, puisque l'on pense encore au XIII^e siècle que la boussole pourrait pointer vers l'étoile polaire. L'idée que l'orientation de la boussole est liée à la Terre elle-même, est mentionnée pour la première fois par le Dr. William Gilbert (médecin de la reine Elisabeth I^{re} d'Angleterre). En 1600, il compare dans son *De Magnete* la Terre à un "énorme aimant" proposant ainsi le premier modèle de génération du champ magnétique terrestre (*c.f.* figure 0.1).

La démonstration que l'essentiel du champ magnétique est bien d'origine interne vient bien plus tard, elle est faite par Carl Friedrich Gauss en 1839. Gauss invente les "Harmoniques Sphériques" pour décrire le champ (nous utiliserons ces mêmes harmoniques dans cette thèse), et déduit de son potentiel l'origine interne du champ. La question de son origine reste cependant encore entière.

Revenons au XVII^e siècle, Henry Gellibrand, professeur d'Astronomie au Gresham College à Londres, publie en 1634 une découverte étonnante. Reprenant les mesures du champ faites par ses deux prédécesseurs William Borough (1580) et Edmund Gunter (1622) en lesquels il avait grande confiance, il constate une

FIG. 0.1 - *Champ magnétique associé à un aimant dipolaire sphérique ("terrella") et à la Terre (De Magnete, William Gilbert, 1600).*



variation dans le temps du champ au même lieu, de plus de 7° .

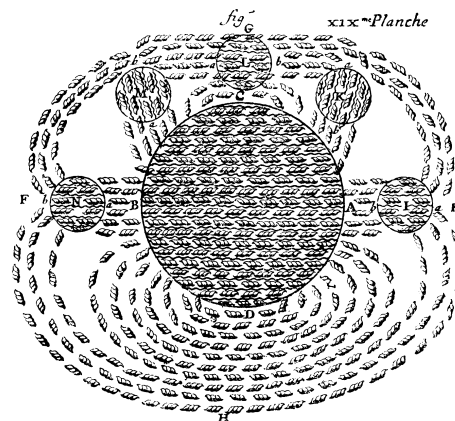
« For it is the Assertion of Mr.Dr.Gilberts. “Variatio unicuiq; Loci constans est”, that is to say, the same place doth alwayes retaine the same variation. Neither hath this Assertion (for ought I ever heard) been questiond by any man. But most diligent magneticall observations have plainly offred violence to the same, and proved the contrary, namely that the variation is accompanied with a variation. »

Henry Gellibrand,
*A discourse Mathematicall
 on the variation of the Needle,*
 (cité d’après P.Radelet).

Cette variation lente du champ (par opposition aux variations rapides et quasi périodiques d’origine externe), s’appellera plus tard “variation séculaire”. Cette observation surprenante paraît difficilement conciliable avec l’hypothèse d’un aimant permanent bien ancré à l’intérieur de la planète...

Descartes reprend pourtant, en 1644, dans les *Principia* (Part IV, § 133 à 183) l’aimantation permanente proposée par Gilbert, et tente d’expliquer l’évolution temporelle du champ en un même lieu par l’activité des hommes qui “tirent continuellement du fer de certains endroits de la Terre, et le transportent en d’autres”, conjugué au fait qu’ “il y a eu autrefois des mines de fer en des lieux où il n’y en a plus, pource qu’elles s’y font corrompuës avec le temps”. Il propose également une interprétation assez singulière du magnétisme à base de “parties canelées” (qui sont les petites “viroles” de la figure 0.2, et qui marquent ce que l’on appellerait sans doute les lignes de force du champ) et de “pores” dont certains corps sont pourvus, comme l’intérieur de la Terre, et les aimants (qui sont les petits cercles périphériques sur la figure 0.2).

FIG. 0.2 – *Modèle de l’aimant pour expliquer le magnétisme terrestre, repris par Descartes dans les Principia, avec une interprétation des phénomènes magnétiques sous forme de “parties canelées” et de “pores”.*



Au début du XIX^e siècle, André-Marie Ampère propose un modèle différent

pour expliquer le magnétisme terrestre, le champ magnétique de la Terre serait dû à des courants électriques qui y circulent :

« La première réflexion que je fis lorsque je voulus chercher les causes des nouveaux phénomènes découverts par M.Ørsted, est que l'ordre dans lequel on a découvert deux faits ne faisant rien aux conséquences des analogies qu'ils présentent, nous pouvions supposer qu'avant de savoir que l'aiguille aimantée prend une direction constante du sud au nord, on avait d'abord connu la propriété qu'elle a d'être amenée par un courant électrique dans une situation perpendiculaire à ce courant, de manière qu'un même pôle de l'aiguille fût toujours porté à gauche du courant, et qu'on découvrit ensuite la propriété qu'elle a de tourner constamment au nord celui de ses pôles qui se portait ainsi à gauche du courant : l'idée la plus simple et celle qui se présenterait immédiatement à celui qui voudrait expliquer cette direction constante de l'aiguille, ne serait-elle pas d'admettre dans la terre un courant électrique, dans une direction telle, que le nord se trouvât à gauche d'un homme qui, couché sur sa surface pour avoir la face tournée du côté de l'aiguille, recevrait ce courant dans la direction de ses pieds à la tête, et d'en conclure qu'il a lieu, de l'est à l'ouest, dans une direction perpendiculaire au méridien magnétique? »

André-Marie Ampère,
Mémoires, (cité d'après G.Laurent).

Ampère envisage alors une pile chimique comme source des courants. En 1831, Michael Faraday s'intéresse également au problème de l'origine électrique possible du champ géomagnétique, et envisage des courants induits par la rotation de la Terre (repris dans *Experimental researches in electricity*).

La même année, Peter Barlow vérifie expérimentalement que l'existence de courants électriques dans la Terre peut expliquer les observations. Le modèle de Barlow consiste en une sphère en bois, de "16 pouces" de diamètre (environ 40 cm), dans laquelle il grave des rainures à l'équateur et des parallèles tous les 4 degrés, ainsi qu'une rainure verticale d'un pôle à l'autre. Il enroule autour d'elle un fil de cuivre de 90 pieds (environ 27 mètres), en passant de parallèle en parallèle. Une fois parcouru par un courant, son modèle reproduit si bien l'orientation de la boussole (déclinaison et inclinaison) qu'il y dessine, pour plus de réalisme, des

continents. Il conclut sur l'origine électrique probable du magnétisme terrestre :

« Nothing can be expected nor desired to represent more exactly on so small a scale all the phenomena of terrestrial magnetism, than does this artificial globe (...) I may therefore, I trust, be allowed to say, that I have proved the existence of a force competent to produce all the phenomena of terrestrial magnetism, without the aid of any body usually called magnetic »

Peter Barlow,
Philosophical Transaction.

Le problème de l'origine de ces courants reste cependant entier, Barlow envisage un effet thermo-électrique. Aucune réponse définitive n'est apportée à la question de l'origine des courants. Arago écrit "Il faut donc se résigner, à l'époque actuelle, à réunir les mesures qui serviront de bases aux recherches de nos successeurs". Qu'en est il donc des mesures du champ? On sait depuis le XV^e siècle que la boussole n'indique pas tout à fait le nord, mais forme avec sa direction un angle appelé déclinaison magnétique. Robert Norman observe au XVI^e siècle que l'aiguille n'est pas non plus parfaitement horizontale². Lors de la fabrication de boussoles, il remarque que si ses aiguilles sont bien équilibrées avant d'être magnétisées, il doit alourdir le pôle sud pour équilibrer l'aiguille une fois celle-ci aimantée³ :

« Having made many and divers compasses, and using alwaies to finish and end them before I touched the needle, I found continually, that after I had touched the yrons with the Stone, that presently the north point thereof would bend or Decline downwards under the Horizon in some quantitie : insomuch that to the Flie of the Compasse, which before was made equall, I was still constrained to put some small pece of waxe in the South part thereof, counterpoise this Declining, and to make it equall againe. »

Robert Norman,
The Newe Attractive,
(cité d'après P.Radelet).

Il démontre ensuite l'existence de l'inclinaison à l'aide d'une expérience consistant à maintenir une aiguille aimantée en suspension dans un liquide (voir figure 0.3).

La troisième composante du champ magnétique, l'intensité, est sans doute la plus difficile à mesurer. Les premières mesures sont faites, par analogie avec la

2. La première observation de l'inclinaison magnétique est en fait à attribuer à Georg Hartmann, qui la relate dans une lettre au Duc de Prusse, mais cette information étant restée cachée, Robert Norman la re-découvre indépendamment.

3. Il travaillait à la latitude de Londres !

FIG. 0.3 – *Robert Norman démontre au XVI^e siècle l'existence de l'inclinaison magnétique à l'aide d'une aiguille aimantée en suspension dans un liquide. Il utilise un vase rempli d'eau, et une aiguille fichée dans un bouchon de liège. Avant d'être magnétisée, l'aiguille flotte à la surface. Lorsqu'on la magnétise, elle pivote, et reste en suspension dans l'eau.*

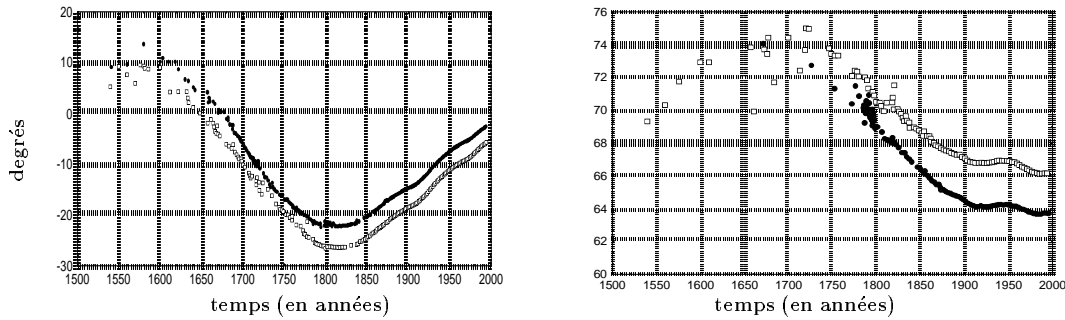
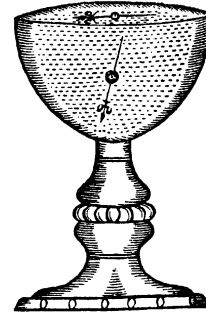


FIG. 0.4 – *Représentation de la déclinaison (à gauche) et de l'inclinaison (à droite) pour Paris et Londres depuis 1540, à partir des mesures historiques ajustées aux observatoires actuels : Chambon-la-Forêt (Paris, en symboles pleins), et Hartland (Londres, en symboles ouverts). La “variation séculaire” (lente) du champ y est très clairement visible (Alexandrescu et al., 1997).*

mesure du champ de gravité (par observation des oscillations d'un pendule), en comptant les battements d'une boussole écartée de sa position d'équilibre.

Pour mesurer de manière systématique ces composantes, Carl Friedrich Gauss a créé en 1839 à Göttingen le premier observatoire magnétique. En France, le premier observatoire est installé en 1883 au parc de Saint-Maur (transféré en 1901 près de Versailles, il est depuis 1936 à Chambon-la-forêt, voir Alexandrescu et al. 1997). On apprend beaucoup sur le champ magnétique de la Terre par son observation. Outre des variations rapides et de faibles amplitudes (d'origine externe), on décrit la variation séculaire, cette évolution lente et assez régulière du champ (voir figure 0.4). Elle peut entraîner une variation de l'intensité du champ de quelques pour-mille par an. Ces variations ont de quoi impressionner. Arago commence le chapitre de ses oeuvres consacré au magnétisme terrestre par

cet avertissement :

« Rien, dans le vaste domaine de la physique du globe, n'est plus caché, n'est plus incertain, que les causes qui en chaque lieu font varier les trois éléments du magnétisme terrestre, savoir : la déclinaison, l'inclinaison et l'intensité. »

François Arago,
Oeuvres complètes.

et James Clerk Maxwell note à la fin de son chapitre sur le magnétisme terrestre de son traité d'électricité et de magnétisme :

« When we consider that the intensity of the magnetization of the great globe of the earth is quite comparable with that which we produce with much difficulty in our steel magnets, these immense changes in so large a body force us to conclude that we are not yet acquainted with one of the most powerful agent in nature, the scene of whose activity lies in those inner depths of the earth, to the knowledge of which we have so few means of access. »

James Clerk Maxwell,
Electricity and Magnetism.

Malgré l'absence de moyens d'accès directs aux profondeurs de la Terre, des caractéristiques plus étonnantes encore du champ furent découvertes ensuite en étudiant les traces des temps anciens. A la fin du XIX^e siècle, on s'aperçoit que l'orientation de l'aimantation de certaines roches coïncide avec le champ terrestre, c'est l'aimantation rémanente naturelle, qui est à la base du paléomagnétisme et de l'archéomagnétisme. Des laves en se refroidissant ont enregistré le champ magnétique ambiant au moment de leur solidification. On peut donc envisager, en lisant convenablement ces enregistrements, d'étudier les variations du champ magnétique de la Terre sur des échelles de temps bien plus grandes que celles jusque là accessibles (par observations directes). Grâce aux études paléomagnétiques, la connaissance du champ magnétique terrestre s'accroît considérablement. On apprend que celui-ci existe depuis au moins 3,5 milliards d'années (les plus vieux enregistrements remonteraient même à 3,8 milliards d'années), et surtout, on explore ses variations sur de grandes échelles de temps.

En 1906, Bernard Brunhes découvre que certains échantillons présentent une aimantation rémanente dont la direction est opposée à celle du champ actuel ! Le champ magnétique de la Terre se serait donc inversé au cours de son histoire. L'existence de ces inversions du champ fut controversée jusque vers 1950 (voir Valet et Courtillot, 1992). Elle est à présent bien établie (voir figure 0.5).

Aucun des mécanismes envisagés jusque là pour expliquer le champ géomagnétique ne peut rendre compte d'une telle variabilité dans le temps.

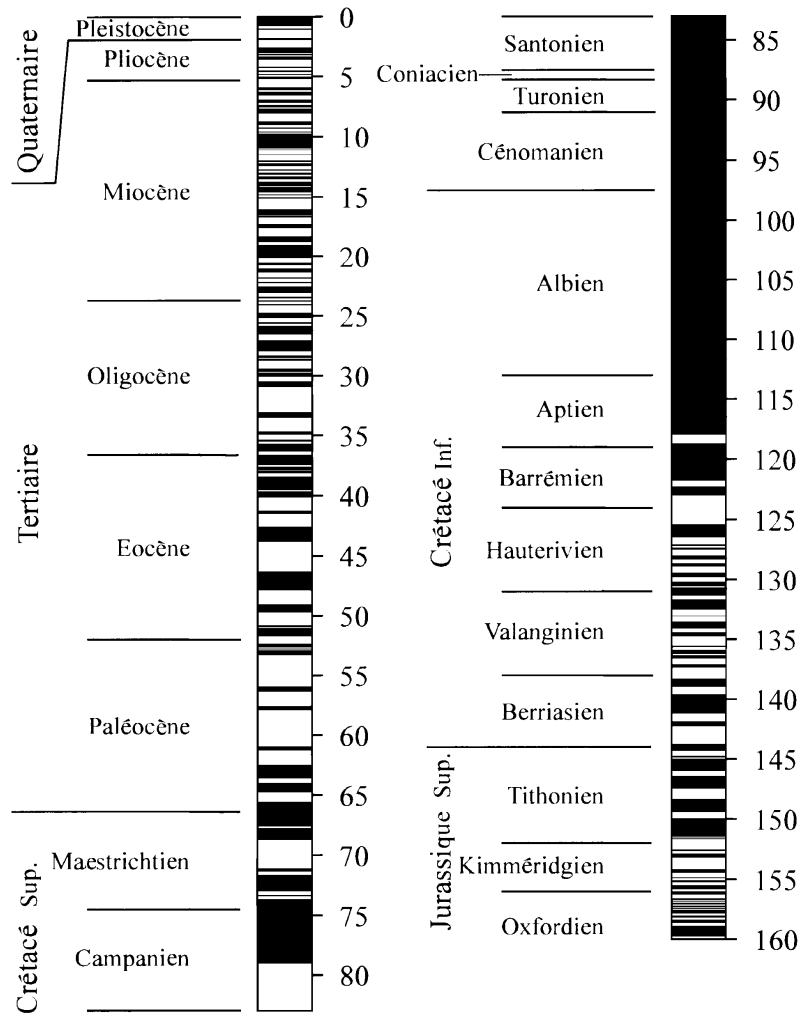


FIG. 0.5 – Polarité de la partie dipolaire axiale du champ magnétique terrestre reconstruite grâce au paléomagnétisme pour les 160 derniers millions d'années (d'après Merrill et al. 1996). En noir les périodes de champ "normal", c'est-à-dire de même direction que le champ actuel (le pôle sud magnétique près du pôle nord géographique; le pôle nord de la boussole "pointant" vers le nord géographique), en blanc les périodes inverses. Il est intéressant de noter le caractère apparemment chaotique de ces inversions. Certaines périodes se prolongent sur plus de 30 millions d'années, alors que d'autres font à peine la taille du trait sur cette figure (les plus courtes qui aient été enregistrées feraient à peine 30 000 ans).

En 1919, Sir Joseph Larmor propose trois possibilités pour expliquer le champ magnétique du soleil. A la fin de son article, il note que seule l'une d'entre elles pourrait être appliquée à la Terre, mais reste prudent, car cela nécessiterait que des régions profondes de notre planète soient fluides. Il décrit cette possibilité en ces termes :

« In the case of the sun, surface phenomena point to the existence of a residual internal circulation mainly in meridian planes. Such internal motion path around the solar axis planes. Such internal motion induces an electrical field acting on the moving matter; and if any conducting path around the solar axis happens to be open, an electrical current will flow round it, which may in turn increase the inducing magnetic field. In this way it is possible for the internal cyclic motion to act after the manner of the cycle of a self-exciting dynamo, and maintain a permanent magnetic field from insignificant beginnings, at the expense of some of the energy of the internal circulation. »

Sir Joseph Larmor,
Electrical Review.

En simplifiant quelque peu, elle peut se résumer ainsi : si l'on admet qu'un champ magnétique existe, et s'il baigne dans un fluide conducteur en mouvement, ces mouvements d'un conducteur dans un champ magnétique peuvent induire des courants. A ces courants est associé un second champ magnétique, et si celui-ci vient renforcer le champ déjà existant, on peut alors obtenir une dynamo⁴ auto-excitée.

Peu de temps après, le sismologue Beno Gutenberg montre, par l'observation des temps d'arrivée d'ondes sismiques ayant traversé la planète, que la Terre possède un noyau. Retardé par la seconde guerre mondiale, Walter Elsasser s'appuyant sur la découverte de Gutenberg, publie en 1946 un travail divisé en trois articles, reprenant et formalisant le mécanisme proposé par Larmor, jetant les bases d'une théorie dynamo dans le noyau fluide de la Terre. Cette théorie est la seule proposée qui permette de rendre compte, tant de la variation rapide des termes non dipôles du champ magnétique (variation séculaire), que des inversions de sa partie dipôle.

Elsasser sera suivi par Bullard en 1949, et bien d'autres après. Il serait certainement passionnant de pouvoir décrire l'histoire de la théorie dynamo, et de connaître les contributions des chercheurs qui l'ont développée, malheureusement cela sort du cadre de cette introduction⁵. Je me borne à rappeler deux événements d'importance. En 1934, Thomas Cowling démontre qu'un champ purement

4. Elle a ceci de commun avec la dynamo de vélo qu'elle transforme de l'énergie cinétique en énergie magnétique. Mais c'est tout ! La dynamo de vélo utilise pour cela un aimant, elle n'est pas "auto-excitée". De plus les courants y sont contraints à l'aide de bobinages, alors que le noyau dans son ensemble est un conducteur.

5. Façon à peine voilée de dire que j'en suis malheureusement encore incapable !

axisymétrique ne peut être entretenu par une action dynamo. C'est le premier théorème anti-dynamo (d'autres sont découverts par la suite). Il est de taille, car le champ de la Terre étant essentiellement dipolaire axial, il était tentant d'imaginer un modèle purement axisymétrique. On peut alors se demander s'il n'existe pas un théorème anti-dynamo général! En 1958, Herzenberg et Backus exhibent indépendamment des familles de mouvements capables de faire croître un champ magnétique, un tel théorème ne saurait donc exister. Depuis lors, la théorie dynamo étant la seule à pouvoir rendre compte des observations est très largement acceptée, elle n'a cependant jamais été démontrée.

Ce que l'on sait aujourd'hui sur l'intérieur de notre planète nous donne-t-il de nouvelles pistes?

Les progrès de la sismologie ont été rapides et considérables. En 1981, Dziewonski et Anderson proposent un modèle de Terre en couches sphériques concentriques, que l'on appelle PREM⁶, et qui sert aujourd'hui encore de référence. Ce modèle est établi à partir des observations sismologiques (ondes et modes normaux), ainsi que de la masse et du moment d'inertie terrestres. Il apporte une grande quantité d'informations sur le noyau terrestre. Il spécifie la densité, ρ , en fonction de la distance au centre de la Terre (premier graphe de la figure 0.6). On peut vérifier qu'elle varie assez peu dans le noyau, avec une légère discontinuité entre la graine et le noyau liquide. On peut en déduire, par intégration, un modèle de gravité. On montre que, pour une Terre à symétrie sphérique et homogène, la pesanteur varierait linéairement avec la distance au centre. Cela dérive de la formule de Gauss sur une sphère de rayon r ,⁷

$$(0.1) \quad \int_{S_r} \vec{g} \cdot \vec{n} dS = -4 \pi G \int_{V_r} \rho dV ,$$

où G est la constante de gravitation universelle, et \vec{n} la normale sortante à la sphère, d'où avec nos hypothèses

$$(0.2) \quad \|\vec{g}\| (4 \pi r^2) = 4 \pi G \rho \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) ,$$

$$(0.3) \quad \|\vec{g}\| = \frac{4}{3} \pi G \rho r .$$

On vérifie alors que, bien que l'hypothèse d'homogénéité soit fautive, le profil de gravité ne diffère que très peu d'un profil linéaire dans le noyau (deuxième graphe de la figure 0.6). Le modèle PREM spécifie également les vitesses des ondes P et des ondes S (non représentées ici), on peut donc construire le coefficient de compressibilité, $1/K$, (troisième graphe de la figure 0.6). On note que le noyau est très faiblement compressible (de l'ordre de 10^{-12} Pa^{-1}). On peut également

6. PREM=Preliminary Reference Earth Model

7. On note que seules les masses internes à la sphère considérée ont en définitive un effet (l'intégrale sur la sphère s'annulant pour les masses externes).

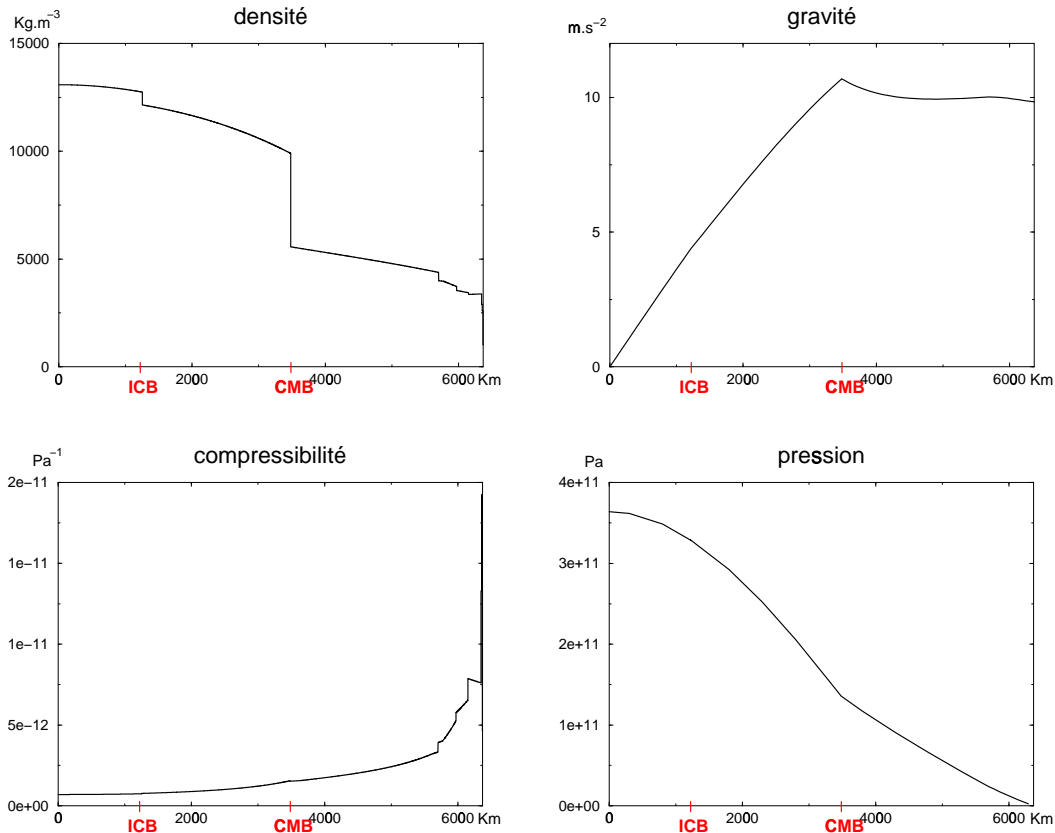


FIG. 0.6 – Le modèle de Terre PREM, à symétrie sphérique, spécifie à partir d'observations sismologiques la densité, ρ , en fonction de la distance au centre de la Terre (en haut à gauche), par intégration on construit alors un modèle de gravité, g (en haut à droite). Le modèle PREM spécifie également les vitesses des ondes P et des ondes S (non représentées ici), on peut donc construire le coefficient de compressibilité, $1/K$ (en bas à gauche). A partir de la densité et de la gravité en supposant un équilibre hydrostatique, on peut également construire un modèle de pression p (en bas à droite).

estimer un profil de pression en supposant un équilibre hydrostatique dans le noyau, on a alors

$$(0.4) \quad \vec{\nabla} P(r) = \rho(r)\vec{g}(r)$$

ce qui donne un modèle de pression hydrostatique dans la Terre (quatrième graphe de la figure 0.6). On le voit, l'approche sismologique fournit des informations très riches sur l'intérieur de la Terre.

D'autres informations importantes sont apportées par différentes branches des sciences. La géochimie aide à comprendre la composition du noyau. A partir des résultats de l'observation des météorites, on pense que le noyau terrestre est essentiellement constitué de fer mélangé à des éléments plus légers (sans doute un mélange de divers éléments: soufre, oxygène, silicium,...). Ceci est confirmé par l'observation du moment d'inertie de la planète. Les caractéristiques du fer (viscosité, conductivité électrique, conductivité thermique) aux conditions de température et de pression du noyau sont très mal connues. On les estime par extrapolation de mesures faites à des conditions moins extrêmes (mais déjà très difficiles à atteindre). La connaissance de la conductivité du noyau liquide est très importante, car elle permet d'estimer en combien de temps les courants y circulant seraient dissipés par effet Joule s'ils n'étaient pas entretenus. C'est le temps diffusif, ou constante de temps de Cowling, qui correspond au temps caractéristique de diffusion du champ dans un conducteur au repos. Si η est le coefficient de diffusion magnétique construit sur la conductivité et r le rayon du noyau, cette constante est de l'ordre de r^2/η (soit environ 100 000 ans pour la Terre). On peut calculer plus précisément cette constante dans le cas d'une sphère: $r^2/(\pi^2 \eta)$ (dans une sphère, le dipôle diffuse avec cette constante de temps, c'est le mode le plus lentement décroissant), soit environ 10 000 ans pour la Terre. Or, on l'a vu, le paléomagnétisme nous apprend que le champ magnétique de la Terre existe depuis au moins 3,5 milliards d'années. C'est un point important, car cela justifie que l'on cherche la source des courants qui sont à son origine.

On a pu reconstruire les variations du champ sur des échelles de temps diverses. L'archéomagnétisme, grâce aux enregistrements du champ dans des fours de potiers ou dans des briques (datés indépendamment par ailleurs), a permis de reconstituer l'inclinaison et la déclinaison du champ sur la période historique. Les mesures fournissent une courbe qui se raccorde avec une précision étonnante avec celles décrite par les mesures effectuées dans les observatoires (voir figure 0.7), et permettent une observation plus étendue de la variation séculaire.

La mesure du champ en plusieurs points du globe permet d'en connaître l'allure spatiale. Si l'on admet que les sources du champ géomagnétique sont bien dans le noyau (c'est-à-dire à des profondeurs supérieures à 2891 km), et si le manteau n'est pas trop conducteur de l'électricité, on peut alors prolonger le potentiel de Gauss duquel dérive le champ et en déduire le champ sortant à la frontière Noyau-Manteau (voir figure 0.8).

Il est important de noter que si la décroissance du potentiel de Gauss en

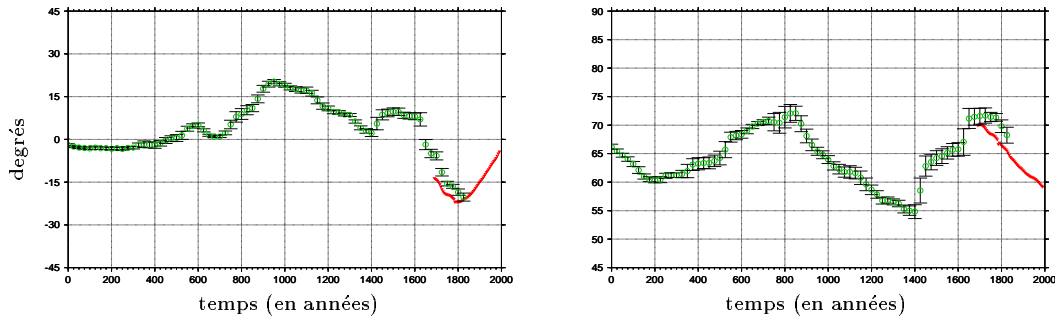


FIG. 0.7 – La déclinaison (à gauche) et l'inclinaison (à droite) du champ magnétique en France reconstruites (en vert) à partir des mesures archéomagnétiques (d'après Daly et Le Goff, 1995), et (en rouge) des mesures historiques (d'après Bloxham et Jackson, 1992). La jonction entre ces deux types de mesures est très satisfaisante, et l'on peut avoir connaissance grâce à l'archéomagnétisme des variations du champ sur une plus grande échelle de temps (courtoisie L. Hongre).

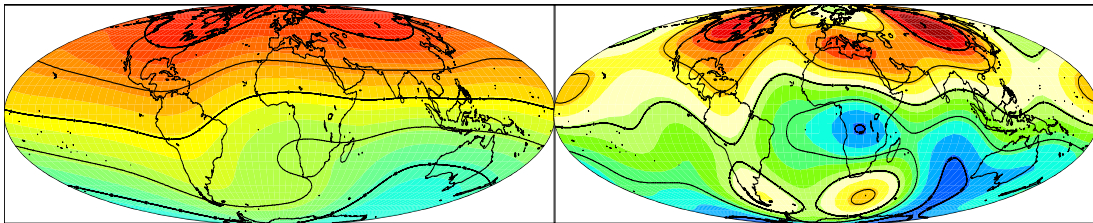


FIG. 0.8 – Modèle de champ (composante radiale) développé jusqu'au degré 6, pour 1992. À gauche à la surface de la Terre et à droite à la frontière noyau-manteau. Modèle obtenu à partir des données du satellite POGS et des données d'observatoires terrestres. Le code de couleur va de $5 \cdot 10^4$ nT (rouge) à $-5,7 \cdot 10^4$ nT (bleu) à gauche, et de $6,27 \cdot 10^5$ nT (rouge) à $-4,87 \cdot 10^5$ nT (bleu) à droite (P.Ultre Guérard, 1996).

fonction du degré de l'harmonique (en $\ell(\ell + 1)$) suffirait à expliquer qu'à la surface de la Terre (donc "loin des sources") le champ soit dominé par le dipôle, ces prolongements montrent que le champ est déjà très largement dipolaire axial à la frontière avec le noyau.

On peut également, en calculant la décomposition en harmoniques sphériques du champ, illustrer la variation séculaire du champ par sa représentation à diverses époques à l'interface noyau-manteau (figure 0.9).

Enfin, aidé d'hypothèses assurant l'unicité, on peut déduire de ces variations du champ à la surface du noyau les mouvements tangentiels qui ont pu les causer. On établit alors des cartes de mouvements à la surface du noyau⁸ (voir figure 0.10).

Notre connaissance du noyau de la Terre et du champ magnétique a donc extrêmement progressé, et pourtant, on ne sait toujours pas comment le champ induit par les mouvements du fer liquide renforce le champ principal, pourquoi le champ est de nature essentiellement dipolaire, pourquoi ce dipôle est en moyenne aligné avec l'axe de rotation de la Terre, ni pourquoi le champ varie et s'inverse...

Ces dernières années ont vu l'apparition de nombreuses études numériques ayant pour but de faire progresser notre compréhension de ces questions : modèles presque axisymétriques, modèles hyper-visqueux (Gary Glatzmaier et Paul Roberts 1995, Weijia Kuang et Jeremy Bloxham 1997), modèles hyper-visqueux à " $2 + \frac{1}{2}$ " dimensions (Graeme Sarson et al. 1997). Ces études nécessitent des calculs très ardues. Pour les simplifier, elles sont réalisées dans des régimes de paramètres très éloignés de la Terre, et sont souvent limitées à une ou deux réalisations (sans faire varier les paramètres). Cela rend leur interprétation difficile et parfois contradictoire. Les interactions nécessaires entre les indications des simulations numériques et les études théoriques et expérimentales sont naissantes dans ce domaine. Tout cela incite bien sûr à la plus grande prudence vis à vis des modèles numériques de la dynamo terrestre, et l'on est en droit de se demander si les simulations par ordinateur peuvent faire progresser notre compréhension de ce problème.

La difficulté du problème incite à la plus grande modestie quant aux objectifs de notre travail. On s'efforcera simplement de montrer dans cette thèse que, bien utilisée, et en interaction avec la théorie et l'expérience, la modélisation numérique peut, et doit, permettre de faire progresser notre compréhension des équilibres existants dans le noyau terrestre et donnant naissance au champ magnétique. Nous essaierons de montrer à travers des études de problèmes simplifiés que, pour faire progresser notre compréhension du champ magnétique terrestre à l'aide de modèles numériques, il faut s'efforcer d'approcher des caractéristiques qui font la spécificité de l'induction dans le noyau terrestre, à savoir une rotation très rapide devant les autres constantes de temps, et une diffusion du champ magnétique très

8. Réalisées sous l'hypothèse de mouvement de grande échelle, et du "flux gelé" (diffusion négligeable devant le transport).

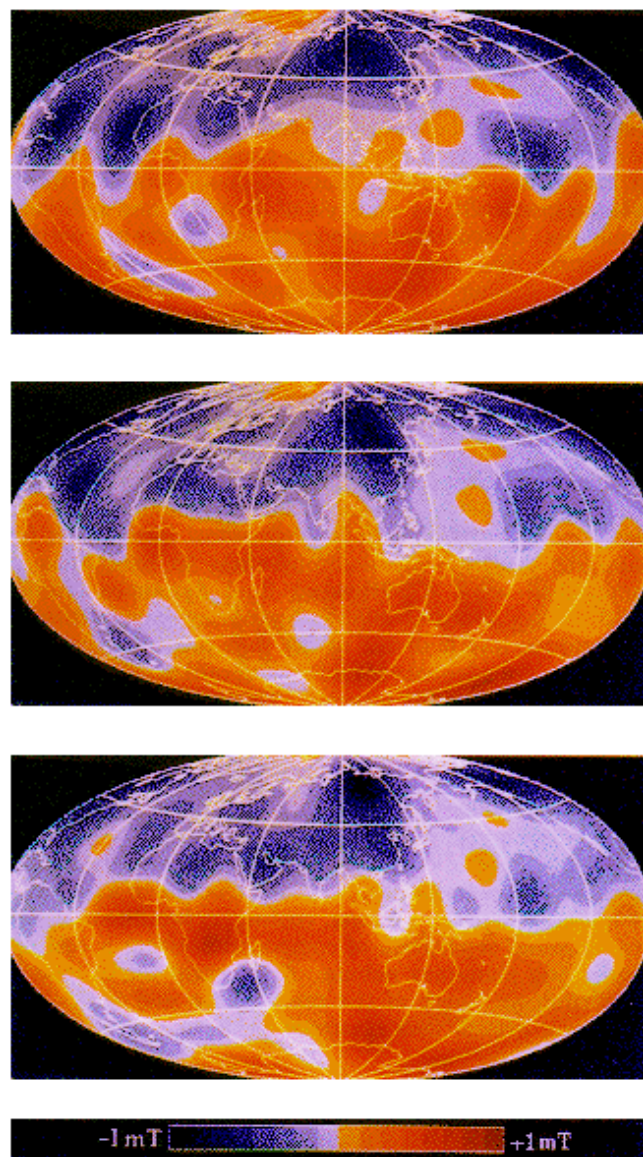


FIG. 0.9 – Composante radiale du champ magnétique à la frontière noyau-manteau, reposant sur la prolongation des mesures de surface en 1777, 1882 et 1980. Le flux magnétique s'échelonne de -1 (bleu) à +1 (orange) militesla. Le champ n'est pas un simple dipôle, mais sa structure est tout de même largement dominée par le terme dipolaire (J. Bloxham, D. Gubbins 1985).

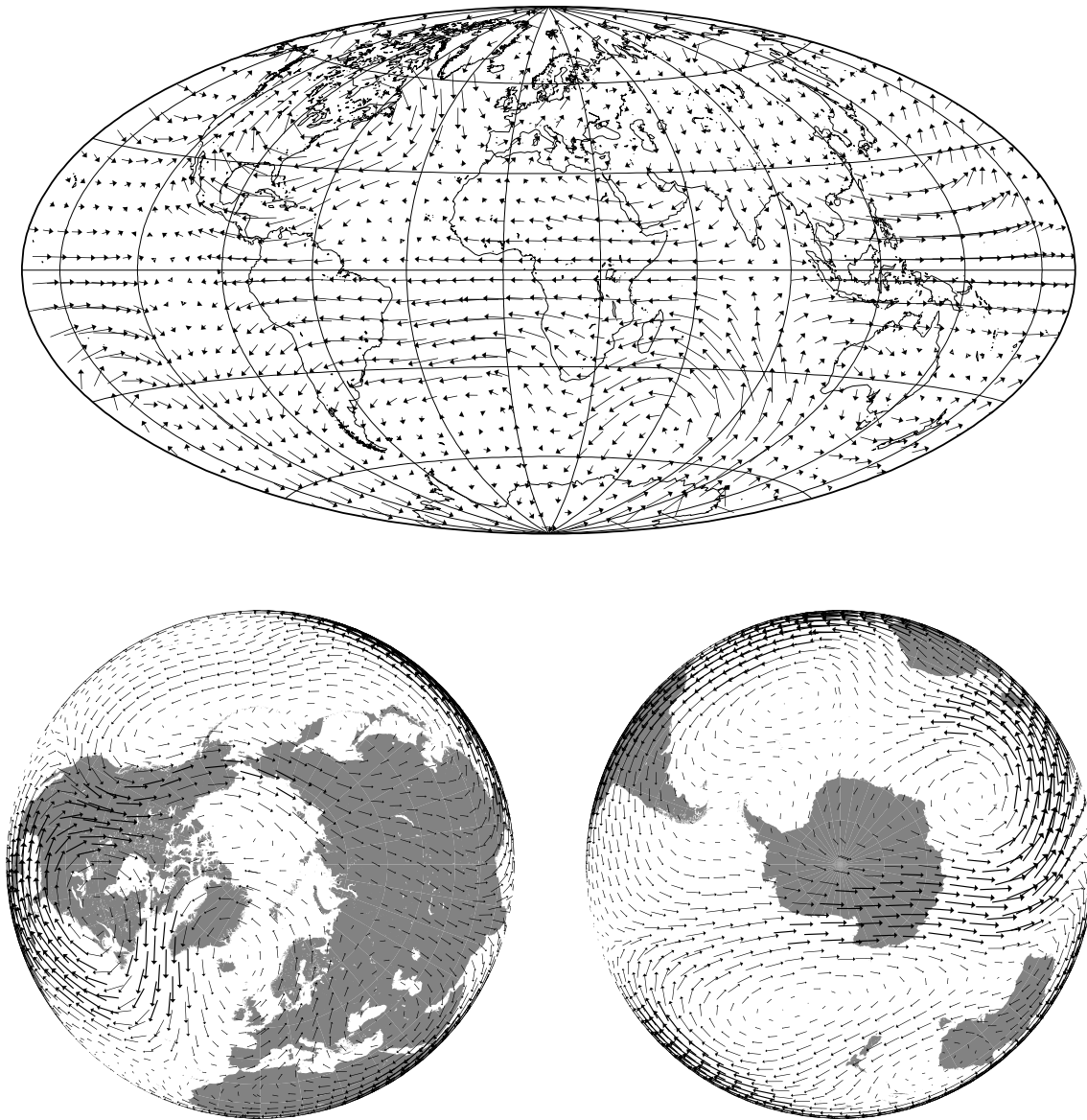


FIG. 0.10 – Cartes de mouvements à la surface du noyau déduites de la variation séculaire du champ magnétique pour 1980 (courtoisie A. Pais et G. Hulot).

efficace devant les diffusions des autres grandeurs.

Nous nous intéresserons dans un premier temps aux hypothèses permettant d'établir un modèle mathématique des équilibres existants dans le noyau. Nous présenterons alors les approximations choisies pour en permettre une résolution numérique approchée. Nous appliquerons ensuite ces méthodes à deux problèmes simplifiés. Le premier, a priori assez éloigné des mécanismes pouvant exister dans le noyau, nous permettra néanmoins d'étudier avec attention les divers équilibres possibles en fonction des régimes de paramètres étudiés. Le second concerne les mouvements convectifs près du seuil ; bien que n'impliquant pas d'effets magnétiques, il constitue une étape obligée vers un modèle de géodynamo. Nous nous sommes également efforcé d'étudier les différents équilibres possibles.

Bibliographie

Mioara Alexandrescu, Vincent Courtillot, Jean-Louis Le Mouél, 1997

*High-resolution secular variation of the geomagnetic field
in western Europe over the last four centuries:
Comparison and integration of historical data from Paris and London.*
Journal of Geophysical Research, **102**, B 9, p.20 245–20 258.

François Arago, 1865

Oeuvres complètes.
Legrand, Pomey et Crouzet, Paris.

George Backus, 1958

A class of self-sustaining dissipative spherical dynamos,
Annals of Physics **4**, p.372–447.

Peter Barlow, 1831

*On the probable Electric Origin of all the Phenomena
of Terrestrial Magnetism ;
with an illustrative Experiment.*
Philosophical Transaction, part 1., p.99–108.

Antoine Becquerel, 1834

*Traité expérimental de l'électricité et du magnétisme
et de leurs rapports avec les phénomènes naturels.*
Firmin Didot frères, Paris.

Antoine Becquerel, 1847

Elements de physique terrestre et de météorologie.
Firmin Didot frères, Paris.

Jeremy Bloxham, David Gubbins et Andrew Jackson, 1989

Geomagnetic secular variation
Philosophical Transaction of the Royal Society (London)
A329, p.415–502.

Vincent Courtillot, 1996

La vie en Catastrophes
Fayard.

René Descartes, 1644 (en latin), 1647 (en français)

Principia philosophiae,
(Principes de la philosophie).
Re-édition : Librairie J. Vrin Paris, 1978.

A. **Dziewonski** et D. Anderson, 1981

Preliminary Reference Earth Model PREM

Physics of the Earth and Planetary Interiors, **25**, 297-356.

Walter **Elsasser**, 1946

Induction Effects in Terrestrial Magnetism

Physical Review, **69**, No 3 & 4, p.106–116.

Physical Review, **70**, No 3 & 4, p.202–212.

Physical Review, **72**, No 9, p.821–833.

Michael **Faraday**, 1839

Terrestrial Magneto-electric Induction

dans *Experimental researches in electricity*

Richard and John Edward Taylor, London.

William **Gilbert**, 1600

De Magnete

Traduction Anglaise (P.F.Mottelay): John Wiley & Sons, 1893,

Re-édition : Dover Publications Inc., 1958, 1991.

A. **Herzenberg**, 1958

Geomagnetic dynamos

Proceedings of the Royal Society of London A,

250, p.543–584.

Lionel **Hongre**, 1997

Contribution à la modélisation du champ géomagnétique

dans le temps et dans l'espace.

Thèse I.P.G.P.

Joseph **Larmor**, 1919

How the Sun might have become a Magnet.

The electrical review, **85**, No. 2, p.412.

repris à quelques modifications près dans :

How could a Rotating Body such as the Sun become a Magnet?

Report of the XVIIIth meeting of the British association for

the advancement of science, Bournemouth 1919.

Gaston **Laurent**, 1924

Les Grands Ecrivains Scientifiques

(de Copernic à Berthelot).

Librairie Armand Colin, Paris.

Jean-Louis Le Mouél, 1976

Le champ géomagnétique et L'origine du champ magnétique terrestre
dans *Traité de Géophysique Interne, tome II*
Coulomb Jean et Georges Jobert
Masson.

Daniel Mattis, 1965

The theory of magnetism
Harper & Row.

James Clerk Maxwell, 1873

A Treatise on electricity and magnetism
Oxford : Clarendon Press.

Ronald Merrill, Michael McElhinny, et Phillip McFadden, 1996

The Magnetic Field of the Earth
Academic Press.

Robert Norman, 1585

The Newe Attractive.

Jean-Paul Poirier, 1991

Les profondeurs de la Terre
Masson.

Jean-Paul Poirier, 1996

Le noyau de la Terre
Dominos, Flammarion.

Patricia Radelet de Grave, 1982

Les lignes magnétiques du XIII^e siècle au milieu du XVIII^e siècle
Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences, No 1, C.N.R.S.

Graeme Sarson, Chris Jones et Aaron Longbottom

Convection driven geodynamo models of varying Ekman number.
en préparation pour Geophysical and astrophysical fluid dynamics.

Pascale Ultré-Guérard, 1996

Du Paléomagnétisme au Géomagnétisme spatial:
analyse de quelques séquences temporelles du champ magnétique terrestre.
Thèse I.P.G.P.

Jean-Pierre Valet et Vincent Courtillot, 1992

Les inversions du champ magnétique terrestre.
La Recherche, **23**, p.1002-1013.