

Summary

The main conclusion to be drawn from this work may be that a lot still has to be done. We have shown on a very simplified two-dimensional problem that viscous effects can strongly alter the solution and that the Ekman number has to be decreased below 10^6 to get an insight on the asymptotic behaviour. We haven't been able to obtain the qualitative onset of convection (subcritical) anticipated by theoretical descriptions, but features of our solutions strongly suggest that this discrepancy could as well rely on the use of overestimated Ekman numbers. We will continue this study further. We also want to study the strongly non-linear régime. Forthcoming studies could concern the onset of dynamo action. A preliminary result (numerically converged) of kinematic dynamo obtained with our convective solution (at $Ta = 10^6$) is presented. We want to study a parameter range as wide as numerically possible, in Ekman numbers, as well as in Rayleigh numbers. We also consider some modifications of our numerical algorithm, in order to reduce to the computing time associated with the resolution of Ekman layers.

Chapitre 5

Conclusions – Perspectives



La conclusion principale de ce travail pourrait bien être qu’il reste encore beaucoup à faire ! Nous avons montré sur un problème simplifié que des effets visqueux pouvaient modifier grandement l’écoulement dans une coquille sphérique en rotation, même pour des nombres d’Ekman aussi petits que 10^{-6} , et qu’il était nécessaire de faire décroître le nombre d’Ekman sous cette valeur pour que les modèles numériques soient en accord avec les études analytiques. Nous avons également montré que pour les mêmes valeurs du nombre d’Ekman, l’action d’un champ magnétique sur l’écoulement (magnétohydrodynamique) ne réduit pas l’importance des effets visqueux, et qu’au contraire un équilibre magnéto-visqueux peut être mis en évidence. Nous avons ensuite étudié dans la même géométrie la convection thermique d’amplitude finie, comme une étape préliminaire à l’étude d’une dynamo auto-excitée. Cette étude, bien qu’incomplète, indique clairement que le désaccord entre les observations de bifurcation sur-critique numériques (Zhang 1992) et l’existence démontrée analytiquement d’une bifurcation sous-critique (Soward, 1977) semble s’expliquer par l’utilisation de nombres d’Ekman trop élevés dans les simulations. Ce résultat est important, car il indique que la convection telle qu’elle est étudiée numériquement n’est pas sur la branche asymptotique significative pour le noyau terrestre. D’autres désaccords entre les descriptions théoriques et les observations numériques existent encore pour des problèmes plus proches de la dynamo. Ainsi, le phénomène de croissance illimité du champ (“runaway growth”) significatif du passage de la branche à champ faible à la branche à champ fort n’a jamais été observé numériquement.

Il reste encore énormément à faire. Tout d’abord, il faudra sans doute essayer de mener l’étude de convection d’amplitude finie pour des nombres d’Ekman inférieurs à 10^{-5} pour décrire la bifurcation sous critique. Il faudra également étudier la convection fortement non-linéaire pour différentes valeurs du nombre

d’Ekman. Ces études prendront sans doute du temps, par leur difficulté et par le volume de calculs numériques qu’elles impliquent.

L’étape suivante consistera à décrire le démarrage de l’action dynamo : le champ de vitesse convectif obtenu peut-il faire croître un champ magnétique à partir d’une perturbation ? Ce problème de “dynamo cinématique” (il n’y a pas d’effet du champ magnétique naissant sur l’écoulement) peut être comparé à la convection linéaire, en cela qu’il n’y a pas de saturation possible. Il constitue une étape préliminaire vers une dynamo auto-excitée. Dès lors que l’on s’intéresse à l’action dynamo (ne serait-ce qu’à son démarrage) un autre paramètre important est à considérer : le nombre de Roberts. Celui-ci mesure le rapport du temps caractéristique de diffusion du champ magnétique par le temps caractéristique de diffusion thermique¹. Ce nombre est de l’ordre de 10^{-6} pour le noyau terrestre. C’est-à-dire que le champ magnétique diffuse très efficacement et cela constitue sans doute une caractéristique essentielle de l’induction dans le noyau terrestre. Le régime des petits nombres de Roberts est, comme celui des petits nombres d’Ekman, difficile à atteindre numériquement. S’il est relativement facile de maintenir par action dynamo un champ qui diffuse peu, cela est beaucoup plus difficile lorsque le champ diffuse bien. Les modèles de dynamo numériques ne savent pas pour l’instant descendre ce nombre en dessous de 10^{-1} (il est pour la plupart d’entre eux supérieur à 10) .

Nous avons commencé une étude préliminaire consistant à étudier le problème de dynamo cinématique à partir du champ de vitesse faiblement non-linéaire. Cela permet, pour une première approche, d’effectuer un changement de repère lié à la vitesse de phase de la solution près du seuil. Nous nous sommes placés dans le repère en rotation tel que l’écoulement soit indépendant du temps. Dans ce repère (où le champ de vitesse est modifié d’une vitesse angulaire constante), nous avons pu utiliser un programme de dynamo cinématique (courtoisie de Philippe Cardin), construit sur la même logique que les programmes écrits pour réaliser ce travail et qui a été validé sur de nombreux cas test pour étudier le champ induit par ces mouvements. Ces calculs numériques convergent (deux fois plus de points radiaux ont été utilisés qu’il n’est nécessaire pour résoudre l’écoulement, et les spectres sont présentés figure 5.2), et constituent donc une référence utile pour les études à venir plus loin du seuil et dans le repère du manteau. Encore terriblement éloignés d’un régime de paramètres réaliste pour l’étude du noyau terrestre (nombres d’Ekman et de Roberts sur-évalués, nombre de Rayleigh sous-évalué), ces résultats ne prétendent nullement être significatifs pour la terre. Ils constituent cependant les premiers résultats numériques convergés de démarrage de l’action dynamo avec des conditions aux limites cinématiques réalistes.

1. Qui est comparable au temps caractéristique construit sur la viscosité si le nombre de Prandtl est proche de l’unité.

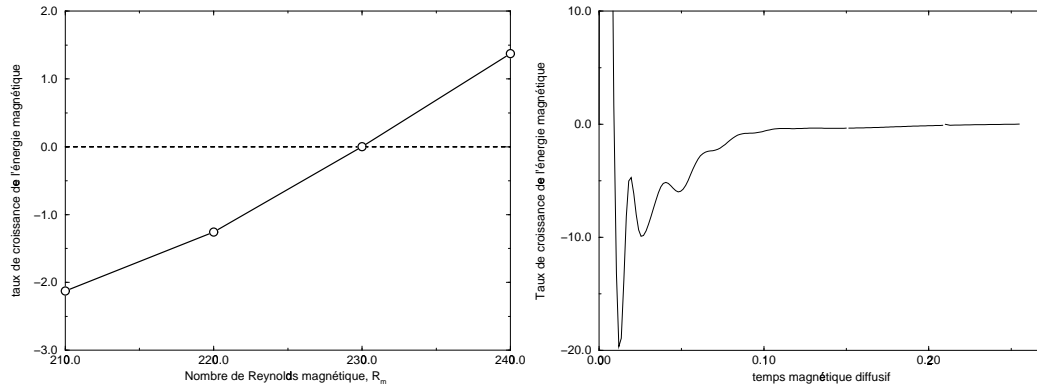


FIG. 5.1 – Recherche du nombre de Reynolds magnétique critique, pour une dynamo cinématique construite à partir du champ de vitesse de la convection d'amplitude finie (en conditions de non-glissement, et en chauffage β) pour $Ta = 10^6$. Le nombre de Reynolds magnétique critique pour le démarrage de l'action dynamo est proche de 230 (à gauche). A droite l'évolution temporelle de l'énergie magnétique pour $Rm = 230$.

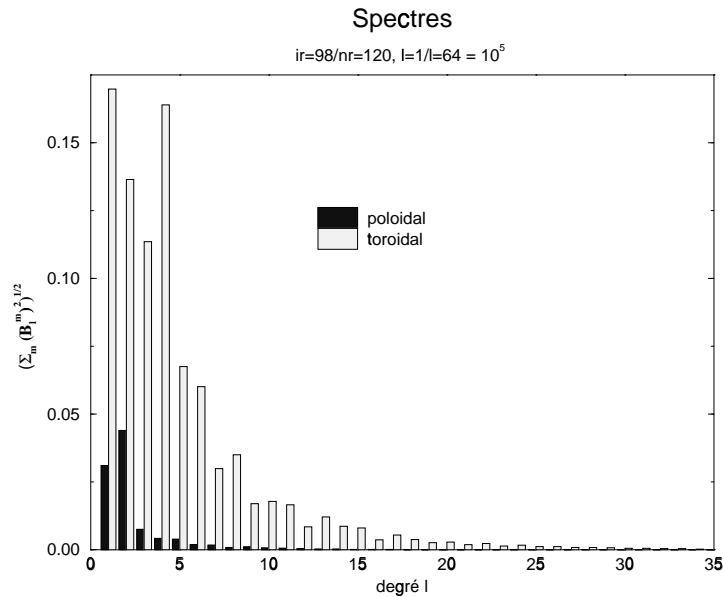


FIG. 5.2 – Cette simulation est convergée numériquement. Nous utilisons 120 coquilles (deux fois plus qu'il n'en faut pour résoudre le champ de vitesse). Le spectre est tronqué à $l < 64$ et $m < 128$, ce qui est suffisant pour bien représenter la solution.

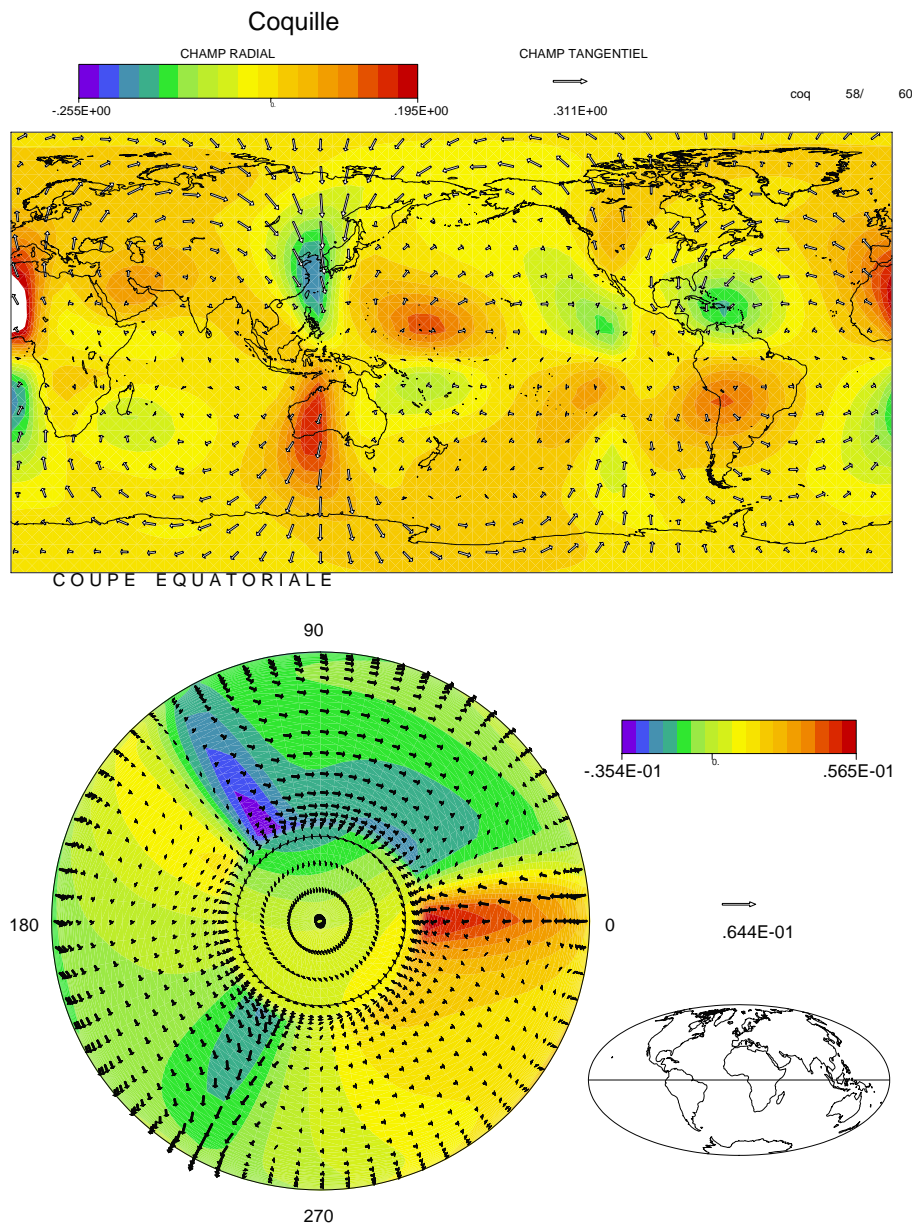


FIG. 5.3 – *Champ magnétique produit par la dynamo cinématique (flèches pour la composante tangentielle et couleurs pour la composante normale). Le champ de vitesse correspond au mode $m = 3$. Le champ est représenté à la surface (en haut) et en coupe équatoriale (en bas).*

Les études que nous venons de présenter étant très difficiles numériquement, il paraît utile d'envisager les améliorations possibles de notre approche numérique. S'il est sensé de conserver une projection sur une base harmonique en θ et ϕ , ne serait-ce que pour pouvoir écrire facilement les conditions aux limites pour le champ magnétique, nous pouvons envisager différentes modifications du schéma

radial.

Nous présentons rapidement quelques méthodes numériques qui peuvent être envisagées².

- La méthode de différences finies utilisée jusqu'à présent souffre de limitations importantes. La nécessité d'utiliser une grille "souple", de préférence à variations géométriques, nous contraint à introduire des points de calculs inutiles dans le domaine pour assurer la résolution des couches limites. De plus, ce schéma n'étant précis qu'à l'ordre deux, il peut engendrer des phénomènes de viscosité numérique.

Une amélioration possible serait d'utiliser des schémas d'ordres plus élevés. Cela entraînerait toutefois de nouvelles difficultés. Le stencil associé serait plus large, ce qui rendrait difficile une implémentation rigoureuse des conditions aux limites. De plus cela nécessiterait la résolution de systèmes plus larges à chaque pas d'intégration. Enfin, le gain apporté par ces méthodes d'ordres élevés peut être très limité dans le cas de forts cisaillements (comme les couches limites, voir Fletcher 1991).

- Des méthodes spectrales peuvent également être employées pour la résolution radiale. C'est en fait l'approche la plus souvent utilisée pour ce problème. Le choix se porte en général sur les polynômes de Chebyshev car ils offrent une grande résolution aux bords du domaine. Cette approche entraîne cependant des limitations importantes. Il est peu aisé de modifier les conditions aux limites, car cela introduit des couplages. Mais surtout il est particulièrement difficile de paralléliser efficacement ces algorithmes (tous les coefficients étant couplés).
- La méthode des Volumes finis, est souvent utilisée en mécanique des fluides (Patankar 1980, Ferziger et al. 1996). Elle permet une interprétation directe des lois de conservation et garantit que leur résolution est conservative. La décomposition en scalaires poloïdaux et toroïdaux nous amène à écrire nos équations sous forme non conservative, ce qui rend la méthode des volumes finis moins intéressante. Comme cette décomposition est extrêmement utile pour le champ magnétique et ses conditions aux limites, et qu'elle nous permet de réduire le nombre de variables à considérer, nous écartons également ce choix.
- La méthode des Éléments finis semble répondre à beaucoup de nos difficultés. Basée sur la formulation variationnelle des équation, cette méthode

2. Cette présentation rapide est limitée au cas monodimensionnel qui nous intéresse. Notons que certaines caractéristiques essentielles de ces méthodes présentées (comme l'usage de grilles non-structurées, ou le traitement de frontières irrégulières) n'ont de sens que pour des problèmes de dimensions supérieures.

est connue³ pour permettre une grande adaptativité (Zienkiewicz, 1971). Cette caractéristique est essentiellement due à l’introduction d’une matrice de masse. Pour des noeuds régulièrement espacés en monodimensionnel, l’opérateur discret, pour une base de fonctions affines, correspond à celui des différences finies centrées d’ordre deux (voir par exemple Le Pourhiet, 1988), la différence réside dans la matrice de masse. L’une des conséquences de cette matrice est que les schémas explicites en temps nécessitent la résolution d’un système linéaire, au même titre que les schémas implicites ou semi-implicites⁴. Cette approche comme celles aux différences finies peut entraîner des effets de viscosité numérique.

Pour utiliser un schéma aux éléments finis pour résoudre nos équations, il faut pouvoir résoudre le bi-laplacien dans l’équation du scalaire poloïdal. Pour résoudre ce problème d’ordre quatre avec la méthode des éléments finis (on rencontre des problèmes similaires en mécanique des solides pour les problèmes de poutres et de plaques en compression), il faut utiliser des fonctions de degré plus élevé (par exemple des cubiques, voir Burnett 1987, section 8.6), ce qui complique la formulation.

- Les Différences finies compactes, aussi appelées différences finies Hermiennes, sont moins souvent utilisées que les précédentes. La notion de “compacité” signifie ici que pour approximer la dérivée d’un champ en un point on n’utilisera que des valeurs sur ses plus proches voisins (au nombre de deux en une dimension). Le schéma de différences finies centré classique que nous avons utilisé jusqu’à présent est donc compact d’après cette définition. Le principe de ces schémas est d’augmenter l’ordre de l’approximation sans allonger l’opérateur. Il existe différentes manières d’établir ces schémas (cf Collatz 1951, 1966 ; Tolstykh 1994 ; Spatz 1995). Nous suivons l’approche proposée par Spatz (1995), en l’étendant au cas des grilles déformées (ces formules sont présentées en annexe).

Pour l’équation type

$$(5.1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f ,$$

on obtient un schéma discret d’ordre trois, de la forme (voir annexe)

$$(5.2) \quad [\tilde{\delta}^2] (u_i) = [M] (f_i) ,$$

où

$$(5.3) \quad [M] = \left([Id] + \frac{1}{3} (h_2 - h_1) [\tilde{\delta}] + \frac{h_1^2 - h_1 h_2 + h_2^2}{12} [\tilde{\delta}^2] \right) .$$

3. Outre le fait qu’elle permet de manipuler des maillages non structurés, ce qui n’a pas grand sens en monodimensionnel.

4. Des méthodes de réductions (“lumping”) permettent de rendre cette matrice diagonale, mais le schéma perd alors de son adaptativité (voir Burnett 1987, section 11.3)

Nous voulons essayer d’adopter cette approche pour résoudre nos équations. Les formules sont données en annexe et le code correspondant est en cours de mise au point.

Enfin, il est utile de considérer une modification de notre schéma temporel. Bien qu’inconditionnellement stable, le schéma de Crank-Nicholson est oscillant pour les courtes longueurs d’ondes spatiales (voir Burnett, 1987). Ces oscillations ont toujours disparu dans nos calculs pour des temps assez grands. Elles peuvent devenir importantes lors de l’étude de problèmes turbulents.

Enfin, nous envisageons de paralléliser notre algorithme. L’usage d’un schéma aux différences réduit les modifications à lui apporter. Pour pouvoir paralléliser notre approche, il convient toutefois de modifier le solveur utilisé pour le schéma radial (chaque coquille concentrique pouvant être résolue indépendamment hormis à cette étape), par exemple en utilisant un solveur itératif.

Il reste donc effectivement beaucoup à faire. Mais n’est-ce pas là le lot de toute recherche?

Bibliographie

David **Burnett**, 1987

Finite element analysis from concepts to applications
Addison-Wesley publishing.

Lothar **Collatz**, 1951, 1966

Numerische Behandlung von Differentialgleichungen
trad. Ang. *The numerical treatment of differential equations*
Springer.

Joel **Ferziger**, Milovan Perić, 1996

Computational Methods for Fluid Dynamics
Spinger.

Clive **Fletcher**, 1988, 1991

Computational techniques for Fluid Dynamics, volumes I & II
Springer.

Suhas **Patankar**, 1980

Numerical heat transfer and fluid flow
Series in computational methods in mechanics and thermal sciences
McGraw-Hill.

Alain Le **Pourhiet**, 1988

Résolution numérique des équations aux dérivées partielles
Cepadues-Editions.

Andrew **Soward**, 1977

*On the finite amplitude thermal instability
of a rapidly rotating fluid sphere*
Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics, **9**, p.19–74.

William **Spotz**, 1995

*High-Order Compact Finite Differences Schemes
for Computational Mechanics*
Thèse, University of Texas at Austin.

Andrei **Tolstykh**, 1994

*High Accuracy Non-Centered Compact Difference Schemes
For Fluid Dynamics Applications*
World Scientific.

Keke Zhang et Friedrich Busse, 1988

*Finite amplitude convection and magnetic field generation
in a rotating spherical shell*

Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics, **44**, p.33–53.

Keke Zhang et Friedrich Busse, 1989

Convection driven magnetohydrodynamic dynamos in rotating spherical shells

Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics, **49**, p.97–116.

Keke Zhang et Friedrich Busse, 1990

*Generation of magnetic fields by convection in a rotating spherical
fluid shell of infinite Prandtl number*

Physics of the Earth and Planetary Interiors, **59**, p.208–222.

Olgierd Zienkiewicz, 1971

The Finite Element Method in Engineering Science

McGraw-Hill.