

FIG. 4.14 – Lignes de courants pour le seuil de convection en chauffage uniforme à un nombre de Taylor de 10^8 . Les lignes partent de points régulièrement espacés sur un cercle placé légèrement sous le plan équatorial. La solution convective est parfaitement symétrique par rapport à l'équateur, le fluide ne change pas d'hémisphères et les colonnes correspondent alternativement à des courants ascendants et descendants. Ces lignes de courants ne doivent pas être assimilées à des trajectoires de particules fluides, à cause de la vitesse de phase de la solution.

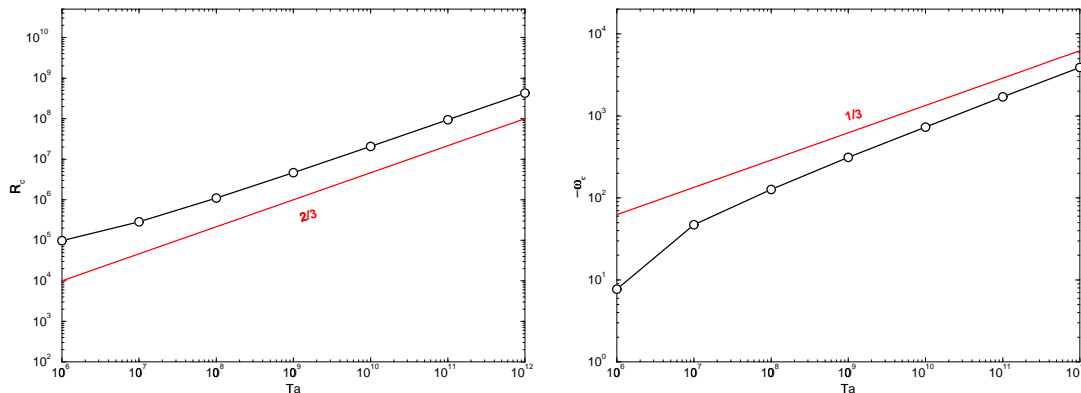


FIG. 4.15 – On note sur un graphe log-log que les variations du nombre de Rayleigh critique, et de la pulsation au seuil, pour le chauffage β , semblent suivre les lois de Busse (1970) dans la limite des grands nombres de Taylor.

fonction de Taylor (la loi pour m n'a de sens que quand m devient assez grand). Ces courbes sont représentées figure 4.15. Il reste difficile de quantifier sur ces graphes à quel point la loi est satisfaite, une autre approche (inspirée des différences finies) consiste à introduire une fonction “exposant” \mathcal{E} définie pour toute fonction X de Ta par

$$(4.48) \quad \mathcal{E}(X(Ta)) = \log_{10}(X(Ta)/X(Ta/10)) ,$$

si la fonction X s'écrit

$$(4.49) \quad X(Ta) = \alpha Ta^\beta ,$$

on a

$$(4.50) \quad \mathcal{E}(X(Ta)) = \beta .$$

Appliquée aux résultats du tableau précédent, elle donne

Ta	$\mathcal{E}(R_c)$	$\mathcal{E}(\omega_c)$
10^7	0.467	0.786
10^8	0.586	0.430
10^9	0.627	0.391
10^{10}	0.646	0.370
10^{11}	0.654	0.368
10^{12}	0.659	0.358

De plus pour $Ta = 10^{12}$, on a $\mathcal{E}(m_c) = 0.176$. Il semble donc que dans la limite des grands nombres de Taylor, les paramètres critiques déterminés numériquement suivent bien les lois en puissance prédites par les études analytiques, à savoir

$$(4.51) \quad m_c \propto Ta^{1/6} ,$$

$$(4.52) \quad R_c \propto Ta^{2/3} ,$$

$$(4.53) \quad \omega_c \propto Ta^{1/3} .$$

Il est toutefois important de noter que la vérification des lois de Busse B-70 (rappelées plus haut) par notre solution ne signifie pas nécessairement que les deux solutions sont identiques. Les lois asymptotiques peuvent être plus générales que la solution proprement dite. Ainsi, la loi en $E^{1/3}$ pour la longueur d'onde horizontale (le mode critique en ϕ) est vérifiée dès qu'il y a équilibre visqueux-Coriolis dans l'équation de vorticité et que la condition de Proudman-Taylor est satisfaite (on a par exemple une telle loi dans le cas plan en rotation, cf Chandrasekhar 1961). On dérive une telle loi en prenant la composante axiale du rotationnel de l'équilibre viscosité-Coriolis

$$(4.54) \quad 2\Omega \vec{e}_z \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \nu \vec{e}_z \cdot \vec{\nabla}_H \wedge \Delta_H \vec{u} ,$$

$$(4.55) \quad 2\Omega \frac{\vec{u}}{r_e} \simeq \frac{\nu}{\ell^3} \vec{u},$$

$$(4.56) \quad \ell^3 \simeq r_e^3 E,$$

d'où une structure horizontale

$$(4.57) \quad \ell = r_e \mathcal{O}(E^{1/3}).$$

Une autre confrontation importante concerne donc le coefficient de ces lois asymptotiques. On calcule :

	$Ta = 10^8$	$Ta = 10^9$	$Ta = 10^{10}$	$Ta = 10^{11}$	$Ta = 10^{12}$
$C_m = m_c/Ta^{1/6}$	0.27	0.28	0.28	0.29	0.30
$C_R = R_c/Ta^{2/3}$	6.16	5.12	4.46	4.34	4.27
$C_\omega = -\omega_c/Ta^{1/3}$	0.22	0.27	0.34	0.37	0.39

Par comparaison avec les relations présentées précédemment, on note que le coefficient C_m vaut environ la moitié de celui déterminé par les deux méthodes analytiques (qui ne diffèrent que très peu). Ce résultat est nouveau, et est particulièrement intéressant à la lumière des mesures expérimentales (voir Chamberlain et Carrigan, Carrigan et Busse) qui ont observé que le mode critique réalisé est environ la moitié de celui prédit analytiquement (pour un nombre de Prandtl voisin de sept, alors que les calculs présentés ici sont réalisés pour un nombre de Prandtl de un). Il semble donc que nos simulations numériques rejoignent les expériences sur ce point. La différence d'interprétation avec l'étude de Zhang (1992), dans laquelle les résultats principaux sont présentés pour des nombres de Prandtl de 10 reste encore à être précisée.

Le coefficient C_R est celui pour lequel les résultats de l'étude par perturbation diffèrent le plus de ceux de l'étude asymptotique (d'un facteur deux environ). L'étude par perturbation définit un coefficient C_R plus petit que celui que nous obtenons pour nos simulations d'un facteur proche de 0.4. Ce décalage est du même ordre que celui observé par Zhang (1992) pour $Pr = 1$ (voir sa figure 1). Le coefficient prédit par l'étude asymptotique est beaucoup plus proche (bien que toujours inférieur) de celui que nous observons, ils ne diffèrent que d'un facteur 0.8. Comme notre coefficient C_R continue de décroître alors que le nombre de Taylor augmente, on ne peut pas exclure que notre C_R ne tende vers la valeur prédite asymptotiquement.

Le coefficient C_ω diffère peu de l'étude par perturbation à l'étude asymptotique. Nous obtenons numériquement un coefficient inférieur d'un facteur 0.9 (0.8 pour l'étude par perturbation).

Une autre confrontation concerne l'emplacement des colonnes, on le mesure dans notre solution par la position du maximum de l'amplitude A (figure 4.17) et de celui de l'anomalie de température S_2 (figure 4.16).

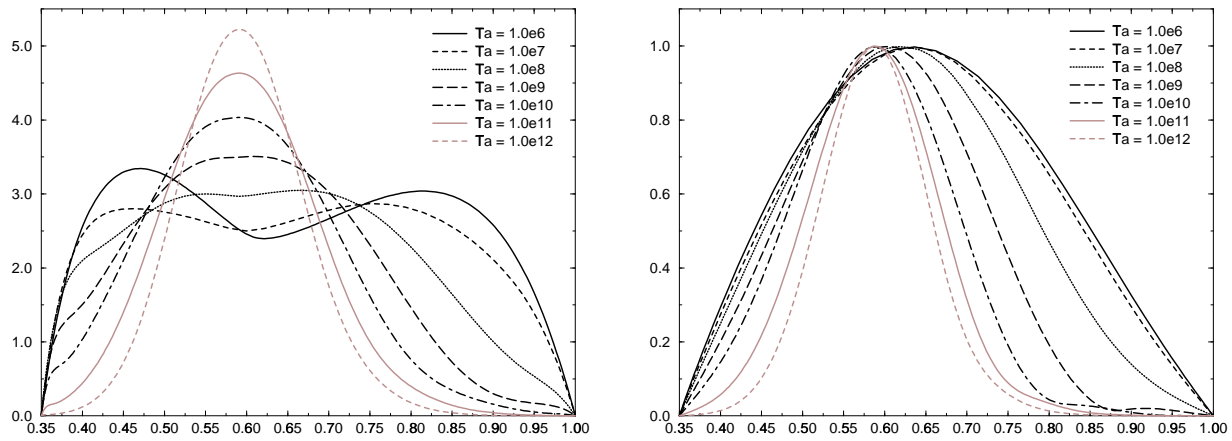


FIG. 4.16 – Structure radiale de la solution en vitesse S_1 à gauche et en température S_2 à droite en fonction du nombre de Taylor en chauffage uniforme, pour $Pr = 1$.

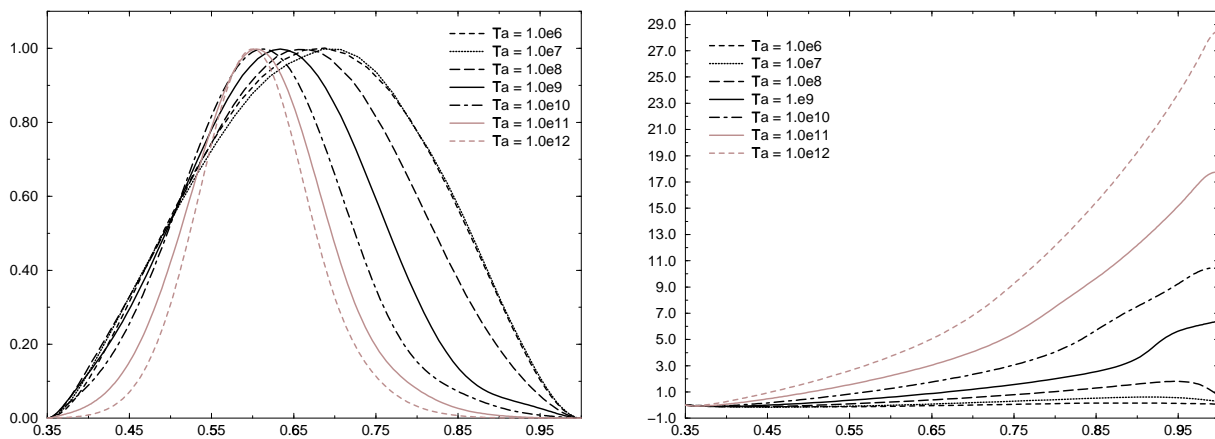


FIG. 4.17 – Structure radiale de la solution en chauffage uniforme, en fonction du nombre de Taylor, et pour $Pr = 1$. L'amplitude $A(r)$ est représentée à gauche, et la phase $\phi_0(r)$ à droite.

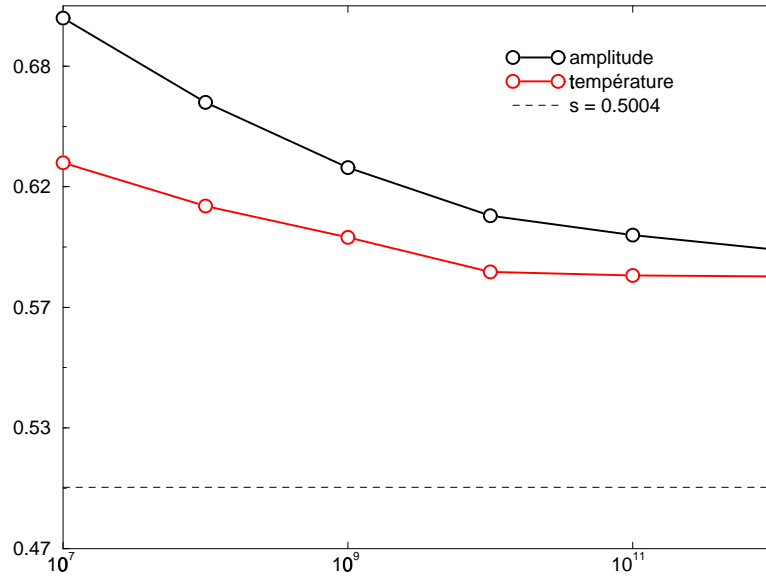


FIG. 4.18 – Distance à l'axe du maximum de l'amplitude et du maximum de la perturbation de température en fonction du nombre de Taylor, pour le chauffage uniforme. Les colonnes semblent converger vers une localisation différente de celle prédite analytiquement.

On remarque que ceux-ci sont décalés dans notre solution mais se rapprochent à mesure que l'écoulement se confine en espace. Ces résultats sont représentés graphiquement sur la figure 4.18. L'écoulement ne semble pas converger vers la limite prédite par l'étude asymptotique. Ces observations indiquent qu'aux nombres de Taylor que nous avons atteints (encore relativement modestes, si l'on se réfère à l'étude du chapitre précédent) la solution convective diffère de celle décrite par l'étude asymptotique. Cette différence est-elle en rapport avec l'argument de Soward (1977) sur l'instabilité de la structure asymptotique pour les grands nombres de Taylor ?

Le fait que la solution réalisée soit plus large que les fonctions de Bessel cylindriques utilisées pour décrire la solution de l'étude asymptotique, semble s'accorder avec l'étude de Soward. Ces fonctions J_m sont définies comme

$$(4.58) \quad J_m(x) = \left(\frac{1}{2}x\right)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{4}x^2\right)^k}{k! \Gamma(m+k+1)} .$$

où Γ vaut

$$(4.59) \quad \Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt .$$

La structure radiale de la solution asymptotique est alors décrite par $J_m(\gamma s)$ où $m = m_c$, et γ vaut

$$(4.60) \quad \gamma = \frac{m_c}{s_c} .$$

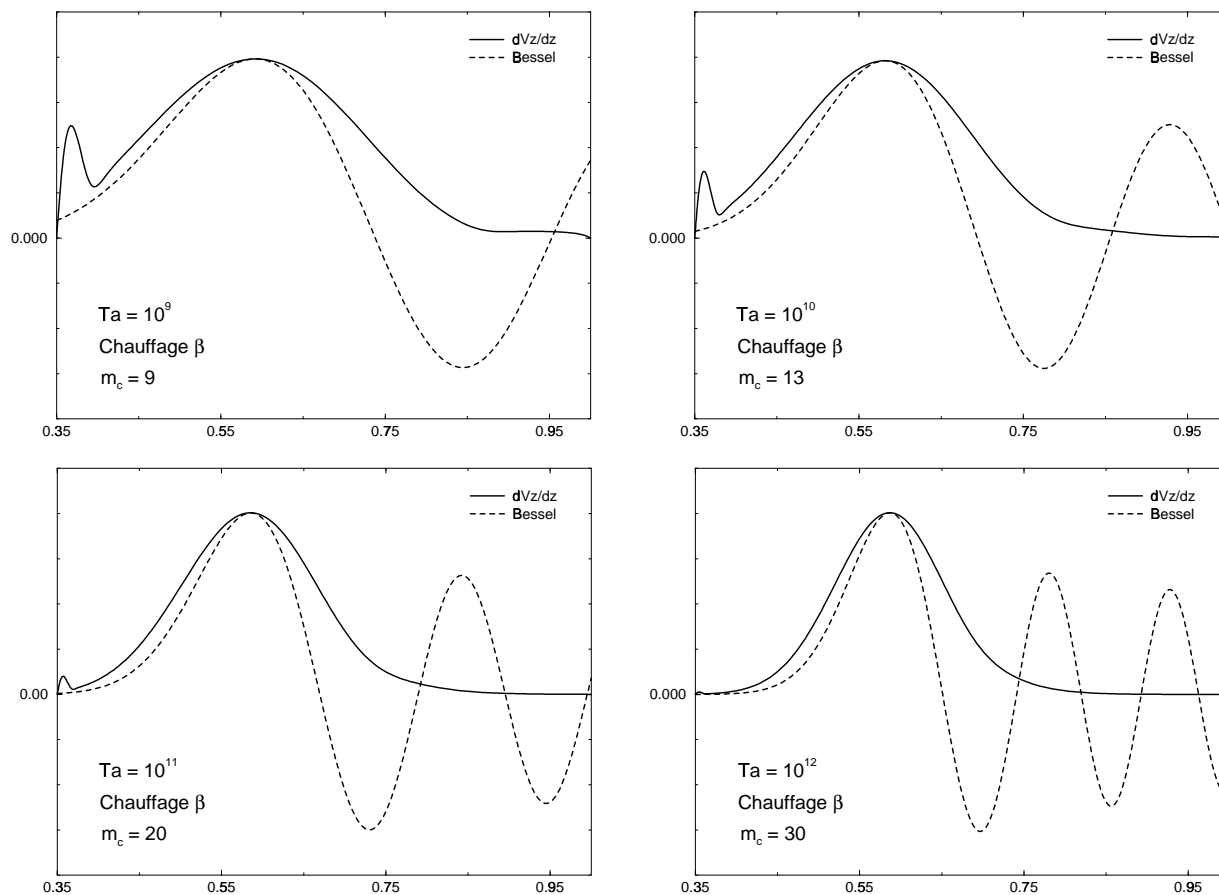


FIG. 4.19 – Comparaison de la solution en chauffage uniforme avec les fonctions de Bessel cylindriques.

Dans la limite asymptotique (quand m est assez grand) le maximum de cette fonction est en s_c . En pratique, aux nombres de Taylor que nous avons pu étudier, m_c n'est pas assez grand, et nous avons ajusté la valeur de γ de sorte que $J_m(\gamma s)$ ait son maximum en s_c . Nous avons utilisé pour différents nombres de Taylor la valeur de s_c correspondant à notre résultat numérique, et comparé la structure de $J_m(\gamma s)$ avec celle de $\partial u_z / \partial z$ dans le plan équatorial pour notre solution. Ces comparaisons, présentées figure 4.19, semblent s'accorder avec les arguments de Soward et expliquer en partie les désaccords entre l'étude asymptotique et les simulations numériques. La fonction de Bessel est plus fine que la solution obtenue, qui est largement symétrique.

Les études antérieures de ce problème ont toujours été menées en condition de contraintes horizontales nulles (Zhang 1992, Hirsching et Yano 1993). Nous avons donc également étudié ces conditions aux limites. Cette étude rapide et partielle du cas des conditions de contraintes horizontales nulles est également motivée par le fait que l'on ne sait pas si la solution dans la limite des grands nombres de Taylor

dépend des conditions aux limites cinématiques. Des différences importantes entre des modèles de dynamo hyper-visqueuses semblent, d'après une récente étude (Kuang et Bloxham, 1997), trouver leurs origines dans l'usage de conditions aux limites cinématiques différentes. La question de savoir si la solution convective est influencée par les conditions aux limites cinématiques est ouverte. L'étude théorique faisant référence sur cette question est celle de Roberts (1965), qui montre dans un cas particulier que le comportement asymptotique en condition de contraintes horizontales nulles est le même qu'en condition de non-glissement. Cette étude ne concerne toutefois que les mouvements convectifs très près de l'axe de rotation. La seule étude numérique proposant une comparaison entre ces deux types de conditions aux limites (Zhang et Jones 1992) n'a pas étudié de nombres d'Ekman inférieurs à $2.5 \cdot 10^{-5}$ et fut menée pour un nombre de Prandtl de 7.0. Zhang et Jones observent des nombres de Rayleigh critiques et des modes critiques différents selon les conditions aux limites utilisées.

Nous obtenons en condition de contraintes horizontales nulles les résultats suivants

Ta	m_c	R_c	ω_c
10^8	7	$1.118 \cdot 10^6$	-210.78
10^9	10	$4.767 \cdot 10^6$	-457.30
10^{10}	13	$2.1007 \cdot 10^7$	-961.92
10^{11}	20	$9.461 \cdot 10^7$	-2121.81
10^{12}	30	$4.3002 \cdot 10^8$	-4635.16

Les nombres de Rayleigh critiques, ainsi que les modes critiques obtenus avec ces conditions aux limites semblent converger vers la même limite qu'en condition de non-glissement pour les grands nombres de Taylor. Les pulsations en revanche diffèrent pour la gamme de nombres de Taylor étudiés.

On obtient les coefficients

	$Ta = 10^8$	$Ta = 10^9$	$Ta = 10^{10}$	$Ta = 10^{11}$	$Ta = 10^{12}$
$C_m = m_c/Ta^{1/6}$	0.32	0.31	0.28	0.29	0.30
$C_R = R_c/Ta^{2/3}$	5.19	4.77	4.52	4.38	4.30
$C_\omega = -\omega_c/Ta^{1/3}$	0.45	0.46	0.45	0.46	0.46

Les coefficients C_m et C_R convergent vers les mêmes valeurs que celles de l'étude en condition de non-glissement. On note qu'avec ces conditions aux limites, le coefficient C_ω , qui ne varie presque pas avec le nombre de Taylor, est beaucoup plus proche des valeurs des études analytiques que celui obtenu en condition de non-glissement.

On compare figure 4.20 la structure radiale de la solution pour $Ta = 10^{12}$ en condition de contraintes horizontales nulles avec celle obtenue précédemment en condition de non-glissement. Ces deux structures diffèrent encore nettement, même à ces valeurs élevées du nombre de Taylor.

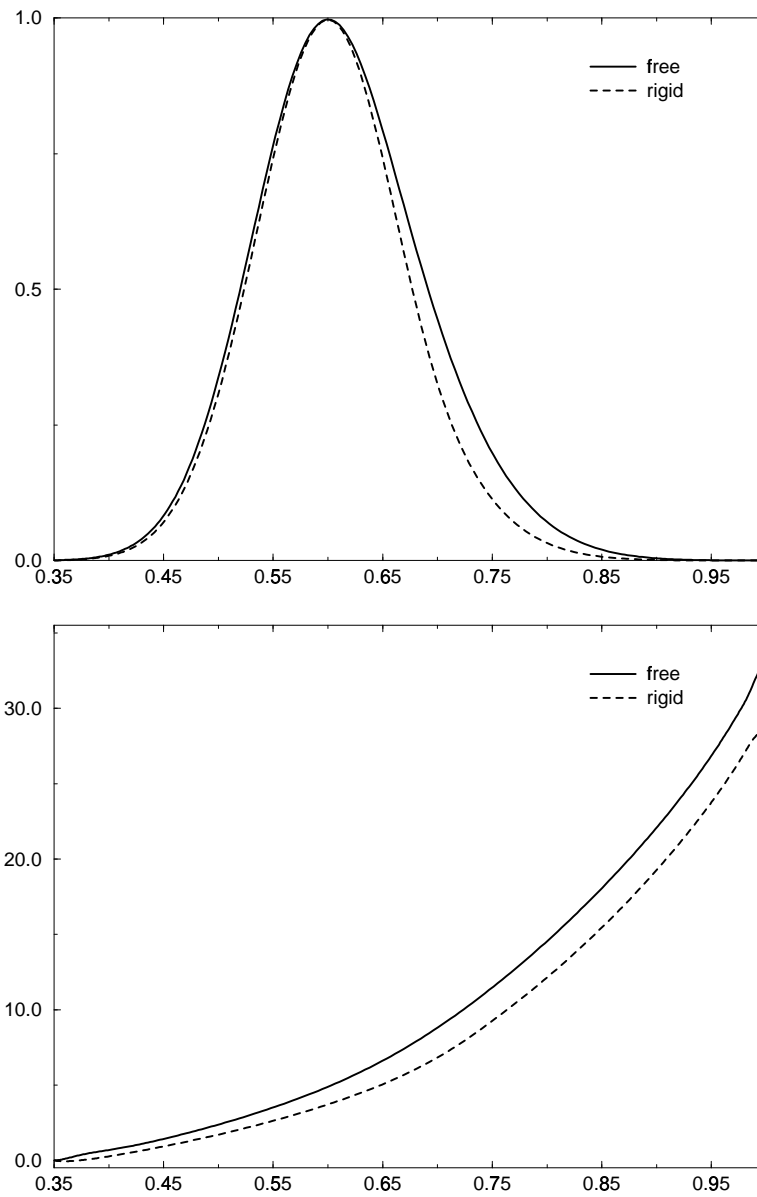


FIG. 4.20 – Comparaison de la structure radiale de la solution en contraintes horizontales nulles et en rigide pour $Ta = 10^{12}$, en chauffage uniforme $\underline{\beta}$. Le premier graphe représente l'amplitude, et le second la phase.

Le comportement spatial des solutions en condition de non-glissement et en condition de contraintes horizontales nulles semble converger lentement vers la même limite. Leur comportement temporel en revanche reste différent pour les nombres de Taylor que nous avons étudiés jusqu'à présent. L'étude de nombres de Taylor plus élevés permettra de déterminer si les pulsations convergent¹⁸.

On peut donc noter que la limite asymptotique proposée par Busse ne semble pas être la limite de notre solution numérique pour les grands nombres de Taylor. Le seuil de la solution numérique est plus élevé, et sa structure radiale plus large que la fonction utilisée pour l'étude asymptotique. Nos simulations semblent donc en accord avec l'étude de Soward 1977, mais également avec les mesures expérimentales, pour lesquelles le mode critique observé est plus proche de celui que nous observons que de celui prédit asymptotiquement.

Étudions à présent le cas du **chauffage avec une différence de température Δ** . Comme nous l'avons montré graphiquement au début de ce chapitre, ce mode de chauffage mène à un problème moins bien posé (voir figure 4.7). On observe que le critère de stabilité numérique (sur le pas de temps) pour ce mode de chauffage est inférieur à celui du chauffage uniforme.

On obtient les instabilités suivantes (représentées sur la figure 4.21).

Ta	m_c	R_c	ω_c	$\mathcal{E}(R_c)$	$\mathcal{E}(\omega_c)$
10^6	3	$2.68 \cdot 10^4$	-7.07		
10^7	4	$7.38 \cdot 10^4$	-38.89	0.44	0.740
10^8	5	$2.39 \cdot 10^5$	-99.71	0.51	0.409
10^9	7	$8.59 \cdot 10^5$	-240.66	0.55	0.382
10^{10}	9	$3.24 \cdot 10^6$	-550.17	0.58	0.359
10^{11}	13	$1.27 \cdot 10^7$	-1262.29	0.59	0.361
10^{12}	19	$5.15 \cdot 10^7$	-2845.45	0.61	0.353

Les paramètres semblent vérifier les mêmes lois de puissance que précédemment. Cependant pour un nombre de Taylor fixé l'exposant calculé est plus éloigné de l'exposant théorique pour ce mode de chauffage. La solution est différente de celle obtenue en chauffage $\underline{\beta}$ et les coefficients diffèrent (ils sont également moins convergés puisque l'exposant est moins proche de celui attendu).

	$Ta = 10^8$	$Ta = 10^9$	$Ta = 10^{10}$	$Ta = 10^{11}$	$Ta = 10^{12}$
$C_m = m_c/Ta^{1/6}$	0.23	0.22	0.19	0.19	0.19
$C_R = R_c/Ta^{2/3}$	1.11	0.86	0.69	0.59	0.51
$C_\omega = -\omega_c/Ta^{1/3}$	0.21	0.24	0.25	0.27	0.28

Comme le prévoit l'étude en perturbation, l'instabilité ne se concentre pas autour d'un cylindre critique de rayon s_c caractéristique de la solution, comme

18. Une étude non-linéaire sera nécessaire déterminer si leur comportement est semblable loin du seuil.

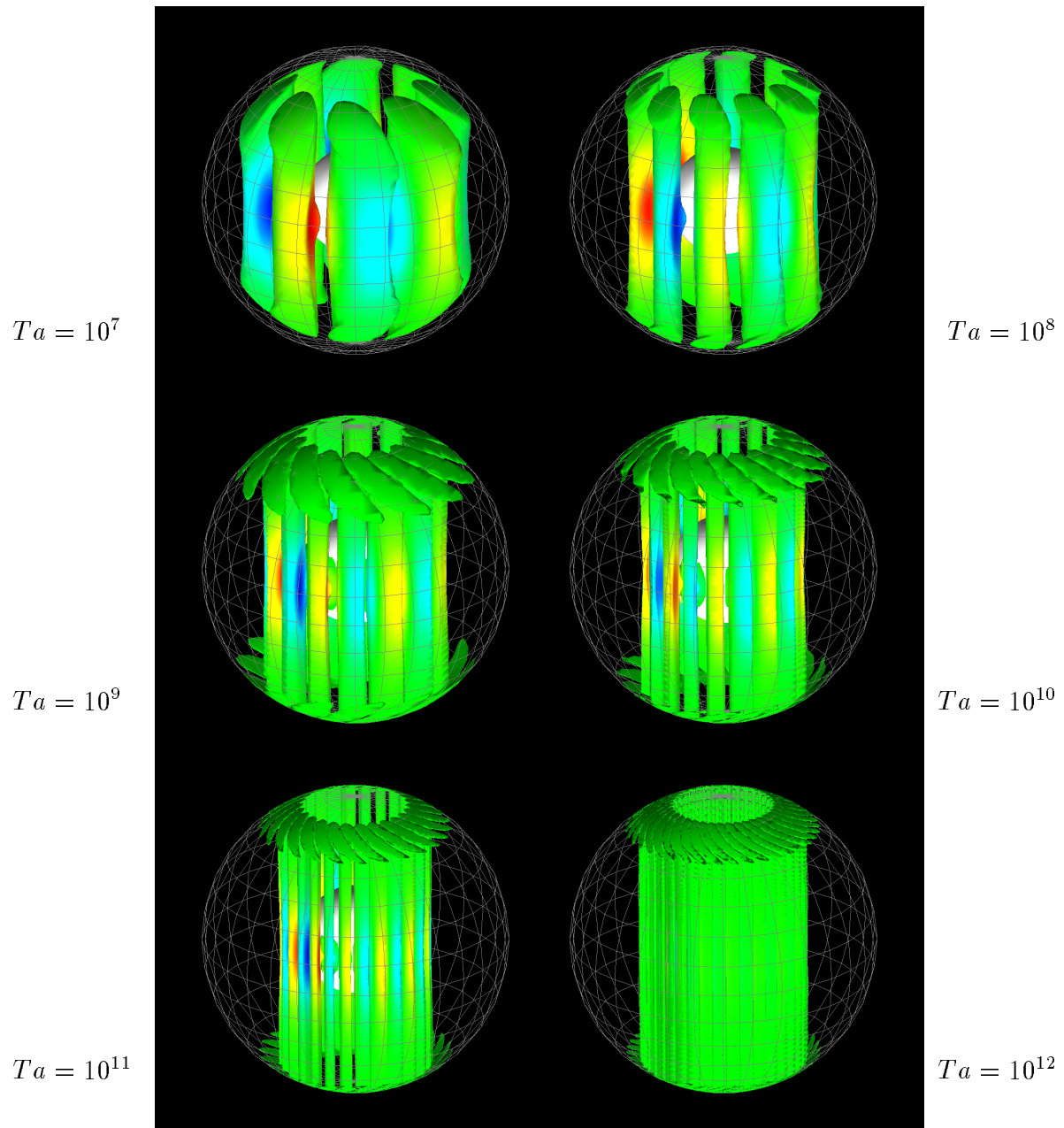


FIG. 4.21 – Surfaces d'isovaleurs de la composante axiale de la vorticité en chauffage \triangle .

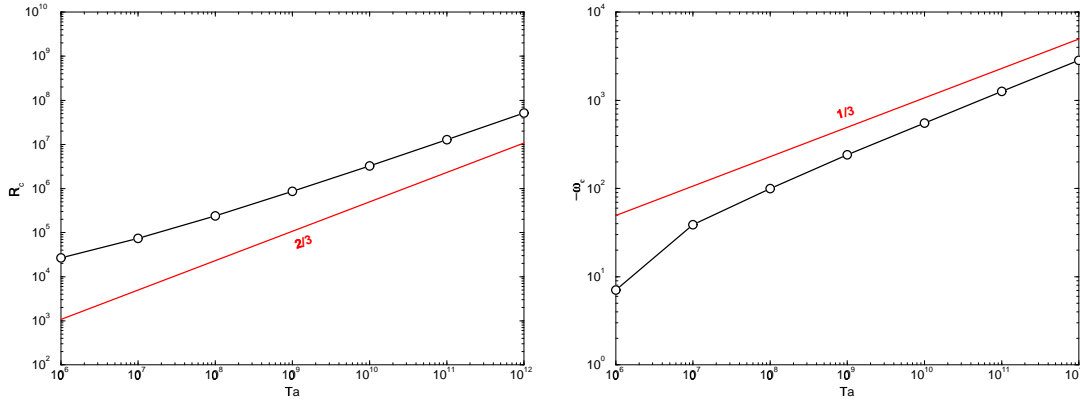


FIG. 4.22 – Môme représentation que pour la figure 4.15, mais en chauffage $\underline{\Delta}$. Les variations du nombre de Rayleigh critique, et de la pulsation au seuil, semblent à nouveau s’approcher des lois asymptotiques de Busse (1970).

cela était le cas précédemment, mais elle s’approche du cylindre tangent à la sphère interne. Pour cette raison les structure radiales diffèrent beaucoup du cas précédent (voir figures 4.23 et 4.24).

La structure radiale est, dans ce cas encore, plus large qu’une fonction de Bessel (voir figure 4.25). La dérivée verticale de u_z met également en évidence une couche limite qui se développe près de l’équateur de la sphère interne, et est absente du cas précédent.

Le troisième et dernier mode de chauffage que nous étudions est le **chauffage différentiel avec flux de chaleur fixé à la sphère externe**. Bien que ce soit le mode de chauffage que nous avons choisi pour modéliser la convection dans le noyau terrestre, nous avons dû nous restreindre à des nombres de Taylor moins élevés. Ce mode de chauffage est en effet le plus difficile de ceux que nous avons étudiés à résoudre numériquement. Le critère de stabilité numérique y est plus restrictif encore que celui du chauffage $\underline{\Delta}$.

Nous obtenons les paramètres suivants

Ta	m_c	R_c	ω_c	$\mathcal{E}(R_c)$	$\mathcal{E}(\omega_c)$
10^3	2	$3.915 \cdot 10^4$	1.40		
10^4	2	$4.838 \cdot 10^4$	3.56	0.097	0.405
10^5	2	$8.644 \cdot 10^3$	3.10	-0.748	-0.060
10^6	2	$1.818 \cdot 10^4$	-3.50	0.323	0.052
10^7	1	$5.621 \cdot 10^4$	-3.85	0.490	0.041
10^8	5	$2.394 \cdot 10^5$	-97.96	0.629	1.405
10^9	7	$8.5998 \cdot 10^5$	-239.99	0.555	0.389
10^{10}	9	$3.2437 \cdot 10^6$	-549.95	0.576	0.360
10^{11}	13	$1.2731 \cdot 10^7$	-1261.5	0.594	0.360

On note que pour les nombres de Taylor élevés cette solution présente les mêmes

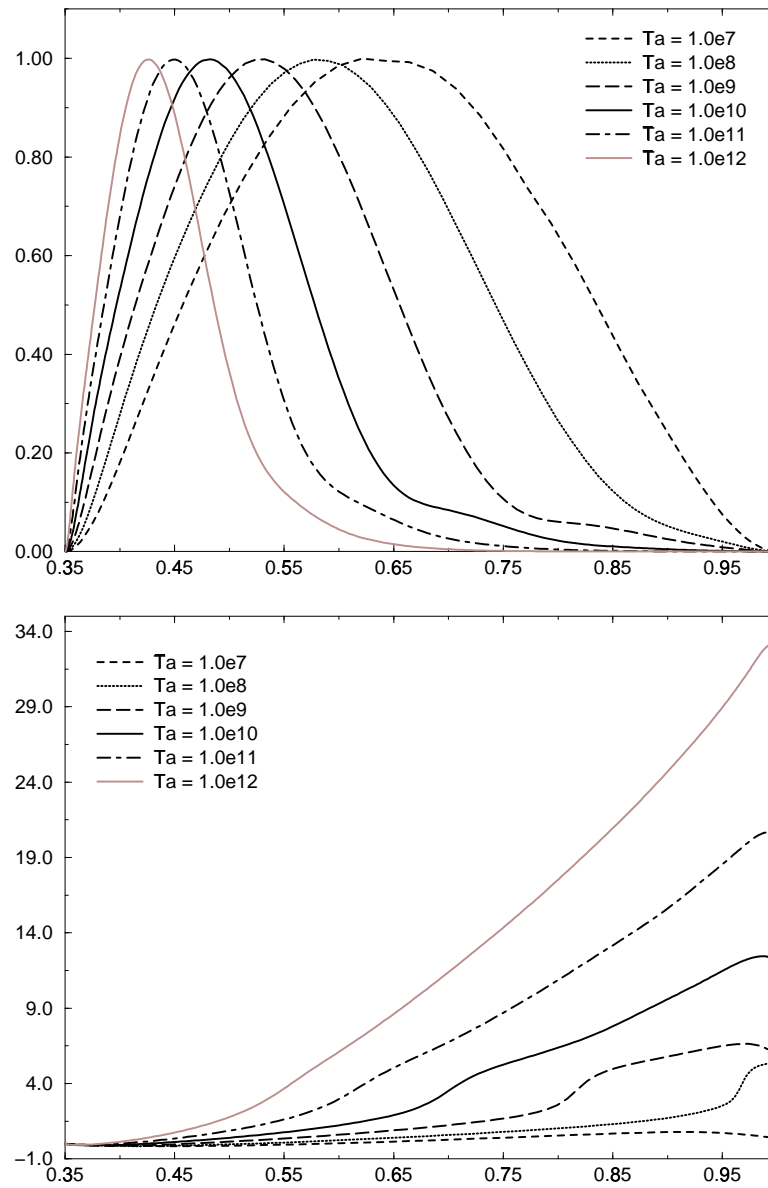


FIG. 4.23 – Structure radiale de la solution en chauffage différentiel, en fonction du nombre de Taylor, et pour $Pr = 1$. Le premier graphe représente l'amplitude, et le second la phase.

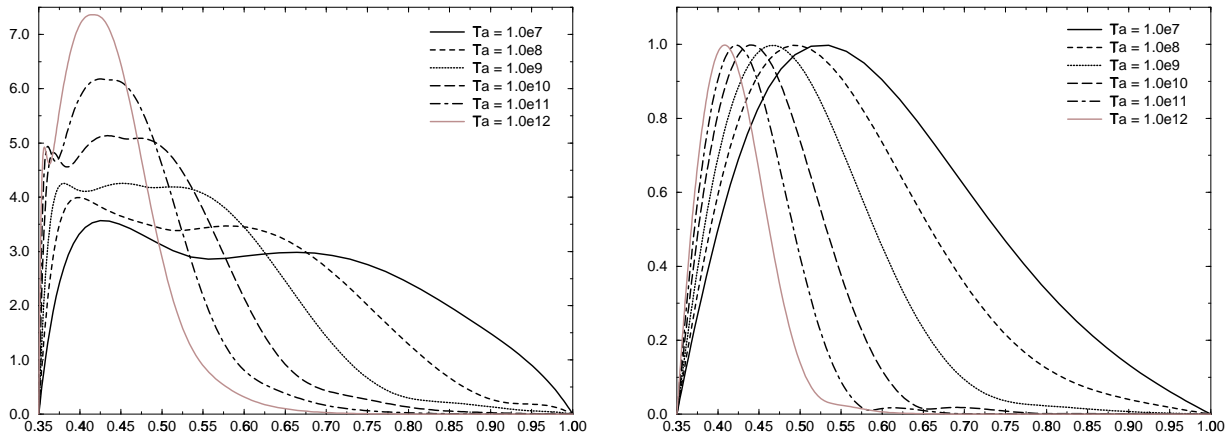


FIG. 4.24 – Structure radiale de la solution en vitesse S_1 à gauche et en température S_2 à droite, en chauffage différentiel.

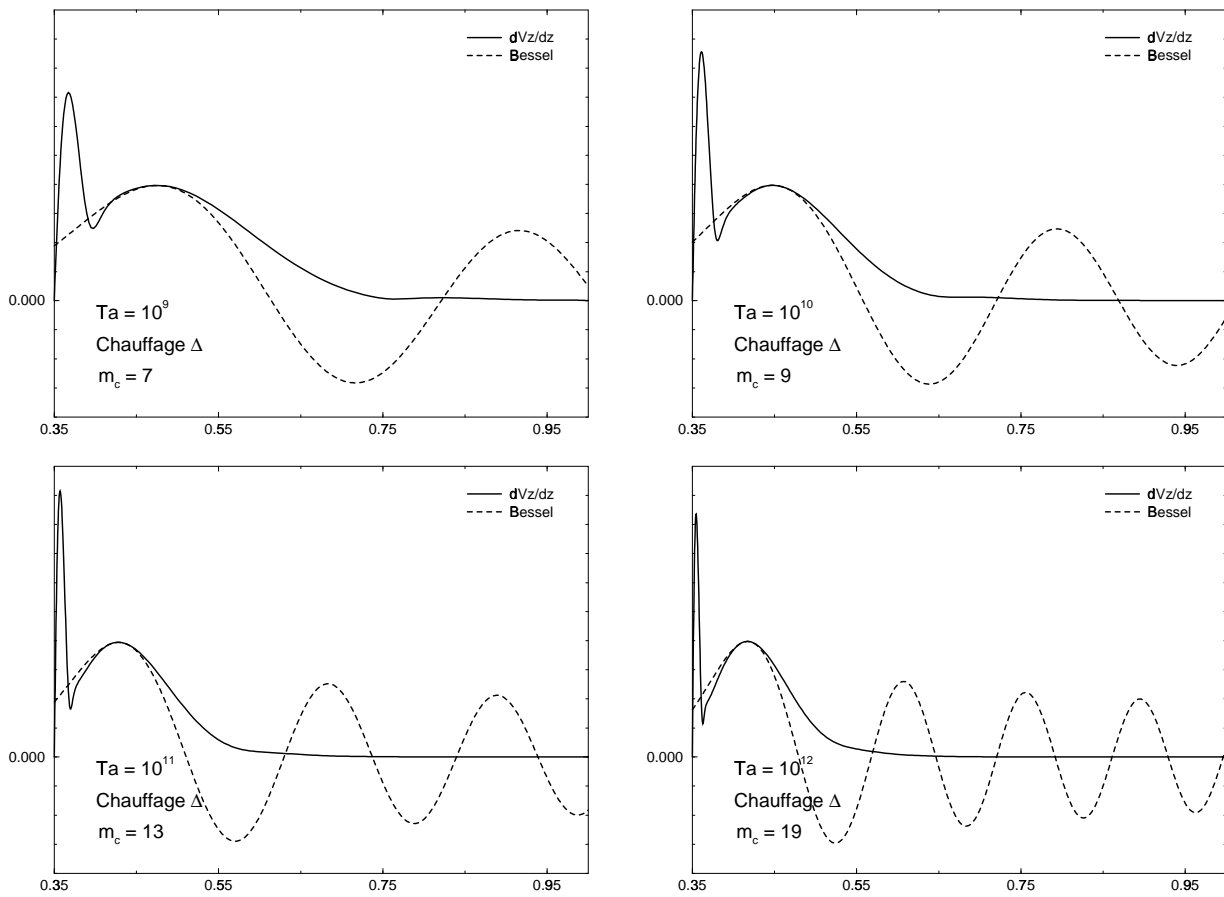


FIG. 4.25 – Comparaison avec les fonctions de Bessel cylindriques dans le cas du chauffage différentiel (Δ).

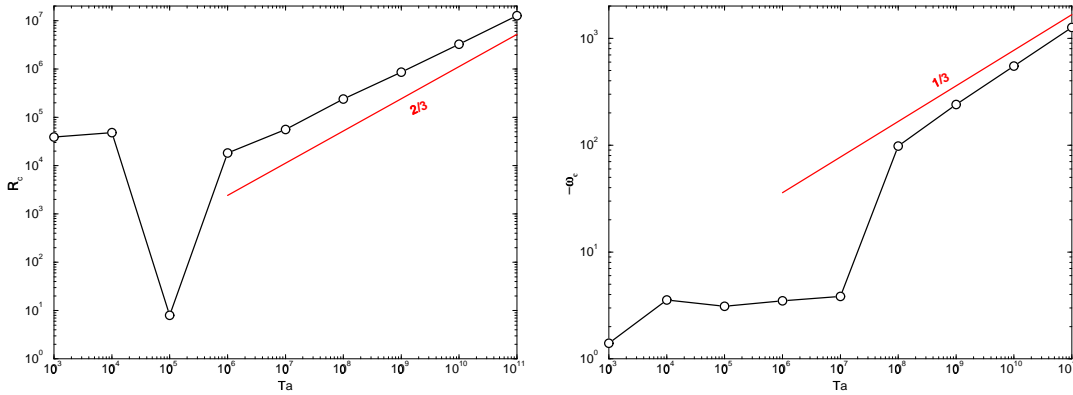


FIG. 4.26 – Comme sur les graphes 4.15 et 4.22, les variations du nombre de Rayleigh critique, et de la pulsation au seuil pour le chauffage Φ , semblent s'approcher des lois asymptotiques de Busse (1970). Cela n'a rien d'étonnant, puisque le seuil pour cette instabilité s'approche du seuil de $\underline{\Delta}$.

paramètres critiques que celle obtenue avec le chauffage $\underline{\Delta}$. Les exposants suivent donc naturellement les mêmes lois asymptotiques (voir également figure 4.26).

Nous avons également étudié des nombres de Taylor peu élevés (jusqu'à 10^3) pour ce chauffage. Un comportement très différent de celui des autres modes de chauffage est observé pour les nombres de Taylor intermédiaires. Pour $Ta \in [10^3, 10^5]$ la pulsation de la solution est positive, caractérisant un mode d'instabilité différent de celui des grands nombres de Taylor. Au delà de $Ta = 10^6$, la pulsation devient négative, et les exposants se rapprochent de manière régulière des valeurs attendues.

Notons que pour $Ta = 10^7$ le mode $m = 1$ est critique (ce qui correspond à deux rouleaux contra-rotatifs). C'est une caractéristique connue (dans le cas plan sans rotation) des chauffages à flux thermiques fixés que de sélectionner des longueurs d'ondes supérieures à la dimension minimale du système. Hurle et collaborateurs (1967) ont montré dans ce cas que le mode critique tend vers zéro si la conductivité du fluide devient infiniment grande devant celle du conteneur.

Un effet comparable est rapporté par Carrigan et Busse (1983), qui observent de grandes longueurs d'ondes (sans aller jusqu'à $m = 1$) dans leurs expériences de convection. Ils expliquent ce fait par la faible conductivité thermique du Plexiglas (par rapport au liquide).

La rotation rapide du système apporte, une fois encore, un attrait nouveau. Alors que cette géométrie de grande échelle est autorisée lorsque les effets de la rotation ne sont pas trop importants (petits nombres de Taylor), elle s'oppose au théorème de Proudman-Taylor lorsque la rotation devient assez importante pour contraindre l'écoulement, et l'on retrouve dans la limite des grands nombres de Taylor des modes similaires à ceux obtenus en chauffage différentiel.

Ces mouvements de très grande échelle à faible nombre de Taylor rappellent

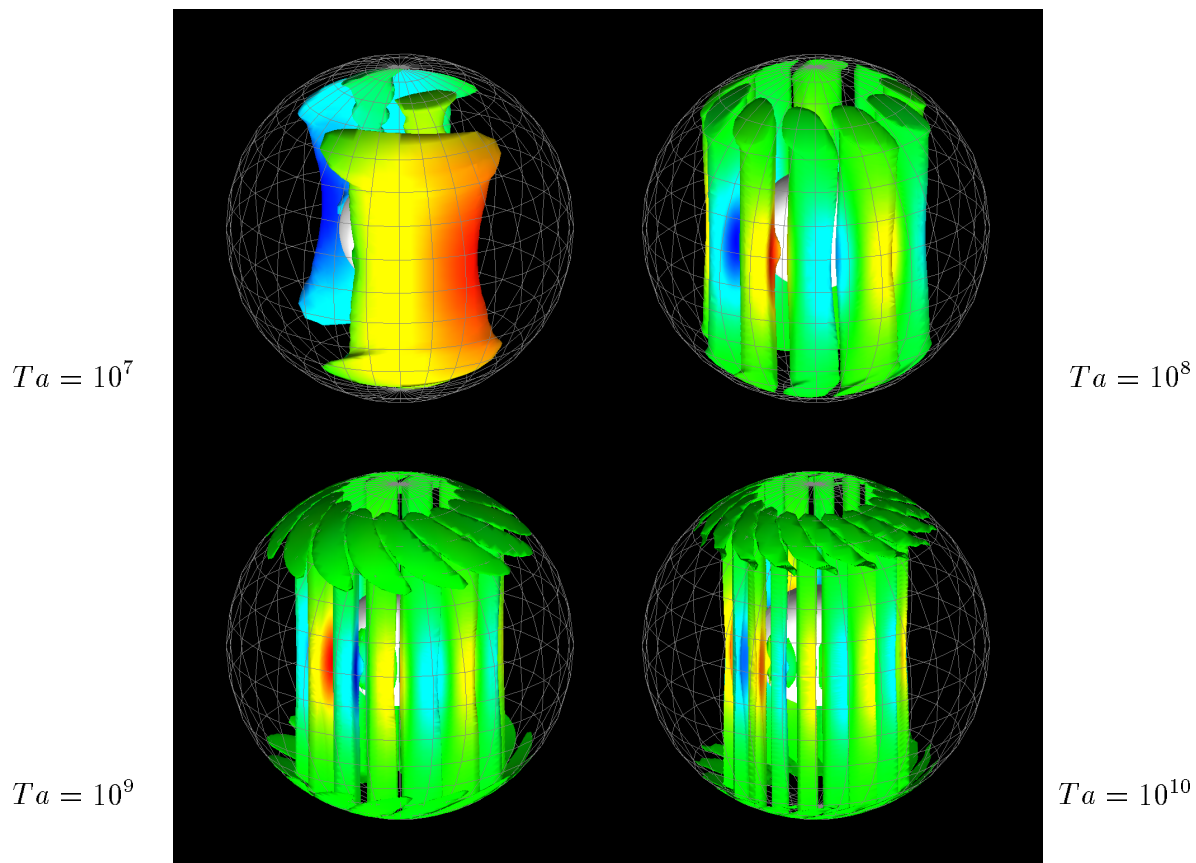


FIG. 4.27 – Surfaces d'isovaleurs de la composante axiale de la vorticité en chauffage $\underline{\Phi}$.

ceux obtenus par inversion de la variation séculaire du champ (voir introduction figure 0.10). Cette ressemblance est sans doute fortuite puisque les mouvements deviennent de plus petite échelle lorsque le nombre de Taylor augmente. On ne peut exclure cependant que cette tendance du système à “sélectionner” des grandes longueurs d’ondes apparaisse à nouveau lorsque l’équilibre géostrophique sera modifié par l’apparition d’autres forces (par exemples magnétiques).

L’étude de la structure radiale de la solution en température (figure 4.28) met bien en évidence l’effet de la rotation rapide sur la solution. Une comparaison de la structure radiale de la solution pour un nombre de Taylor de $Ta = 1.0 \cdot 10^9$ avec celle obtenue en chauffage $\underline{\Delta}$ montre que bien que très proches, les solutions sont différentes, essentiellement près de la sphère externe (figure 4.30).

Notons avant de clore cette section consacrée à la convection linéarisée qu’il serait intéressant d’étudier l’effet d’un flux de chaleur imposé à la graine avec une température imposée au manteau. Ce mode de chauffage est en effet utilisé pour tenter de rendre compte de la convection solutale (e.g. Glatzmaier et Roberts, 1995). Nous reportons cette étude à un travail ultérieur.

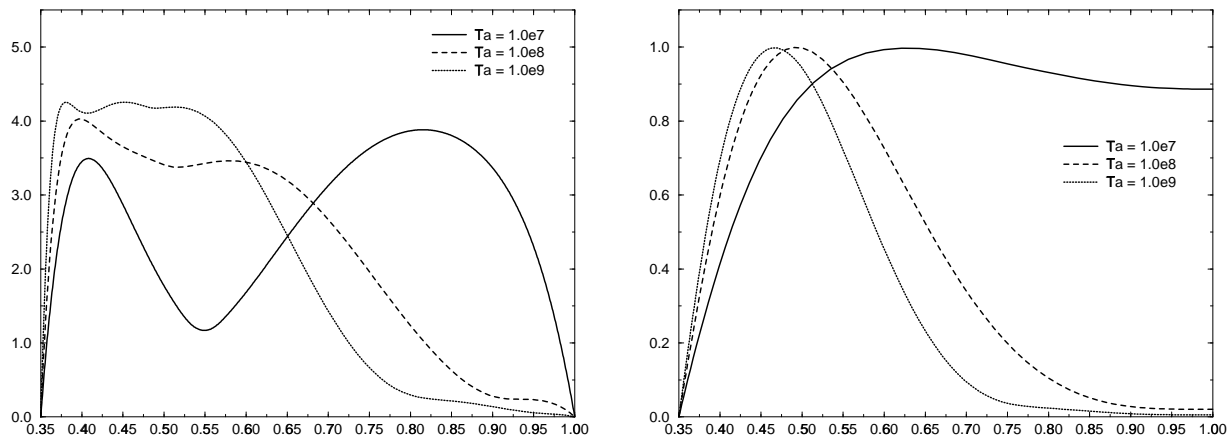


FIG. 4.28 – Structure radiale de la solution en vitesse (S_1) et en température (S_2), chauffage avec flux fixé.

Soulignons enfin que nos résultats numériques semblent en accord avec les observations expérimentales quant au mode critique. Ce résultat est important, car il suggère que le seuil réalisé numériquement, s'il diffère du seuil décrit asymptotiquement, correspond bien au mode d'instabilité dans une coquille sphérique en rotation rapide.

L'étude de la convection au seuil que nous avons menée indique donc que les résultats numériques sont en accord avec les observations expérimentales.

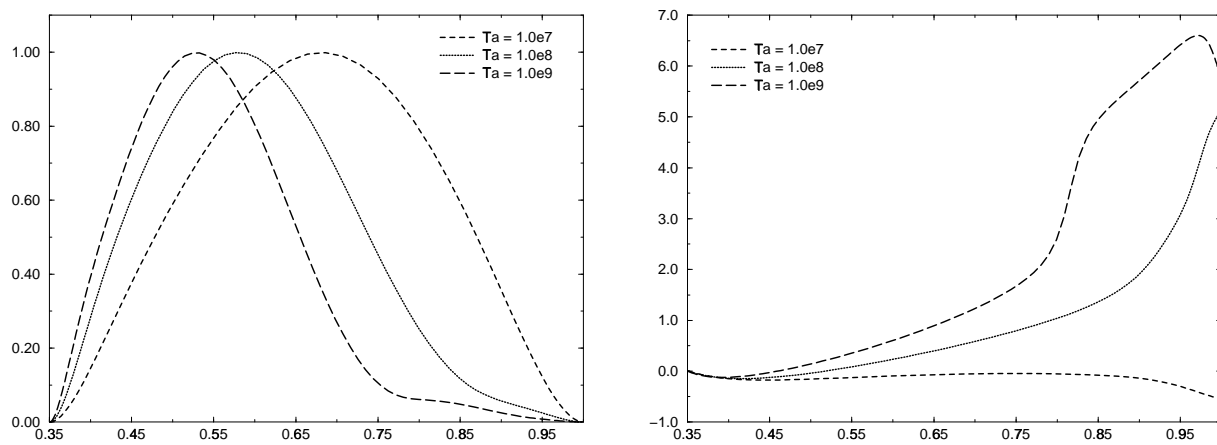


FIG. 4.29 – L'amplitude $A(r)$ de la solution est représentée à gauche, et sa phase $\phi_0(r)$ à droite, pour le mode de chauffage avec flux fixé.

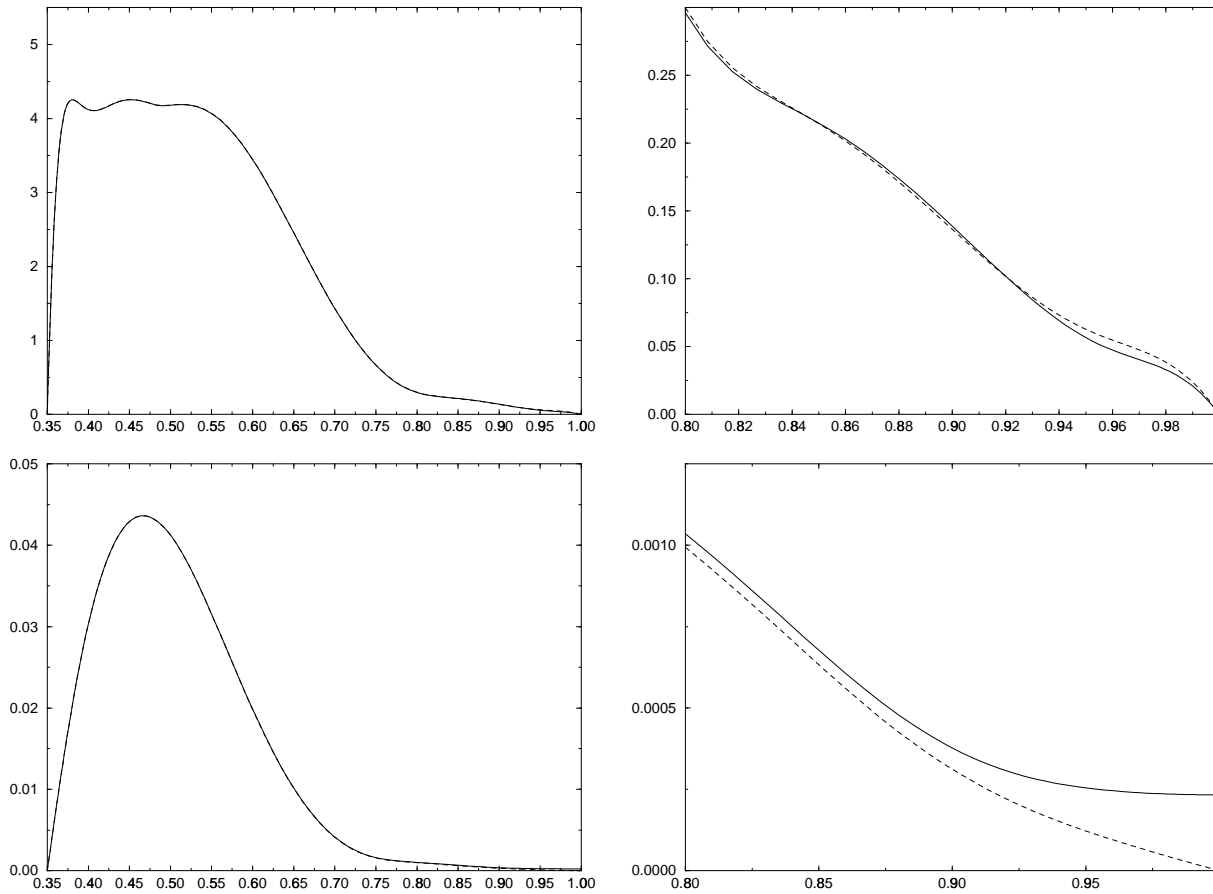


FIG. 4.30 – Comparaison des structures des solutions en chauffage avec flux fixé (en traits continus) et en chauffage différentiel (en pointillés) à $Ta = 1.0 \cdot 10^9$. En haut en vitesse S_1 , en bas en température S_2 . A gauche sur l'ensemble de la coquille : les solutions sont quasi identiques. A droite un agrandissement de la frontière externe : les conditions aux limites thermiques, bien que contrariées par la contrainte de Proudman-Taylor modifient encore la solution.

4.5 Convection d'amplitude finie

Nous avons décrit dans la section précédente l'instabilité convective. Telle qu'elle a été introduite, elle correspond à un mode dont le taux de croissance devient positif. Une croissance exponentielle lors d'un phénomène physique ne saurait aller sans un mécanisme de saturation. C'est à travers les interactions non-linéaires ($\underline{\vec{u}}\nabla\underline{\vec{u}}$ et $\underline{\vec{u}}\nabla\Theta$) que la saturation de la convection intervient.

Considérons une fois de plus, à titre d'exemple, le cas de la convection Rayleigh-Bénard entre deux plans. On peut déterminer linéairement la valeur du seuil de convection (Rayleigh critique) et la géométrie de la convection naissante. Pour déterminer l'amplitude de la convection correspondant à une valeur donnée du paramètre de contrôle, il est toutefois nécessaire d'introduire les non-linéarités. Tant que le nombre de Rayleigh est proche de la valeur critique, les termes non-linéaires modifient peu la géométrie de la solution. Ils en saturent l'énergie, et si l'on fait tendre le paramètre de contrôle vers sa valeur critique, cette énergie tend continûment vers zéro. Il s'agit d'une bifurcation sur-critique. Il existe cependant des systèmes dynamiques pour lesquels la décroissance du paramètre de contrôle jusqu'à sa valeur critique n'entraîne pas l'annulation de l'énergie. Il arrive que les effets non-linéaires permettent alors de décroître le paramètre de contrôle en dessous de sa valeur critique tout en conservant une solution d'amplitude non-nulle (bifurcation sous-critique). Le rôle des non-linéarités est alors bien plus qu'une simple saturation. Quelque soit le mode d'instabilité, lorsque l'on éloigne suffisamment le nombre de Rayleigh de sa valeur critique, les non-linéarités modifient la solution qui devient turbulente (le système dynamique correspondant est alors chaotique). Pour cette première étude, nous nous sommes intéressés à l'étude de la bifurcation, et n'avons pas étudié le régime turbulent.

Etudes analytiques

Dans la deuxième partie de son article de 1977, Andrew Soward introduit les non-linéarités près du seuil. Il montre que la structure radiale en $Ta^{-1/9}$ est alors stabilisée par les effets non-linéaires à l'intérieur d'une couche en $Ta^{-1/18}$ sous la forme d'un soliton (i.e. un phénomène ondulatoire qui reste concentré en espace). Il démontre que pour $R/R_c = 1 + \mathcal{O}(Ta^{-1/9})$ les conditions sont favorables à la convection.

Le travail analytique de Soward suggère donc que dans la limite des très grands nombres de Taylor (des effets en $Ta^{1/18}$ sont considérés petits dans cette étude) la bifurcation est sous-critique. En effet, le seuil linéaire est supérieur à celui défini par l'étude asymptotique (voir section précédente) mais la convection d'amplitude finie existe près de ce seuil (aussi près que l'on veut, en faisant tendre Ta vers l'infini).

Résultats numériques

Notre étude non-linéaire est encore incomplète. Nous nous concentrons, une fois de plus, sur la limite des grands nombres de Taylor.

Les premières interactions non-linéaires couplent les modes multiples du mode critique. L'énergie du mode $m = 0$ est alors non-nulle. En convection linéaire l'énergie du mode $m = 0$ est nulle, et par conséquent le couple visqueux sur la graine l'est aussi. En toute rigueur, en convection non-linéaire un couple visqueux non-nul s'applique à la graine, et celle-ci peut donc tourner. Dans le but de simplifier notre étude, nous avons maintenu la graine en co-rotation avec le manteau.

On ne considère dans un premier temps que le sous-espace formé des harmoniques du mode critique

$$(4.61) \quad m_i = i m_c \quad 1 \leq i \leq m_{max}.$$

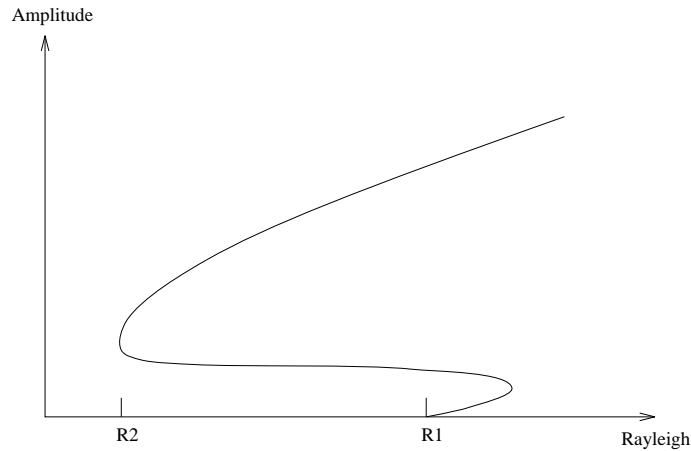
Cela est une bonne approximation tant que d'autres modes que m_c ne deviennent pas critiques¹⁹.

Numériquement cela permet de réduire sensiblement la mémoire utilisée ainsi que le coût du calcul non-linéaire en utilisant un espace physique modifié ($m' = m/m_c$).

Une première étude de ce problème a été menée par Zhang (dans l'article déjà cité de 1992). La méthode utilisée pour traiter les non-linéarités dans cet article (Galerkin), introduisant des intégrales de couplages, ne permet pas d'étudier le régime fortement non-linéaire (le nombre d'intégrales à calculer croissant rapidement avec le degré de non-linéarité). Zhang étudie divers nombres de Prandtl et montre que le démarrage de la convection est sur-critique.

Cette observation sera reprise par Proctor (1994). Pour réconcilier les observations numériques avec la description analytique, il propose le diagramme de bifurcation suivant :

19. Notons que l'étude linéaire de la section précédente ne nous apprend rien sur le domaine de validité de cette simplification. Cela pour deux raisons : il faudrait effectuer une étude de stabilité par rapport à un nouvel état de base (celui fixé par le mode critique) ; les interactions non-linéaires avec le mode $m = 0$ peuvent tendre à déstabiliser un mode encore stable linéairement.



L'étude numérique étant menée près de la valeur critique du nombre de Rayleigh, seule la branche sur-critique de ce diagramme aurait pu être décrite numériquement.

Comme précédemment, nous commencerons par l'étude du chauffage uniforme (β). Notre approche (par collocation) permettant d'augmenter le degré de non-linéarité à moindre coût, nous avons étudié pour un nombre de Taylor de 10^8 si un tel comportement peut être observé numériquement. Nous avons étudié des valeurs de R_c allant jusqu'à $10.0 \times R_c$, sans observer ce type de comportement (voir figure 4.31).

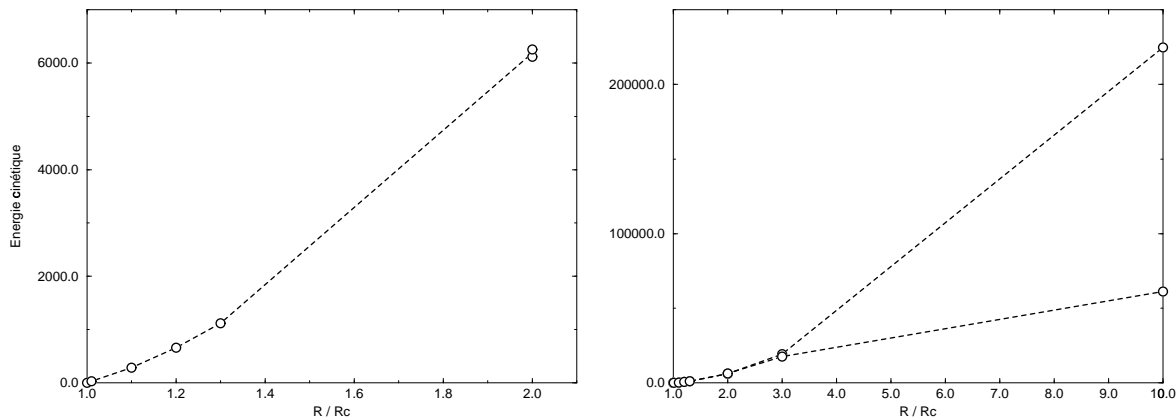


FIG. 4.31 – Diagramme de bifurcation jusqu'à des nombres de Rayleigh deux fois critiques (à gauche), puis jusqu'à dix fois critique (à droite) pour $Ta = 10^8$, $Pr = 1.0$ et en chauffage uniforme.

Lorsque le nombre de Rayleigh atteint deux fois sa valeur critique, l'énergie ne se stabilise plus en temps mais adopte un profil oscillant. Un tel comportement a également été observé expérimentalement (Cordero et Busse, 1992) et numériquement (Zhang, 1992), il correspond aux modifications de la solution par les

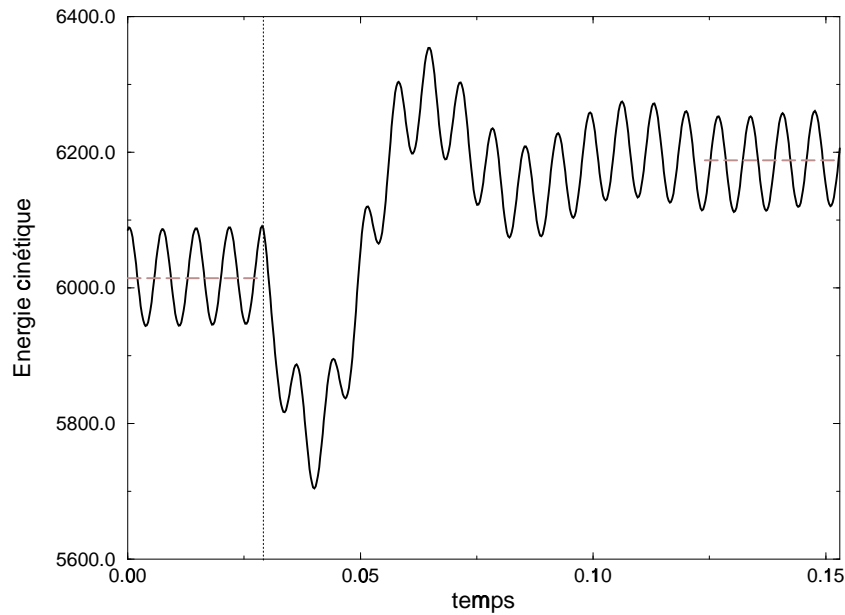


FIG. 4.32 – Evolution temporelle de l'énergie cinétique de la convection pour $Ta = 10^8$ pour un nombre de Rayleigh deux fois critique en chauffage uniforme. Dans un premier temps on ne conservant que les multiples du mode critique, puis (trait vertical pointillé) en introduisant les autres modes. L'énergie moyenne de la solution n'est modifiée que d'environ 3% .

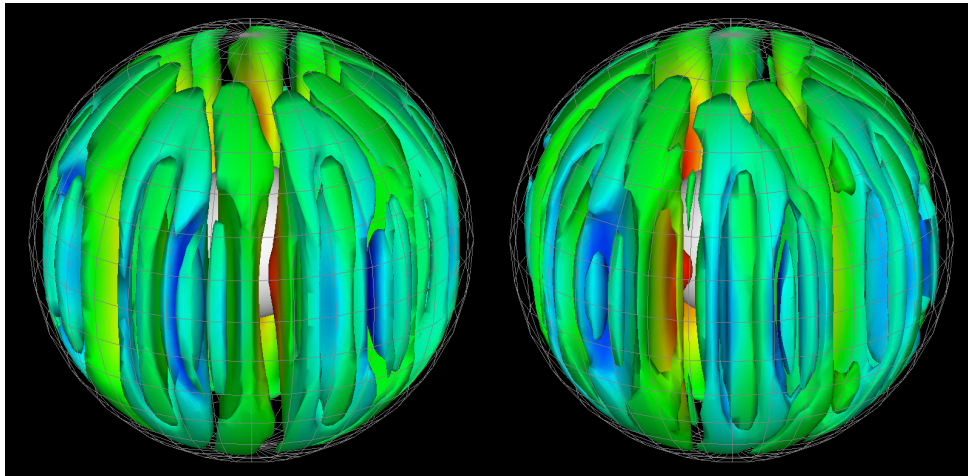


FIG. 4.33 – Convection en chauffage uniforme pour $Ta = 10^8$ pour un nombre de Rayleigh deux fois critique. On représente une isovaleur de la composante axiale de la vorticité (hors couches limites) est représentée à gauche en maintenant la solution artificiellement périodique en ne conservant que les multiples du mode critique, à droite en levant cette contrainte. Le code de couleur correspond à l'anomalie de température.

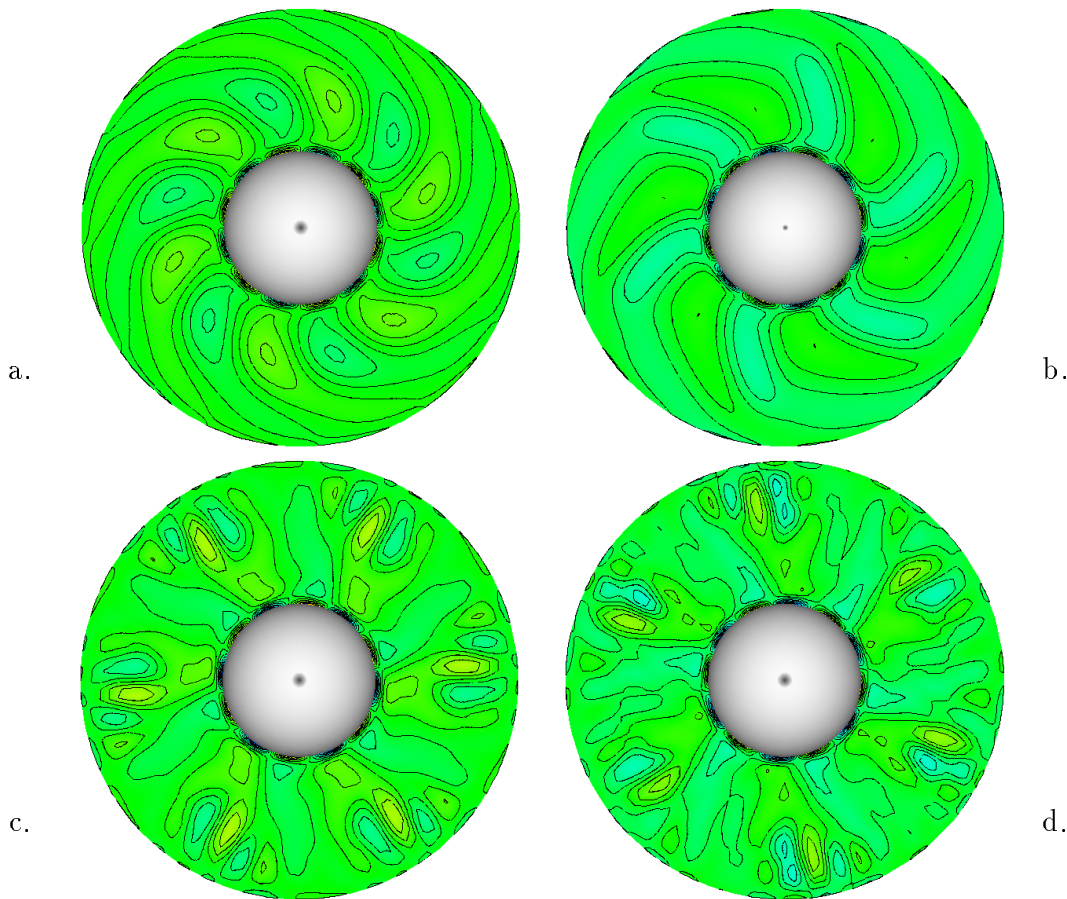


FIG. 4.34 – Convection en chauffage uniforme pour $Ta = 10^8$, coupes équatoriales de la composante axiale de la vorticité, au seuil (a), pour $R = 1.3 \times R_c$ (b) et pour $R = 2.0 \times R_c$ en maintenant la solution artificiellement périodique (c) et en levant cette contrainte (d).

termes non-linéaires qui précédent l'apparition de la turbulence. Nous pensons donc que le diagramme proposé par Proctor n'est pas réalisé pour $Ta = 10^8$.

Nous avons vérifié que notre approche consistant à ne modéliser que les modes multiples du mode critique est fondée. Pour cela, nous avons introduit l'ensemble des modes inférieurs au degré de troncature, et observé les modifications qu'ils apportent sur la solution pour un nombre de Rayleigh deux fois critique. L'énergie moyenne de la solution n'est modifiée que d'environ 3% (voir figure 4.32), et la structure de la solution ne devient que faiblement apériodique (voir figures 4.33 et 4.34). Notons également que la solution obtenue est faiblement antisymétrique, comme le montrent les lignes courants représentées figure 4.35 (  comparer à celles de la figure 4.14).

Lorsque le nombre de Rayleigh est deux fois critique, la pulsation du mode

critique se met également à osciller, nous avons représenté figure 4.37 la variation de la pulsation du mode dominant avec le nombre de Rayleigh, celle-ci atteint à peine 20% lorsque la pulsation se met à osciller. Nous confirmons donc l'hypothèse faite par Cordero et Busse de faible variation de la pulsation avec le nombre de Rayleigh. Ils l'utilisent pour déterminer expérimentalement la vitesse de phase ω de la convection au seuil. Gênés en cela par le vent thermique, ils font l'hypothèse que ω varie peu avec le nombre de Rayleigh, pour éliminer l'effet du vent thermique qui varie avec ce paramètre. Une erreur de 20% sur leur courbe ne modifierait que peu leur solution.

Nous avons effectué une simulation utilisant leurs paramètres ($\eta = 0.56$, $Ta = 8.91 \cdot 10^6$, $Pr = 6.19$). Nous obtenons les paramètres critiques suivants

$$R_c = 2.22 \cdot 10^5 ,$$

$$m_c = 8 ,$$

$$-\omega_c/\Omega = 1.8 \cdot 10^{-3} ,$$

(nous donnons $-\omega_c/\Omega$ pour permettre une comparaison avec leur étude). Leur diagramme permet de déterminer que la pulsation expérimentale est proche de $2.6 \cdot 10^{-3}$ (voir leur figure 4). L'accord entre les observations et les simulations est donc raisonnable. Nous précisons la comparaison en entreprenant des calculs non-linéaires pour le jeu de paramètres ci-dessus. Nous obtiendrons ainsi la loi de variation de la pulsation avec le nombre de Rayleigh. Nous pourrions alors reprendre la méthode proposée par Cordero et Busse pour calculer plus précisément le facteur correctif dû au vent thermique. Si la variation de la pulsation s'aurait similaire à celle que nous avons obtenue ici, la valeur expérimentale de la pulsation serait plutôt $2.2 \cdot 10^{-3}$ au lieu de $2.6 \cdot 10^{-3}$.

Une autre comparaison avec les études expérimentale peut être celle du flux de chaleur transporté par la convection. Cardin et al. (1994) ont observé que le transport d'un scalaire passif (de la fluoresceine) par la convection développée (jusqu'à cinquante fois critique) dans une sphère en rotation rapide s'effectue essentiellement dans le plan équatorial. En est-il de même de la perturbation de température? Nous observons, figure 4.36, que si le flux de chaleur radial à la sphère externe est essentiellement concentré aux extrémités des rouleaux près du seuil, celui-ci se rapproche de l'équateur lorsque le nombre de Rayleigh augmente.

Guidé par nos observations précédentes (Chapitre III, et première partie de ce Chapitre), nous proposons que le désaccord entre la théorie et les observations numériques puisse résider en l'usage de nombres de Taylor trop petits. Nous avons donc étudié (sur un domaine plus proche du seuil) l'effet du nombre de Taylor sur le diagramme de bifurcation. Notre étude présentée figure 4.38 est malheureusement incomplète. On observe que l'énergie de la solution pour une surcriticité donnée croît avec le nombre de Taylor. Le diagramme de bifurcation se redresse, et pourrait donc éventuellement devenir sous-critique pour les grandes

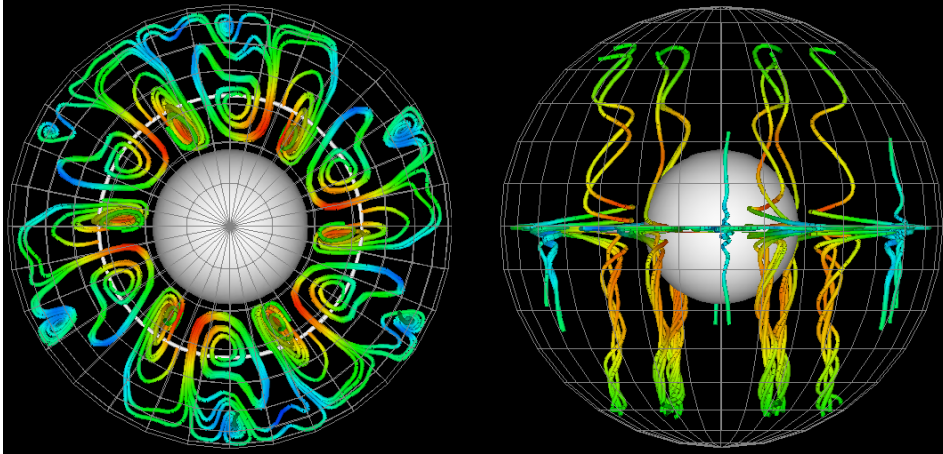


FIG. 4.35 – Lignes de courants pour convection en chauffage uniforme à un nombre de Taylor de 10^8 pour un nombre de Rayleigh deux fois critique (voir la figure 4.14 pour comparaisons). La solution n'est plus tout à fait périodique, et la composante non-axisymétrique est suffisante pour que des lignes de courant franchissent l'équateur.

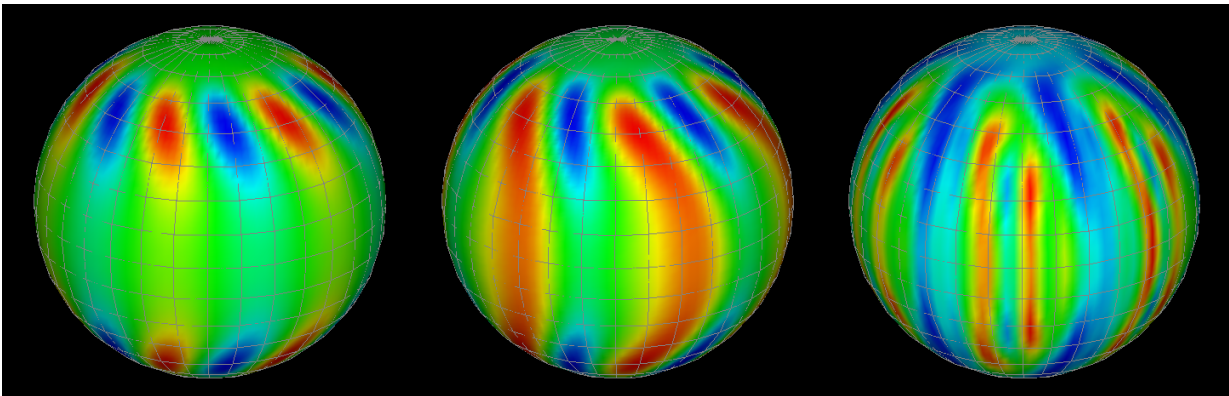


FIG. 4.36 – Flux de chaleur radial transporté par la convection, en chauffage uniforme et à un nombre de Taylor de 10^8 , pour des nombres de Rayleigh (de gauche à droite) R_c , $1,3 \times R_c$ et $2,0 \times R_c$. Celui-ci se rapproche de l'équateur lorsque le nombre de Rayleigh augmente.

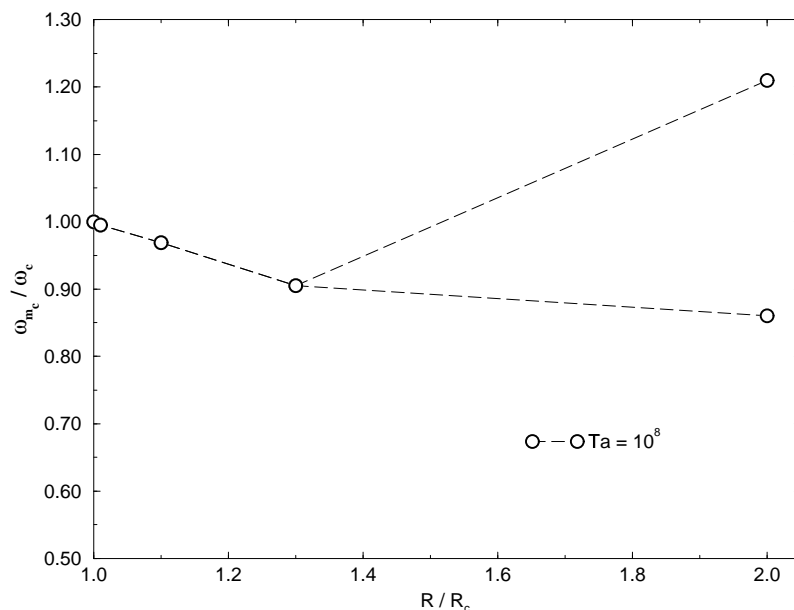


FIG. 4.37 – Evolution de la pulsation en fonction du nombre de Rayleigh. Les points correspondent aux simulations, les lignes pointillées ne sont qu’indicatives. La pulsation pour $R = 2 \times R_c$ oscille entre les deux valeurs reportées.

valeurs du nombre de Taylor. La courbe la plus intéressante ($Ta = 10^{10}$) n’est malheureusement pas assez convergée en temps pour permettre une interprétation définitive. Cette courbe, mieux convergée, ainsi que la courbe pour $Ta = 10^{11}$ seront présentés dans un travail ultérieur.

L’étude de la structure radiale de la solution non-linéaire laisse également penser que les termes non-linéaires commencent à modifier la solution dans le sens de l’étude de Soward. On observe ainsi (figure 4.39) que si l’effet des premières non-linéarités pour un nombre de Taylor de 10^8 est plutôt d’éloigner le centre de la convection de l’axe de rotation, leur effet semble s’inverser et être plus efficace pour un nombre de Taylor de 10^{10} . Les termes non-linéaires rapprochent alors le centre de la convection de la distance à l’axe de 0.5004 correspondant à la solution asymptotique. Ce changement de comportement n’est pas étonnant si l’on considère que le profil de la solution linéaire pour un nombre de Taylor de 10^8 occupe l’ensemble de la section équatoriale, alors qu’il commence à se localiser pour $Ta = 10^{10}$.

Ces observations ne constituent pour l’instant que des indications, mais elles nous encouragent à poursuivre cette étude.

Nous avons commencé une étude comparable pour les deux autres types de chauffage. Elles sont moins avancées car ces chauffages sont plus difficiles à résoudre numériquement. Ces résultats sont présentés figure 4.40. Les courbes de bifurcation se redressent également pour ces chauffages, notons toutefois que l’énergie pour un nombre de Taylor et un rapport R/R_c donné sature plus tôt pour

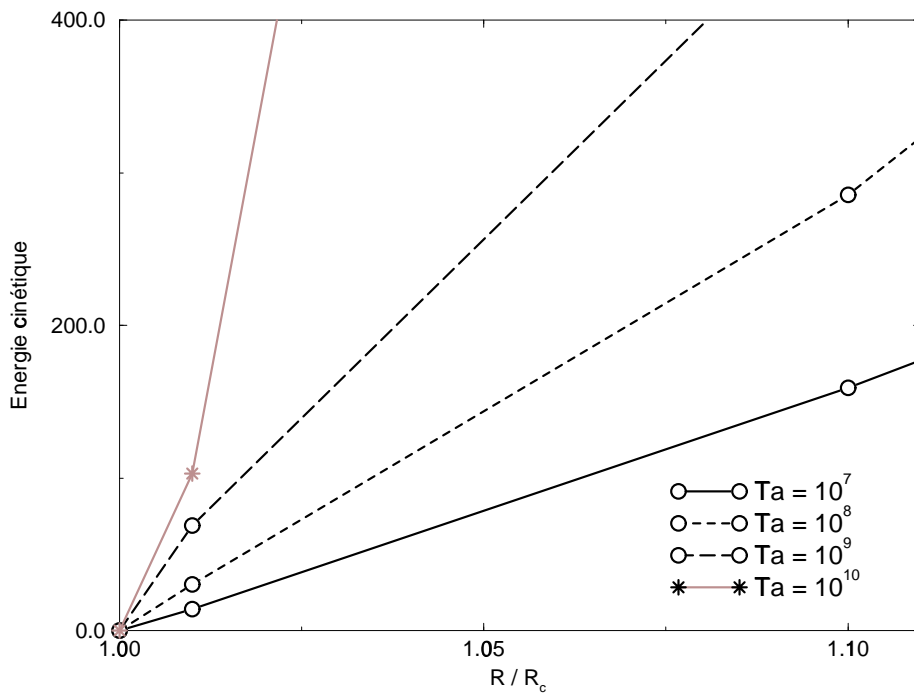


FIG. 4.38 – Diagrammes de bifurcation pour différents nombres de Taylor, en chauffage uniforme. La dernière courbe, représentée en gris, n'est pas encore parfaitement convergée en temps.

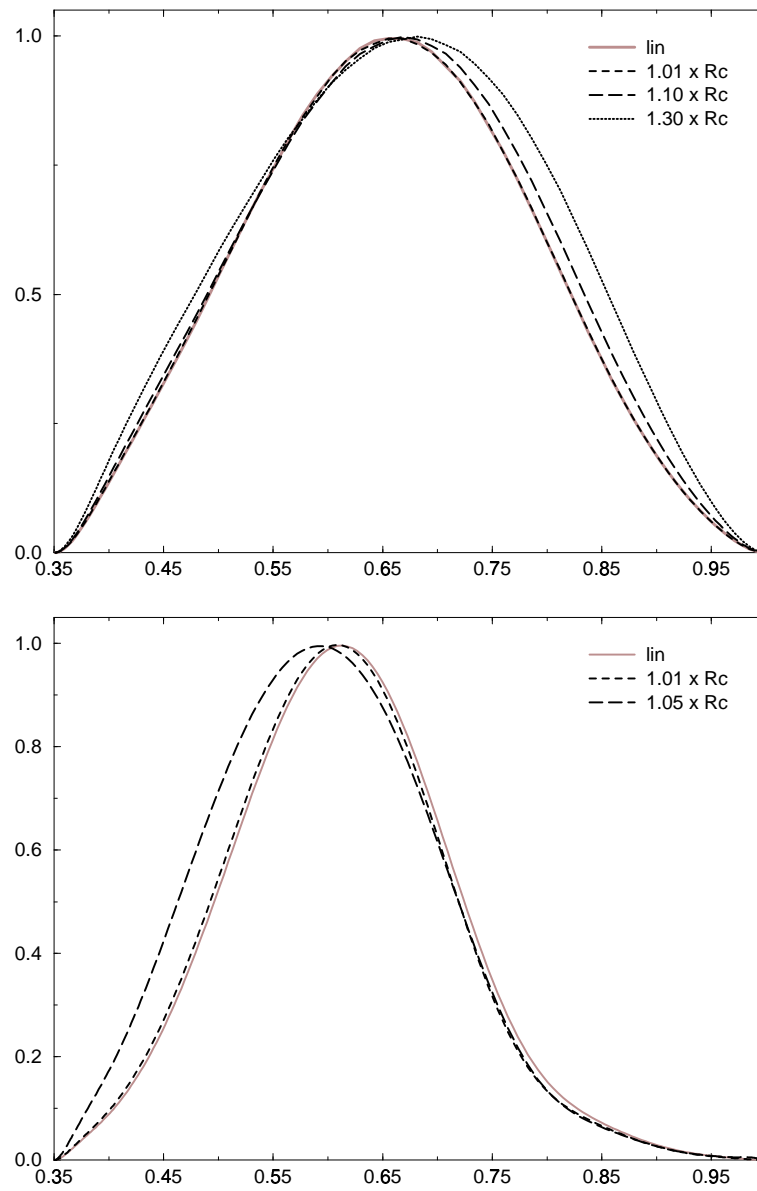


FIG. 4.39 – Calculs non-linéaires en chauffage uniforme. Sur le premier graphe pour $Ta = 10^8$, sur le second pour $Ta = 10^{10}$.

le chauffage $\underline{\Delta}$ que pour le chauffage $\underline{\beta}$, et qu'elle sature encore plus tôt pour le chauffage $\underline{\Phi}$. Ces études ne sont bien entendu pas assez avancées pour pouvoir indiquer si une bifurcation sous-critique peut exister pour ces chauffages.

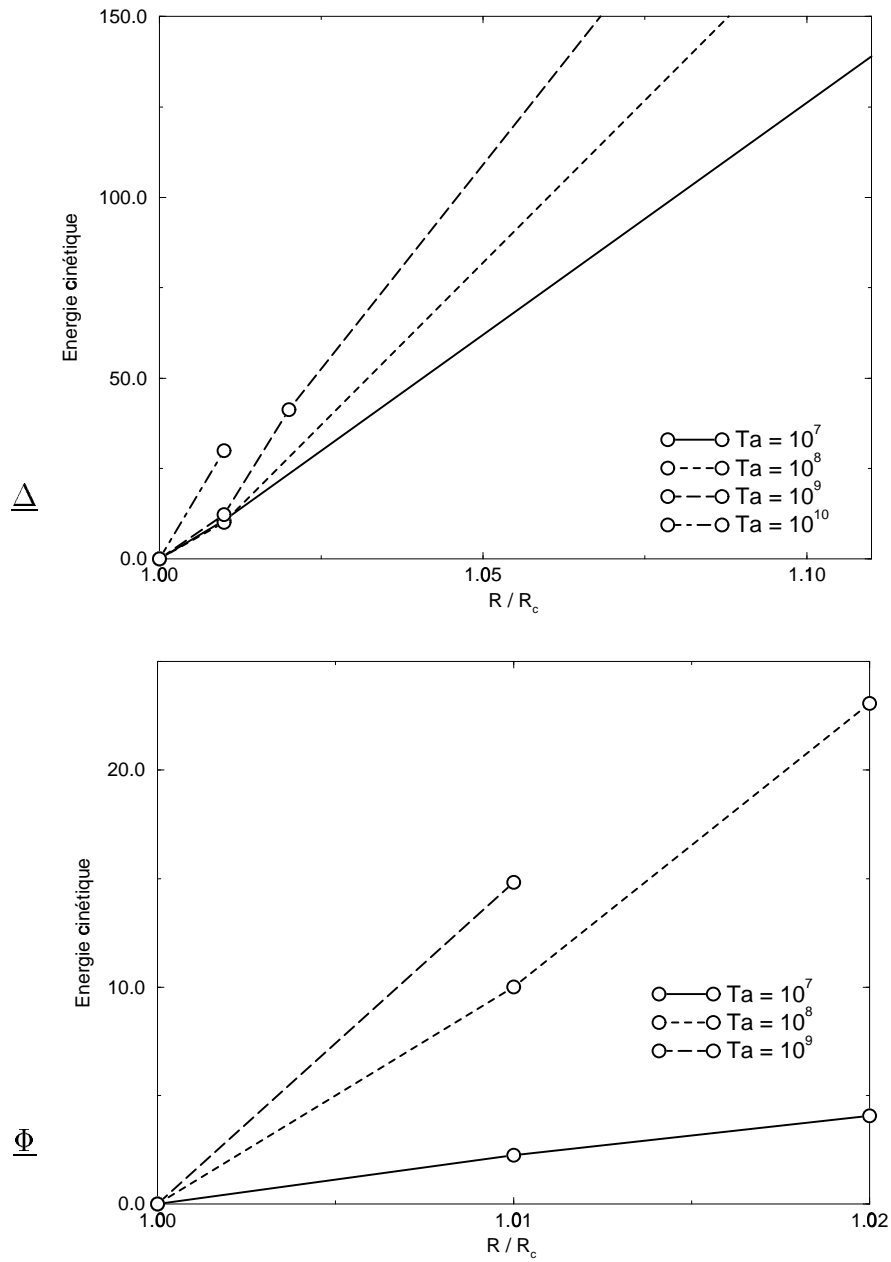


FIG. 4.40 – Diagrammes de bifurcations pour des nombres de Taylor croissants, dans le cas du chauffage \triangle en haut et dans le cas du chauffage \square en bas.

Bibliographie

- M. Ardes, Friedrich Busse et Johannes Wicht, 1997
Thermal Convection in Rotating Spherical Shells
Physics of the Earth and Planetary Interiors, **99**, p. 55–67.
- Friedrich Busse, 1970
Thermal instabilities in rapidly rotating systems
Journal of Fluid Mech., **44**, p. 441–460.
- Friedrich Busse, 1975
Thermal instabilities in rapidly rotating systems
Geophysical J.R. Astr. Soc., **42**, p. 437–459.
- Friedrich Busse, 1982
Thermal convection in rotating systems
Proceeding of the 9th U.S. Nat. Congr. of Appl. Mechanics
A.S.M.E., New-York.
- Friedrich Busse, 1994
Convection driven zonal flows and vortices in the major planets
Chaos, **4**, 2, p. 123–134.
- Philippe Cardin, 1992
*Aspects de la convection dans la terre :
couplage des manteaux inférieur et supérieur,
convection thermique du noyau liquide.*
Thèse Paris VI.
- Philippe Cardin et Peter Olson, 1992
*An experimental approach to thermochemical convection
in the Earth's core*
Geophysical Research Letters, **19**, 20, p. 1995–1998.
- Philippe Cardin et Peter Olson, 1994
*Chaotic thermal convection in a rapidly rotating spherical shell:
conséquences for flow in the outer core*
Physics of the Earth and Planetary Interiors, **82**, p. 235–259.
- C. Carrigan et Friedrich Busse, 1983
*An experimental and theoretical investigation of the onset
of convection in rotating spherical shells*
Journal of Fluid Mechanics, **126**, p. 287–305.

- Sergio Cordero et Friedrich Busse, 1992
Experiments on convection in rotating hemispherical shells: transition to a quasi-periodic state
Geophysical Research Letters, **19**, 8, p. 733–736.
- Sergio Cordero, 1993
Experiments on convection in a rotating hemispherical shell: transition to chaos
Geophysical Research Letters, **20**, 23, p. 2587–2590.
- J. Chamberlain et C. Carrigan, 1986
An Experimental Investigation of Convection in a Rotating Sphere Subject to Time Varying Thermal Boundary Conditions
Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics, **35**, p. 303–327.
- Subrahmanyan Chandrasekhar, 1961
Hydrodynamic and hydromagnetic stability
Oxford, Clarendon Press.
- David Fearn, Paul Roberts, et Andrew Soward, 1986
Convection, stability and the dynamo
Energy stability and convection,
Proceeding of the workshop, Capri 1986,
Longman.
- John Hart, Gary Glatzmaier et Juri Toomre, 1986
Space-laboratory and numerical simulations of thermal convection in a rotating hemispherical shell with radial gravity
Journal of Fluid Mech., **173**, p. 519–544.
- Wolfram Hirsching et Jun-Ichi Yano, 1993
Metamorphosis of marginal thermal convection in rapidly rotating self-gravitating spherical shells
Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics, **74**, p. 143–179.
- D. Hurle, E. Jakeman, et E. Pike, 1967
On the solution of the Bénard problem with boundaries of finite conductivity
Proceedings of the Royal Society of London A, **296**, p. 469–475.
- Jean-Paul Poirier, 1988
Transport properties of liquid metals and viscosity of the Earth's core
Geophys. J., **92**, p. 99–105.
- M. Proctor, 1994
Convection and Magnetoconvection in a Rapidly Rotating Sphere

dans *Lectures on Solar and Planetary Dynamos*
(M. Proctor et A. Gilbert)
Publications of the Newton Institute
Cambridge University Press.

Paul **Roberts**, 1965

On the thermal instability of a highly rotating fluid sphere
The Astrophysical Journal, **141**, 1, p. 240–250.

Paul **Roberts**, 1968

On the thermal instability of a rotating-fluid sphere containing heat sources
Philosophical Transactions A, **263**, p. 93–117.

Andrew **Soward**, 1977

*On the finite amplitude thermal instability
of a rapidly rotating fluid sphere*
Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics, **9**, p. 19–74.

Jun-Ichi **Yano**, 1992

Asymptotic theory of thermal convection in rapidly rotating systems
Journal of Fluid Mechanics, **243**, p. 103–131.

Keke **Zhang** et Friedrich Busse, 1988

*Finite amplitude convection and magnetic field generation
in a rotating spherical shell*
Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics, **44**, p. 33–53.

Keke **Zhang**, 1992

*Spiralling columnar convection in rapidly rotating
spherical fluid shells*
Journal of Fluid Mechanics, **236**, p. 535–556.

Keke **Zhang** et Chris Jones, 1992

*The influence of Ekman boundary layers on rotating convection
spherical fluid shells*
Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics, **71**, p. 145–162.

Keke **Zhang**, 1993

On equatorially trapped boundary inertial waves
Journal of Fluid Mechanics, **248**, p. 203–217.