

mètres, nos résultats par rapport à leur table 2 (donnant m_c, R_c, ω_c pour différents E et rapports d'aspects). Nous avons aussi validé la structure spatiale de notre solution par rapport à leurs figures 2 et 4 (pour deux valeurs différentes du nombre d'Ekman, et les deux types de conditions aux limites cinématiques). Nous reproduisons ces résultats figures 4.5 et 4.6.

4.4.2 Détermination du seuil

Notre approche numérique diffère de celle habituellement employée pour résoudre le problème linéaire. Comme nous anticipons les études ultérieures, nous utilisons une intégration temporelle et non une recherche de vecteurs propres, le problème de la détermination numérique du seuil se pose alors.

On sait que le mode critique croît près du seuil comme

$$(4.30) \quad M = e^{\sigma t} \quad M, \sigma \in \mathbb{C},$$

que ce mode est caractérisé par $m = m_c$ et que les degrés l de ce mode se divisent en deux familles indépendantes $l + m$ pair et $l + m$ impair, qui correspondent aux deux symétries par rapport à l'équateur. Busse (1970) a montré que c'est la famille symétrique par rapport à l'équateur qui est critique. Tous les degrés d'une même famille pour un mode donné suivent la même évolution temporelle. On peut donc suivre en temps l'évolution de l'un de ces coefficients pour chaque famille de chaque mode m et calculer une valeur approchée du coefficient complexe σ correspondant en utilisant un schéma aux différences

$$(4.31) \quad \frac{dM}{dt}(t) = \frac{M(t) - M(t - \delta t)}{\delta t} + \frac{\delta t}{2} \frac{d^2 M}{dt^2}(t) + \mathcal{O}(\delta t^2) = \sigma e^{\sigma t},$$

$$(4.32) \quad \sigma = \frac{1}{M(t)} \left[\frac{M(t) - M(t - \delta t)}{\delta t} + \frac{\delta t}{2} \frac{d^2 M}{dt^2}(t) + \mathcal{O}(\delta t^2) \right].$$

Ce schéma est consistant et convergent lorsque $\delta t \rightarrow 0$, il convient toutefois d'être prudent lors de la détermination du seuil. On cherche à déterminer la valeur du nombre de Rayleigh telle que

$$(4.33) \quad Re(\sigma) = 0,$$

pour cela, on se rapproche par dichotomie (pondérée des taux de croissances) de ce seuil jusqu'à

$$(4.34) \quad |Re(\sigma)| \ll \mathcal{O}(1),$$

puis on linéarise $Re(\sigma)$ comme fonction du nombre de Rayleigh pour déterminer précisément la valeur de R_c connaissant $Re(\sigma(R_c + \varepsilon_1))$ et $Re(\sigma(R_c + \varepsilon_2))$ deux valeurs du taux de croissance près du seuil¹³. On vérifie ensuite à l'aide d'autres points ($\sigma(R_c + \varepsilon_3)$, ...) que la linéarisation est justifiée (c'est-à-dire que l'on est assez près du seuil).

13. où ε_1 comme ε_2 peuvent être négatifs.

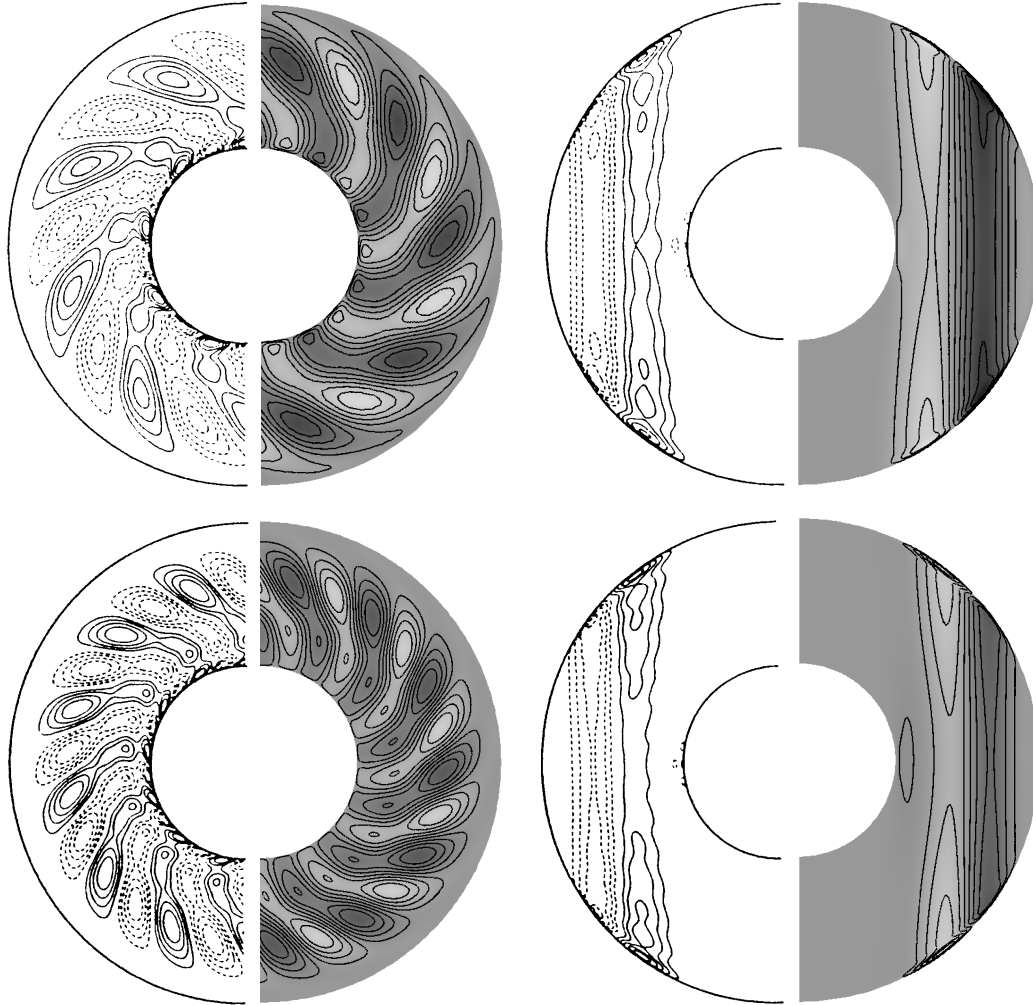


FIG. 4.5 – Validation de deux résultats en conditions aux limites cinématiques de non glissement ($\eta = 0,4$). En haut $E = 5 \cdot 10^{-5}$, $Pr = 0,7$, $m_c = 8$ (mais on obtient bien $m_c = 9$ en n'utilisant que 18 points en rayons, ce qui sous échantillonne la couche d'Ekman), $R_c = 2,36 \cdot 10^6$ ($R_{m=9} = 2,28 \cdot 10^6$ avec 18 points radiaux), $\omega_c = -306,77$. On représente ici le mode $m = 9$ (résolu avec 100 coquilles) bien qu'il ne soit pas critique, pour comparer les structures radiales. En bas $E = 2,5 \cdot 10^{-5}$, $Pr = 7,0$, $m_c = 13$ (c'est bien le mode 13 qui est critique avec plus de résolution), $R_c = 8,60 \cdot 10^6$, $\omega_c = -60,78$. La colonne de gauche contient les coupes équatoriales, celle de droite des coupes méridiennes. Chaque représentation comprend à gauche (en traits) les résultats publiés par Zhang et Jones (1992), et à droite (en niveaux de gris) ceux que nous avons obtenus. Les différences entre les deux solutions (très visibles sur les coupes méridiennes) tient en leurs convergences numériques respectives.

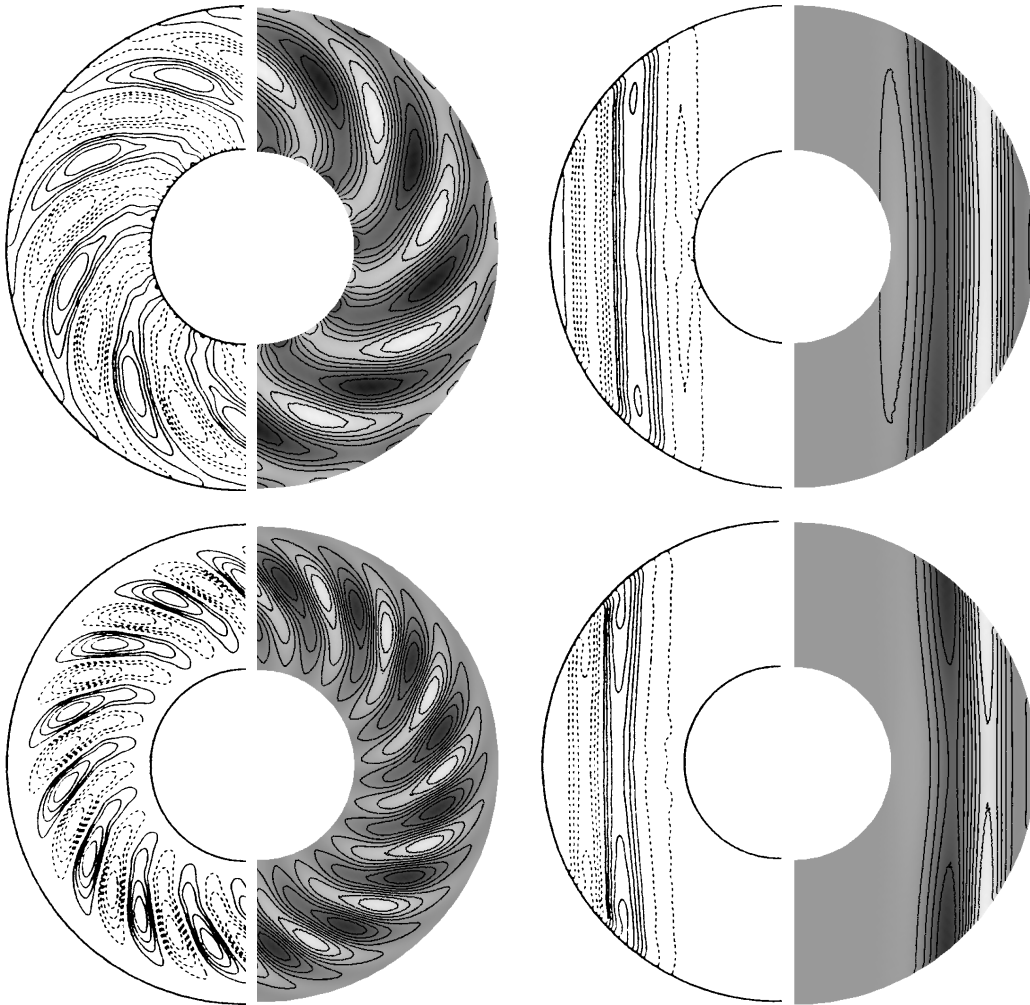


FIG. 4.6 – Validation de deux résultats en conditions aux limites cinématiques de contraintes horizontales nulles ($\eta = 0,4$). En haut $E = 5 \cdot 10^{-5}$, $Pr = 0,7$, $m_c = 9$, $R_c = 2,24 \cdot 10^6$, $\omega_c = -430,49$. En bas $E = 2,5 \cdot 10^{-5}$, $Pr = 7,0$, $m_c = 15$, $R_c = 1,14 \cdot 10^7$, $\omega_c = -102,63$. Comme pour la figure précédente, la colonne de gauche contient les coupes équatoriales, celle de droite des coupes méridiennes, et chaque représentation comprend à gauche (en traits) les résultats publiés par Zhang et Jones (1992), et à droite (en niveaux de gris) ceux que nous avons obtenus.

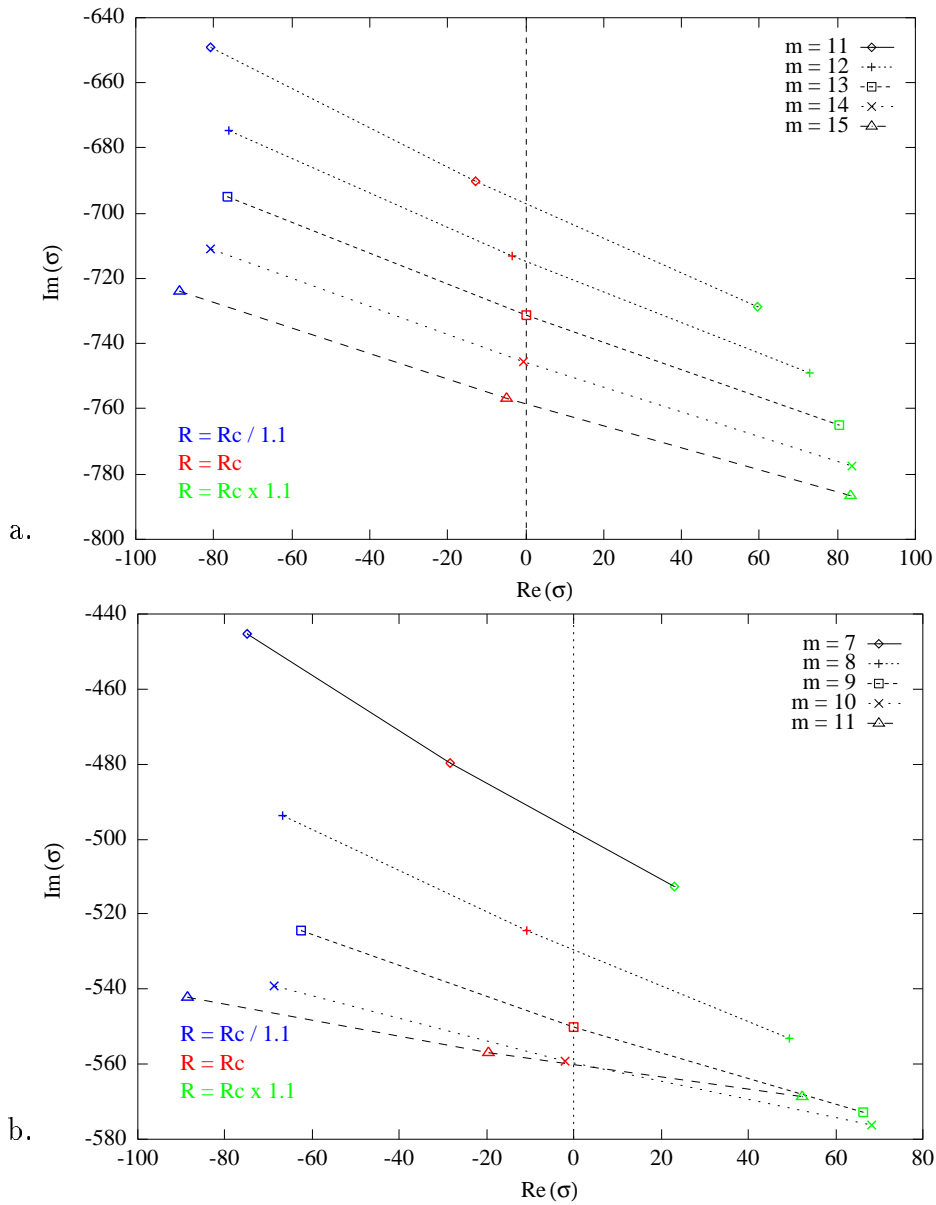


FIG. 4.7 – La bifurcation convective correspond au passage de l'axe imaginaire par une valeur propre. Nous représentons les valeurs propres, correspondant au mode critique et à ses voisins (parties symétriques par rapport à l'équateur), dans le plan complexe pour $Ta = 10^{10}$ (i.e. $E = 10^{-5}$), et pour un nombre de Rayleigh sous critique (bleu), critique (rouge), et sur-critique (vert). Graphe (a), en chauffage uniforme (β), le mode $m=13$ est critique, et que la partie imaginaire de la valeur propre est non-nulle au seuil (vitesse de phase). Graphe (b), en chauffage différentiel (Δ), la trajectoire des valeurs propres est plus compliquée (certaines lignes se croisent) et moins linéaire (sur le même intervalle) que pour le cas précédent. On n'a pas représenté de chauffage avec flux de chaleur imposé (Φ) car pour cette valeur du nombre de Taylor, les valeurs propres se confondent à 3 % près avec celles du cas Δ .

En pratique, on utiliserait donc la formule (4.32) avec un δt constant, fixé par la stabilité du schéma temporel pour la résolution des équations. L'erreur de troncature peut alors être importante, car alors que $Re(\sigma)$ devient très petit en valeur absolue près du seuil, la partie imaginaire $Im(\sigma)$ peut être très grande (surtout quand E est petit). Ainsi l'erreur sur $Re(\sigma)$ peut être importante près du seuil, et peut mener à des taux de croissance positifs alors que le seuil n'est pas encore atteint et que l'énergie du système est décroissante.

Pour cette raison, $Im(\sigma)$ a été calculée à l'aide de ce schéma, alors que $Re(\sigma)$ a été re-calculé indépendamment par

$$(4.35) \quad Re(\sigma) \simeq \frac{1}{|M(t)|} \frac{|M(t)| - |M(t - \delta t)|}{\delta t},$$

où $|\cdot|$ note le module, afin de s'affranchir de la phase.

Outre les ondes de Rossby thermiques, des ondes inertielles se propagent dans le système. Elles aussi peuvent être excitées par la force d'Archimède, et correspondent à un équilibre entre $\partial \vec{u} / \partial t$, le terme de Coriolis et la pression (voir Zhang 1992, Ardes et al. 1997). Elles peuvent être critiques avant les ondes de Rossby pour de petites valeurs du nombre de Prandtl ($Pr < 1$) et des valeurs modérées du nombre de Taylor. Elles se développent alors près de l'équateur. Lorsque le nombre de Taylor croît, il faut que le nombre de Prandtl soit de plus en plus petit pour que ces ondes soient critiques. A un nombre de Taylor de $Ta = 5 \cdot 10^6$, il faut que le nombre de Prandtl soit inférieur à 10^{-2} . Elles ne sont jamais critiques dans nos études (sauf pour le quatrième cas des figures 4.11 et 4.12). Elles peuvent exister dans les régimes transitoires mais doivent disparaître lorsque le temps d'intégration devient grand. Pour obtenir un taux de croissance de la solution qui soit stationnaire en temps en partant d'un "bruit blanc", il faut attendre que les coefficients en l des modes s'organisent, mais aussi que les ondes inertielles se dissipent. Ces ondes disparaissent pour $t \rightarrow \infty$. En pratique, il faut attendre d'autant plus longtemps que le nombre de Taylor est grand (car ces ondes sont dissipées par les effets visqueux). La figure 4.8 montre comment le taux de croissance des modes est affecté par ces ondes.

4.4.3 Représentation de la solution

La représentation d'un champ vectoriel à trois dimensions n'est pas très aisée. Nous allons utiliser divers modes de représentations. On peut effectuer des coupes équatoriales ou méridiennes de scalaires (comme nous l'avons fait au chapitre précédent).

La solution étant proche de la géostrophie, une vue du dessus du champ de vecteur à trois dimensions est également "lisible", nous adopterons donc cette représentation.

Pour observer des structures s'écartant de la géostrophie, nous proposons de visualiser des surfaces d'égales valeurs d'un champ scalaire caractéristique de la

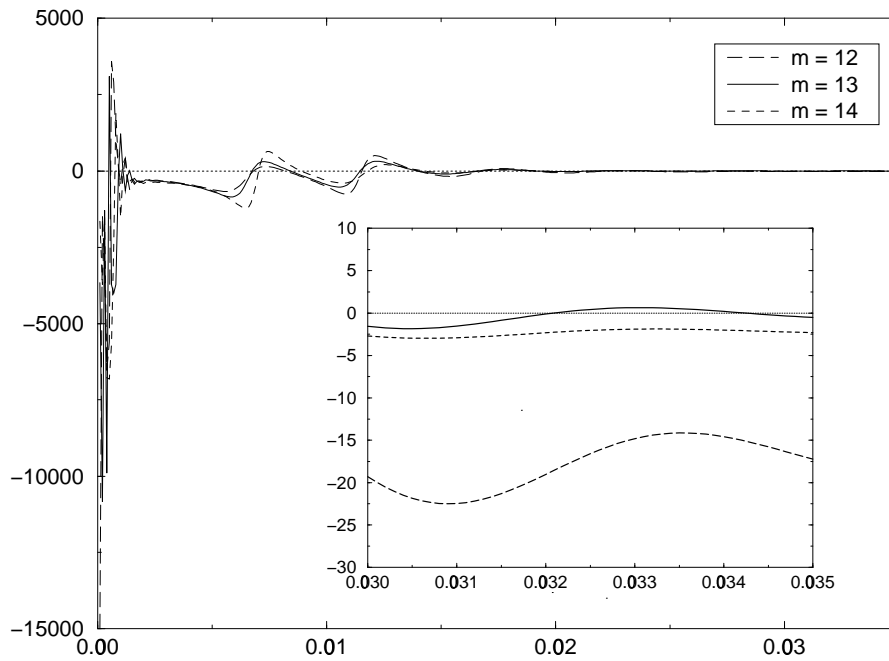


FIG. 4.8 – Représentation de l'évolution temporelle du taux de croissance des modes $m = 12$, $m_c = 13$, $m = 14$ pour $Ta = 10^{11}$ en chauffage de type Φ . Pour ce nombre de Taylor et ce chauffage le pas de temps doit être au plus de $1,0 \cdot 10^{-7}$ pour garantir la stabilité numérique (le temps est mis à l'échelle par la viscosité). Le calcul de ce graphe correspond donc à $3,5 \cdot 10^5$ pas de temps (soit 21 heures CPU sur le Cray J-90 avec 300 coquilles radiales et 80 degrés d'harmoniques). Plus le nombre de Taylor est grand, plus la détermination précise des taux de croissance est donc difficile.

solution. Nous avons retenu la composante axiale de la vorticité ($\vec{\nabla} \wedge \vec{u}$) $|_z$. Nous utiliserons également des lignes de courants (“streamlines”). Elles sont d’une interprétation dangereuse, car elles ne correspondent aux trajectoires de particules fluides que si le champ de vecteur est statique. Elles permettent cependant de mieux comprendre la structure du champ vectoriel.

Enfin les coupes monodimensionnelles sont essentielles pour pouvoir décrire précisément la structure radiale de la solution obtenue. La vitesse de phase de la solution rend difficile la réalisation de “coupes” monodimensionnelles significatives, et comme $m_c \neq 0$ la moyenne azimutale des grandeurs algébriques est nécessairement nulle. Nous avons utilisé des représentations des fonctions suivantes

$$(4.36) \quad S_1(r) = \int_0^{2\pi} \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2 + V_\phi^2} d\phi,$$

où V (n’ayant pas d’amplitude définie au seuil) est mis à l’échelle pour que

$$(4.37) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{r_i}^{r_e} \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2 + V_\phi^2} dr d\theta d\phi = 1 .$$

$$(4.38) \quad S_2(r) = \int_0^{2\pi} |\Theta| d\phi,$$

mis à l’échelle tel que $\|\Theta\|_{\text{sup}} = 1$.

On peut aussi utiliser une autre représentation de la structure radiale, inspirée de Yano (1992) et Hirsching et Yano (1993), elle consiste à écrire dans le plan équatorial $r u_p$ sous la forme

$$(4.39) \quad r u_p = A(r) e^{im(\phi - \phi_0(r)) + i\omega t} .$$

On peut alors représenter $A(r)$ qui est un scalaire de plus permettant une représentation monodimensionnelle de la structure des colonnes, mais aussi la phase $\phi_0(r)$ qui nous donne une indication de la spiralis tion de l’ coulement¹⁴.

Notons que, comme l’anomalie de température θ , l’amplitude $A(r)$ est normalisée tel que $\|A(r)\|_{\text{sup}} = 1$.

4.4.4 Réduction de l’espace des paramètres

L’espace des paramètres est plus grand pour ce problème que pour ceux que nous avons traités jusqu’à présent. Outre le rapport d’aspect de la coquille et le type de chauffage utilisé, il est constitué du nombre de Taylor (ou indifféremment du nombre d’Ekman) du nombre de Prandtl (caractéristique du fluide) et du nombre de Rayleigh. La résolution numérique de ce problème étant également plus

14. On notera la phase en radians (convertir en degrés pour comparer avec Hirsching et Yano), et comme une fonction continue dans \mathbb{R} plutôt que discontinue dans $[0, 2\pi[$.

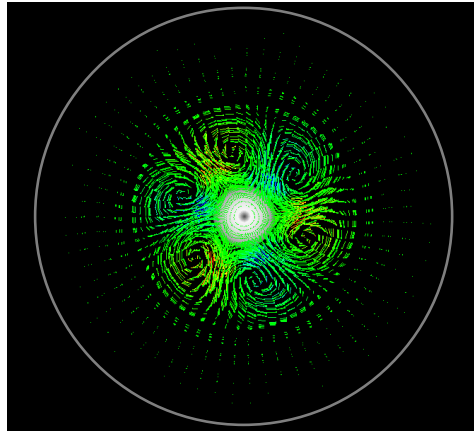


FIG. 4.9 – Simulation pour $Ta = 10^9$, en chauffage différentiel $\underline{\Delta}$ avec un rapport d'aspect de 0,15. Les colonnes se collent à la graine et c'est le mode $m = 3$ qui est critique, au lieu de $m = 7$ pour $\eta = 0.35$.

ardue que pour les problèmes traités précédemment, il paraît malheureusement inévitable de restreindre, au moins dans un premier temps, notre étude à un sous-espace de paramètres.

Le rapport d'aspect du noyau actuel est bien connu (voisin de 0,35), il est raisonnable de penser que la graine a été plus petite dans l'histoire du noyau, et qu'elle a cru avec le refroidissement de celui-ci. Nous nous limiterons cependant dans les études suivantes à des calculs avec $\eta = 0,35$. L'effet du rapport d'aspect sur la convection en chauffage uniforme $\underline{\beta}$ (et avec une condition de contraintes horizontales nulles) a été étudié par Zhang (Zhang, 1992). Comme on s'y attend d'après l'étude théorique présentée ci-avant, la graine ne modifie pas la solution tant que son rayon est inférieur à la localisation des colonnes dans une sphère pleine, après quoi la graine modifie la solution en repoussant les colonnes.

L'effet du rapport d'aspect sur la convection en chauffage différentiel $\underline{\Delta}$ est très différent. Comme le montre l'étude analytique, c'est la taille de la graine qui détermine alors la position de l'instabilité. Quelle que soit η , la valeur du nombre de Rayleigh critique, ainsi que les caractéristiques du mode critique dépendent alors de η .

Nous présentons (figure 4.10) des résultats obtenus pour $Ta = 10^8$, $Pr = 1.0$ et $\eta = 0.12, 0.2, 0.35, 0.6$ pour ces deux types de chauffage. Les paramètres critiques en chauffage uniforme sont :

η	m_c	R_c	ω_c
0,12	5	$1.078 \cdot 10^6$	-118.97
0,2	5	$1.079 \cdot 10^6$	-119.05
0,35	6	$1.104 \cdot 10^6$	-126.85
0,6	10	$1.475 \cdot 10^6$	-132.97

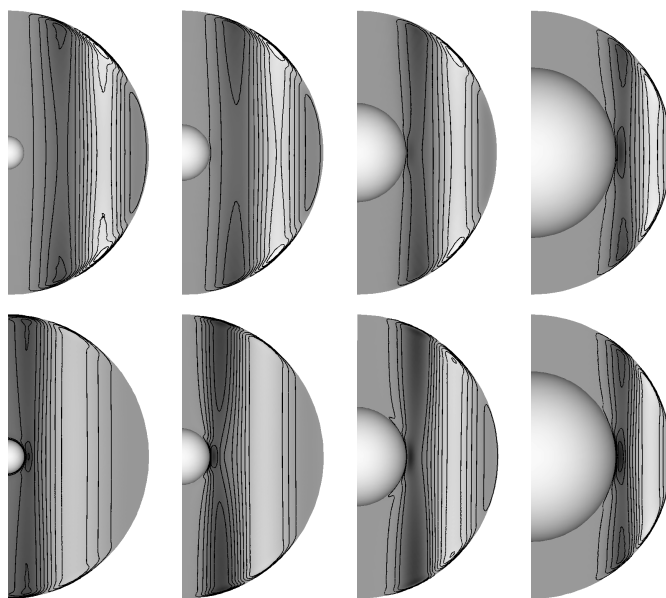


FIG. 4.10 – Représentation de u_ϕ dans un plan méridien. On note l'effet différent de la variation de la taille de la graine en chauffage uniforme (en haut) et en chauffage différentiel (en bas), pour $Ta = 10^8$, et $\eta = r_i/r_e$ valant successivement 0, 12, 0, 2, 0, 35, 0, 6 .

et en chauffage différentiel :

η	m_c	R_c	ω_c
0, 12	1	$9,543 \cdot 10^4$	-30.18
0, 2	3	$1.299 \cdot 10^5$	-73.96
0, 35	5	$2.394 \cdot 10^5$	-99.71
0, 6	10	$6.947 \cdot 10^5$	-121.67

Le mode critique croît avec le rapport d'aspect. Dans la limite où ce rapport est proche de 1 (“small gap”) c’est la distance $d = r_e - r_i$ qui impose le mode critique.

Nous n’avons pas étudié l’effet du rapport d’aspect sur le troisième type de chauffage Φ . Cependant, comme nous allons le montrer ci après, ce chauffage a le même comportement que le précédent dans la limite des grands nombres de Taylor, qui est celle qui nous intéresse.

Le nombre de Prandtl du noyau est à peu près 0,14 (Poirier, 1988), cette valeur ne constitue pas en soi une difficulté pour les simulations numériques (contrairement aux grands nombres de Taylor).

Nous présentons (figure 4.11), toujours pour $Ta = 10^8$, la solution obtenue en chauffage uniforme β pour des nombres de Prandtl de : $Pr = 7$ (ce serait le cas de l’eau¹⁵), $Pr = 1$, $Pr = 1/7$ (très proche de la valeur valable pour le noyau

15. Souvent utilisé pour la convection expérimentale.

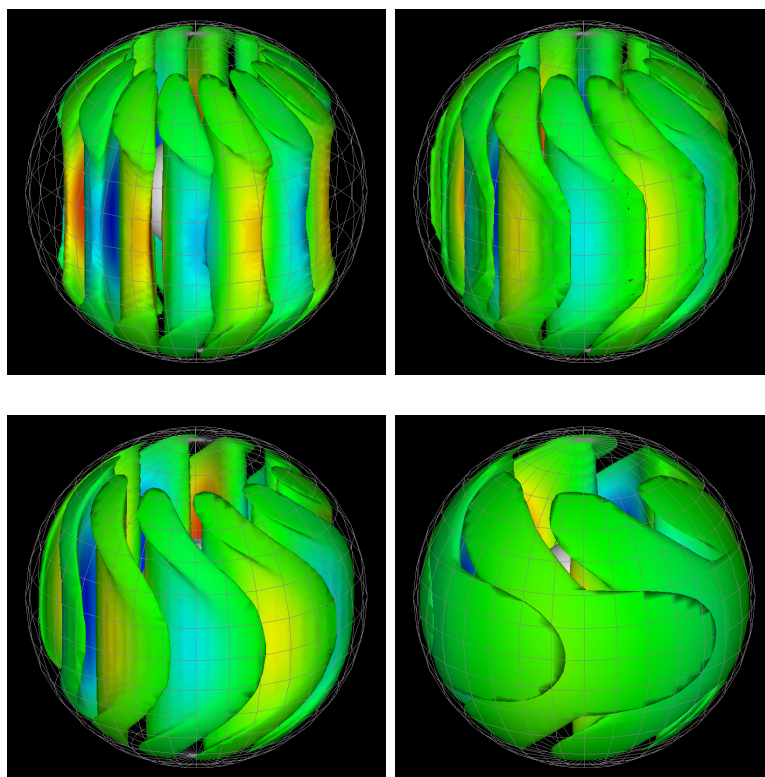


FIG. 4.11 – Influence du nombre de Prandtl sur la solution au seuil. De haut en bas et de gauche à droite : $Pr = 7, 1, 1/7, 1/49$. Pour $Pr = 1/49$, la convection se développe essentiellement dans la région équatoriale (voir également figure 4.12). Au plus bas nombre de Prandtl, sa structure se rapproche de celle d'une onde inertielle (voir Zhang, 1993). Pour permettre une représentation lisible, la couche d'Ekman contre la sphère externe a été supprimée de ces dessins.

terrestre), et $Pr = 1/49$ (ce serait le cas du Gallium¹⁶).

On a alors les paramètres critiques suivants :

Pr	m_c	R_c	ω_c
1/49	3	$2.713 \cdot 10^5$	-904.40
1/7	5	$5.409 \cdot 10^5$	-448.83
1	6	$1.104 \cdot 10^6$	-126.85
7	7	$1.382 \cdot 10^6$	-19.89

Nous ne ferons pas varier le nombre de Prandtl dans les simulations suivantes (dans le but de réduire le nombre de simulations), notre objectif sera essentiellement d'étudier les grands nombres de Taylor, et nous fixerons le nombre de Prandtl à $Pr = 1$. Cette valeur est choisie plutôt que 1/7 car notre but est

16. Utilisé pour la convection thermique et la magnéto-convection.

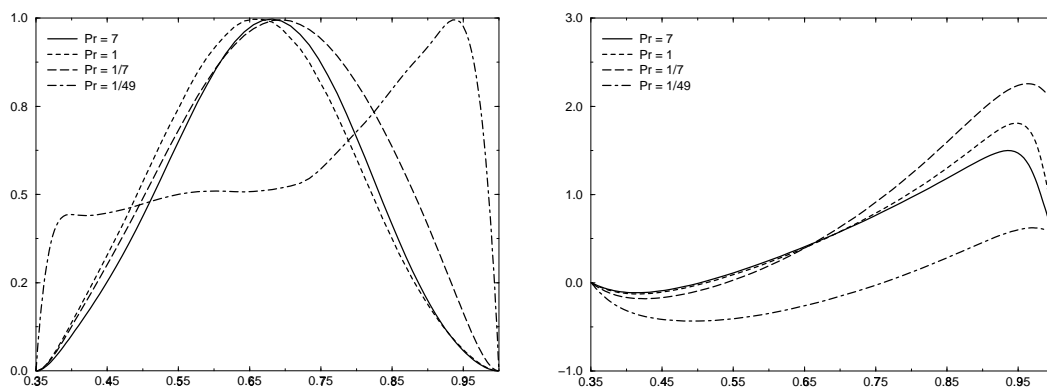


FIG. 4.12 – Structure radiale des simulations représentés sur la figure précédente. A gauche l'amplitude et à droite la phase. La spiralisation augmente nettement lorsque l'on diminue le nombre de Prandtl de 7 à 1/7 , et le mode de convection diffère pour $Pr = 1/49$.

d'étudier le comportement à grand Ta . Ce comportement se caractérise par de grandes valeurs de m_c , ce qui est crucial dans les études analytiques que nous avons rappelées, car cela justifie que l'on néglige la variation de la pente des conditions aux limites. Pour nous rapprocher plus vite de ce régime (du moins nous l'espérons) nous avons donc légèrement sur-évalué le nombre de Prandtl, pour diminuer artificiellement la taille des structures.

4.4.5 Etude de la limite des grands nombres de Taylor

On l'a vu, l'étude analytique par perturbation montre que le régime asymptotique des grands nombres de Taylor peut être différent selon le type de chauffage ($\underline{\beta}$ ou $\underline{\Delta}$). Nous étudierons donc indépendamment chaque type de chauffage.

Commençons par l'étude du **chauffage uniforme** (le plus souvent étudié). Pour ce chauffage on peut s'appuyer sur l'étude asymptotique de Roberts reprise par Busse. Pour un nombre de Prandtl de un, Busse obtient (Table I, Busse 1970), pour le mode critique¹⁷

$$(4.40) \quad m_c = 0.6003 \cdot E^{-1/3}$$

pour le nombre de Rayleigh critique

$$(4.41) \quad R_c = 3.382 \cdot E^{-4/3}$$

et pour la pulsation critique (en tenant également compte de nos différences d'unités de temps)

$$(4.42) \quad \omega_c = -0.4362 \cdot E^{-2/3}$$

¹⁷. Ces formules tiennent compte de la différence d'un facteur deux dans nos définitions respectives du nombre d'Ekman.

pour une distance à l'axe de

$$(4.43) \quad s_c = 0.5004$$

Si on utilisait l'étude par perturbation de Busse (comme semble l'avoir fait Zhang) on aurait (toujours pour $Pr = 1$).

$$(4.44) \quad m_c = 0.5825 \cdot E^{-1/3}$$

pour le nombre de Rayleigh critique

$$(4.45) \quad R_c = 1.7269 \cdot E^{-4/3}$$

et pour la pulsation critique (en tenant également compte de nos différences d'unités de temps)

$$(4.46) \quad \omega_c = -0.4798 \cdot E^{-2/3}$$

pour une distance à l'axe de

$$(4.47) \quad s_c = 0.4477$$

On obtient numériquement les paramètres critiques suivants

Ta	m_c	R_c	ω_c
10^6	3	$9.742 \cdot 10^4$	-7.70
10^7	4	$2.860 \cdot 10^5$	-47.08
10^8	6	$1.104 \cdot 10^6$	-126.85
10^9	9	$4.676 \cdot 10^6$	-312.01
10^{10}	13	$2.072 \cdot 10^7$	-731.18
10^{11}	20	$9.363 \cdot 10^7$	-1704.86
10^{12}	30	$4.270 \cdot 10^8$	-3885.98

Les solutions correspondantes sont représentées figure 4.13. Il s'agit bien d'une instabilité sous forme de colonnes axiales, dont la vitesse de phase est non nulle. Ces colonnes sont bien symétriques par rapport à l'équateur. Des lignes de courants ("Streamlines") ne peuvent traverser le plan équatorial (figure 4.14). La solution possède une vitesse de phase, il est donc important de signaler les risques de confusion entre lignes de courants et trajectoires de particules fluides. Pour étudier les trajectoires de particules fluides, il est essentiel de tenir compte de la vitesse de phase de la solution. Quand cette vitesse de phase est grande (ce qui est le cas dans le régime asymptotique) une particule fluide n'a pas le temps de parcourir un rouleau avant d'être rattrapée par le rouleau voisin (de sens opposé). Dans la limite des très grandes vitesses de phase, une particule fluide ne fait qu'osciller (on a bien affaire à une onde). Ce phénomène est accentué par le fait qu'en plus de la vitesse de phase, le nombre de colonnes croît avec le nombre de Taylor.

On peut étudier sur un graphe log-log les valeurs du nombre de Rayleigh critique, et de la pulsation au seuil, pour en déterminer la loi de variation en

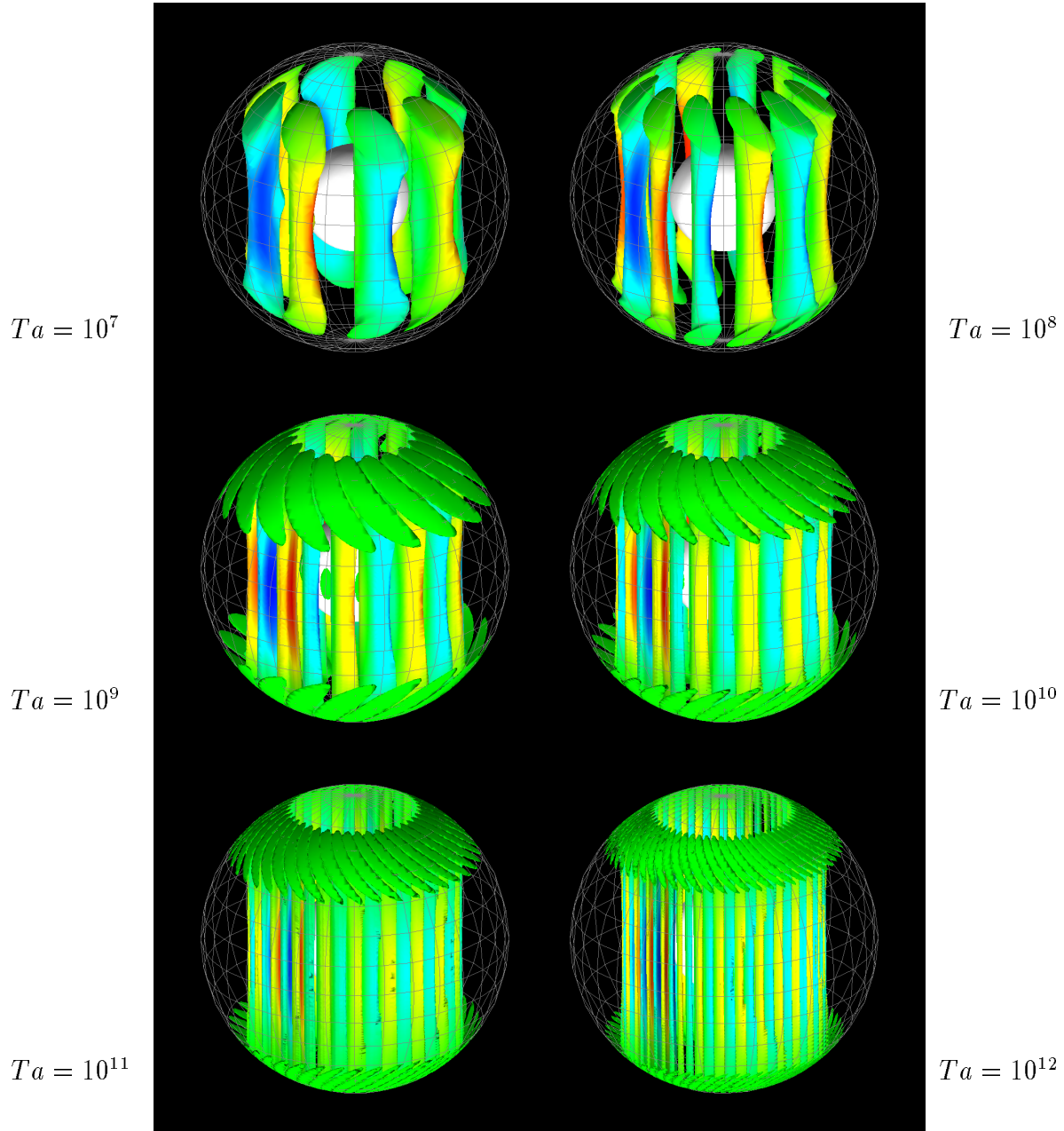


FIG. 4.13 – Surfaces d'isovaleurs de la composante axiale de la vorticité en chauffage β . On observe l'effet croissant de la contrainte de Proudman-Taylor. Le champ a été annulé pour plus de lisibilité dans les couches limites pour les deux premières figures. La couche d'Ekman contre la frontière externe est très clairement visible sur les images suivantes.