

Summary

We study the properties of convection in a rotating spherical shell. First part of this chapter concerns onset of convection. Using the knowledge developed in the previous chapter about numerical resolution of Ekman layers, we study mainly the no-slip boundary conditions (free slip is also described for comparisons). We consider three different heatings: uniform heat sources (widely used in previous studies, and in theoretical works), referred to as $\underline{\beta}$; imposed differential temperature gradient, referred to as $\underline{\Delta}$; and temperature imposed at the ICB with heat flux imposed at the CMB, referred to as $\underline{\Phi}$. The mode of heating has important effects on the onset of convection. It is found that the first two modes of heating have different asymptotic behaviour even for the linearized problem of onset of convection. On the other hand, the second and third mode of heating, though showing different behaviour at finite Taylor number, seem to converge to the same solution in the asymptotic limit of large Taylor numbers. The solution in the $\underline{\beta}$ case is found to have a higher critical Rayleigh number than expected from the asymptotic study (Roberts 1968, Busse 1970). Its radial structure at a given Taylor number is larger than that of the Bessel function used in the asymptotic study. The critical mode is found to be about half the expected one (in agreement with experiments). Finally, its location doesn't seem to converge in the limit of large Taylor numbers to the expected critical radius (figure 4.18). Our study of finite amplitude convection suggests that the bifurcation could be subcritical, in the limit of large Taylor numbers, as advocated by Soward (1977). We have not been able to increase the Taylor number large enough to demonstrate it. For a Taylor number of 10^{10} , the first non linear effects modify the solution so that its radius gets closer to the axis of rotation (and thus to the expected value).

Chapitre 4

Convection dans une coquille sphérique en rotation



Nous allons étudier dans ce chapitre des phénomènes convectifs, c'est-à-dire la réponse à une stratification instable, sous forme d'une instabilité, et d'une rupture de symétrie. Sans doute est-il utile avant de présenter l'instabilité convective dans une coquille sphérique en rotation, de rappeler rapidement le cas plus simple de l'instabilité de Rayleigh-Bénard entre deux plans. Lorsque l'on soumet un fluide pesant contenu entre deux plans parallèles horizontaux à un gradient de température, l'expérience montre que, sous certaines conditions il peut être le siège de mouvements convectifs. Si le gradient est normal, c'est-à-dire que la plaque supérieure est à une température supérieure à celle de la plaque inférieure, le fluide lourd est en dessous du fluide léger, et la stratification thermique est stable. Si le gradient est inversé, l'expérience montre qu'au delà d'une valeur critique de l'écart de température, la chaleur n'est plus seulement transportée par conduction, et une instabilité convective apparaît sous forme de rouleaux contrarotatifs d'axe horizontal. C'est l'instabilité de Rayleigh-Bénard¹. Le paramètre de contrôle pour ce problème, comme pour ceux que nous allons étudier dans ce chapitre, est le nombre de *Rayleigh*, il mesure l'énergie apportée au système par rapport aux forces qui s'opposent au mouvement. Pour une valeur suffisante de ce paramètre, la solution conductive devient instable, et une solution convective apparaît.

Nous étudierons dans ce chapitre une géométrie différente, celle d'une coquille sphérique en rotation rapide, et nous nous intéresserons aux instabilités

1. A ne pas confondre avec l'instabilité de Bénard-Marangoni, étudiée par Bénard au début du XX^e siècle, où le mécanisme d'instauration de l'instabilité tient à l'usage d'une configuration à surface libre, et à un effet de tension superficielle.

thermiques qui peuvent s'y développer. On verra que ce problème, qui a déjà été l'objet de nombreuses études antérieures, est riche d'une grande variété de caractéristiques inexistantes dans le cas plan sans rotation. Dans une première partie nous nous intéresserons aux instabilités du système linéarisé, et essaierons de confronter nos résultats aux études analytiques de ce problème. Dans une deuxième partie nous étudierons la convection d'amplitude finie, et essaierons de caractériser la bifurcation convective.

4.1 Etudes expérimentales

Il paraît sensé de commencer une étude d'un problème de convection par l'étude du seuil, c'est-à-dire l'apparition des premiers mouvements. Pour cela, il faut que l'on apporte juste assez d'énergie thermique au système pour que la solution conductive devienne instable pour une perturbation infinitésimale, cette valeur du paramètre de contrôle est appelée "nombre de Rayleigh critique".

Expérimentalement, la convection au seuil dans une coquille sphérique en rotation est très difficile à réaliser (voir Carrigan et Busse 1983, Chamberlain et Carrigan 1986, Cordero et Busse 1992). Tout d'abord, il faut contrôler avec une grande rigueur la vitesse de rotation de l'appareillage (en général de l'ordre du % pour des rotations allant jusqu'à 1000 t/min). Une autre difficulté consiste à reproduire expérimentalement l'effet d'une gravité centrale. Une approche possible consiste à se placer en microgravité et à utiliser un champ électrique important, la polarisation diélectrique produit alors une accélération radiale proportionnelle à la température. Une telle expérience a été réalisée sur la navette spatiale Challenger (Hart et al. 1986, avec un rapport d'aspect de $\eta = r_e/r_i = 0.73$, et des nombres d'Ekman supérieurs à 10^{-3}). Une alternative moins coûteuse consiste à reproduire l'effet de la gravité à l'aide de l'accélération centrifuge. Un gradient thermique inversé (plus chaud au centre) est alors stabilisateur, et c'est un gradient normal que l'on impose donc pour ce genre d'étude. Il reste toutefois une difficulté d'interprétation, liée à la symétrie axiale (et non centrale) de cette pseudo-gravité². Un fluide soumis à une pseudo-gravité à symétrie axiale n'est pas stable dynamiquement en présence d'un profil de température à symétrie sphérique. Dans une telle expérience, comme d'ailleurs dans un ellipsoïde, la gravité n'est pas partout parallèle au gradient de densité de l'état de base (profil diffusif). L'état de base correspond alors à un mouvement non nul, zonal ($m = 0$) appelé vent thermique (c'est une instabilité barocline qui repose sur un équilibre Archimède-Coriolis). Ce phénomène est compliqué par la conduction thermique le long d'un axe, généralement utilisé pour maintenir la sphère externe. Dans le cas idéal d'une sphère parfaite à gravité centrale (le cas que nous allons étudier), au contraire, ce vent est nul au seuil.

2. En fait, la pseudo-gravité n'est pas parfaitement axiale, car la gravité terrestre intervient (pour environ 10%). Elle entraîne un mouvement méridional supplémentaire).

Cordero et Busse ont réalisé en 1992 une étude expérimentale de convection dans un hémisphère en rotation, dont la rotation était déterminée de sorte que l'effet centrifuge combiné avec la gravité soit aussi proche que possible d'une force à symétrie centrale. Cette approche est toutefois limitée de manière évidente à l'étude de nombres d'Ekman relativement grands.

Chamberlain et Carrigan proposent en 1986 une expérience capable de modéliser l'effet d'un chauffage uniforme (problème généralement considéré pour les études analytiques). Ils utilisent une sphère pleine et font varier la température de la frontière de manière contrôlée, de sorte que l'état de base pour la perturbation corresponde au même profil thermique que dans le cas du chauffage uniforme.

Enfin, si l'on veut étudier le démarrage de la convection, il faut pouvoir contrôler très finement le nombre de Rayleigh, pour réduire l'amplitude des mouvements. Ceci est extrêmement difficile à réaliser en pratique. La difficulté tient au contrôle précis de très faibles différences de température (de l'ordre de $0,2^\circ C$). Pour une géométrie (rapport d'aspect) donnée, le choix de l'échelle de réalisation de l'expérience détermine alors la correspondance entre le nombre de Rayleigh et la différence de température. On a intérêt à construire une expérience de petite dimension, pour qu'au nombre de Rayleigh critique corresponde une différence de température aussi élevée que possible (que l'on contrôlera plus facilement expérimentalement). La contre partie est que plus l'échelle choisie est petite, plus la rotation à imposer au système est élevée pour atteindre un nombre d'Ekman donné. Un compromis est donc nécessaire, et la plupart des expériences sont conçues pour des sphères de 3,3 cm à 15,2 cm de diamètre. Pour ces échelles, l'écart de température au seuil correspondant au seuil de l'instabilité est encore trop faible pour être contrôlé précisément. Pour cette raison la géométrie du problème est généralement modifiée par l'usage d'un rapport d'aspect plus élevé. Nous verrons plus loin que le fait d'augmenter le rapport d'aspect, et de repousser la convection dans la région équatoriale repousse le seuil de l'instabilité convective.

Quand ce rapport d'aspect est assez proche de l'unité le problème s'approche du cas plan (écart petit entre deux grandes sphères) et il est alors légitime de construire le nombre de Rayleigh sur l'espace entre les sphères ($d = r_e - r_i$), ce qui renforce l'argument. Dans cette limite, c'est l'espace entre les sphères qui, comme dans le cas plan, détermine le mode convectif.

Lorsque l'on s'éloigne du seuil, la plupart des difficultés énoncées plus haut restent entières, mais le problème du contrôle précis de la température est moins essentiel. On peut étudier expérimentalement la convection développée dans une coquille sphérique ayant un rapport d'aspect comparable à celui du noyau terrestre (Cardin et al., 1992).

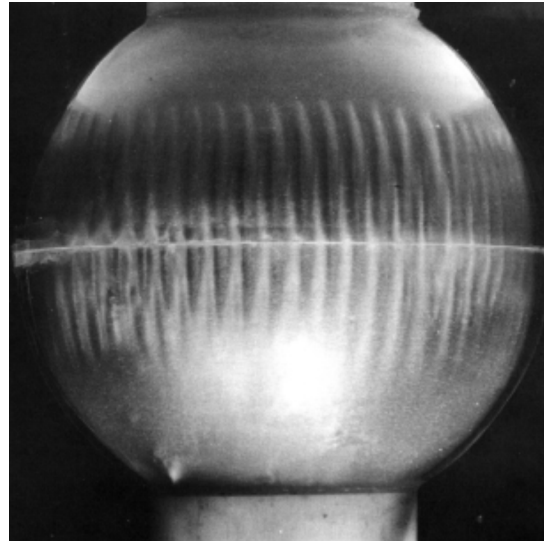
La convection se développe sous forme de rouleaux, alignés avec l'axe de rotation (voir figures 4.1 et 4.2). Si l'étude expérimentale doit constituer une référence pour les simulations numériques, les paramètres décrivant la solution auxquels on peut avoir accès sont en nombre plus réduit. La détermination du seuil est,

FIG. 4.1 – *Convection expérimentale près du seuil dans une coquille sphérique en rotation (le nombre d'Ekman va de $1.0 \cdot 10^{-2}$ à $1.0 \cdot 10^{-5}$).*

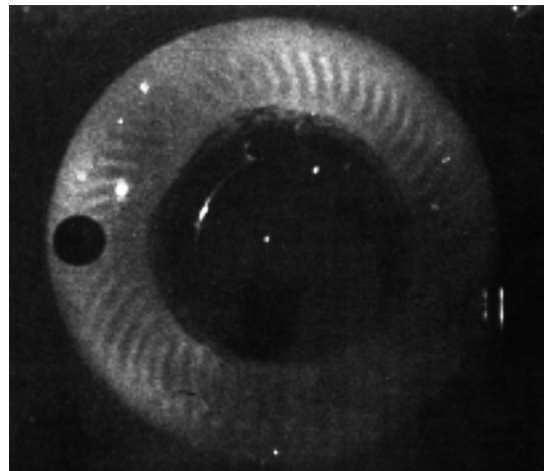
La première photographie (a) présente vue de côté des colonnes en chauffage différentiel pour un rapport d'aspect $\eta = 0,97$. La gravité est remplacée par l'accélération centrifuge (Carrigan et Busse, 1983).

Sur la seconde photographie (b) une vue du dessus pour une expérience sans graine, par refroidissement de la sphère externe au cours du temps, cette approche permet de reproduire l'effet d'un chauffage uniforme (Chamberlain et Carrigan, 1986).

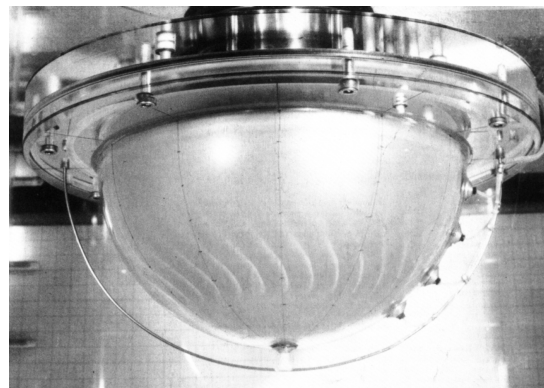
La troisième photographie (c) présente une étude dans un hémisphère, dont la vitesse de rotation est ajustée de sorte que la composition de l'accélération centrifuge avec la gravité vraie soit aussi proche que possible de la symétrie centrale. Le chauffage est différentiel et le rapport d'aspect $\eta = 0,79$, la sphère externe fait 6,35 cm de diamètre (Cordero et Busse, 1992).



a.



b.



c.

comme on l'a dit, difficile. Il est également difficile d'établir avec précision le mode critique (i.e. nombre de rouleaux). Pour des rapports d'aspects élevés, le mode est grand et varie rapidement lorsque l'on s'éloigne du seuil. On visualise généralement l'écoulement à l'aide de paillettes ou de fluorescéine. L'évolution de la température est accessible par des mesures de flux de chaleur, ou par des sondes (généralement placées aux bords pour ne pas perturber l'écoulement), ou par analogie avec un scalaire passif.

4.2 Système et forme adimensionnalisée

On peut simplifier le système (1.71) pour cette étude, en supprimant tous les termes liés à l'induction magnétique,

$$(4.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\vec{u} \cdot \nabla \vec{u} - \frac{1}{\rho_0} \nabla \pi + \nu \Delta \vec{u} - 2\Omega (\vec{e}_z \wedge \vec{u}) + \alpha \Theta g \vec{r}, \\ \nabla \cdot \vec{u} = 0, \\ \frac{\partial \Theta}{\partial t} = -\vec{u} \cdot \nabla T_s + \kappa \Delta T_s - \vec{u} \cdot \nabla \Theta + \kappa \Delta \Theta. \end{cases}$$

Il est à présent nécessaire de définir le profil conductif de température. Celui-ci dépend du type de chauffage. Nous en considérerons trois.

A. Chauffage uniforme $\underline{\beta}$

Ce mode de chauffage est le plus classique dans les études théoriques et numériques. Il correspondrait à un chauffage par désintégration d'éléments radio-actifs. Dans l'état de nos connaissances, il n'est pas significatif pour le noyau de la terre, mais il est intéressant à titre de comparaison avec les études existantes. On notera ce chauffage $\underline{\beta}$.³

Aux frontières interne et externe du noyau liquide, la température est imposée

$$(4.2) \quad T_i = \text{cst},$$

et

$$(4.3) \quad T_e = \text{cst}.$$

Et des sources de chaleurs sont supposées uniformément réparties dans le noyau. Le champ de température statique T_s est à symétrie radiale, et vérifie

$$(4.4) \quad \Delta T_s = \text{cste},$$

que nous écrirons, pour simplifier plus loin l'écriture du nombre de Rayleigh, sous la forme

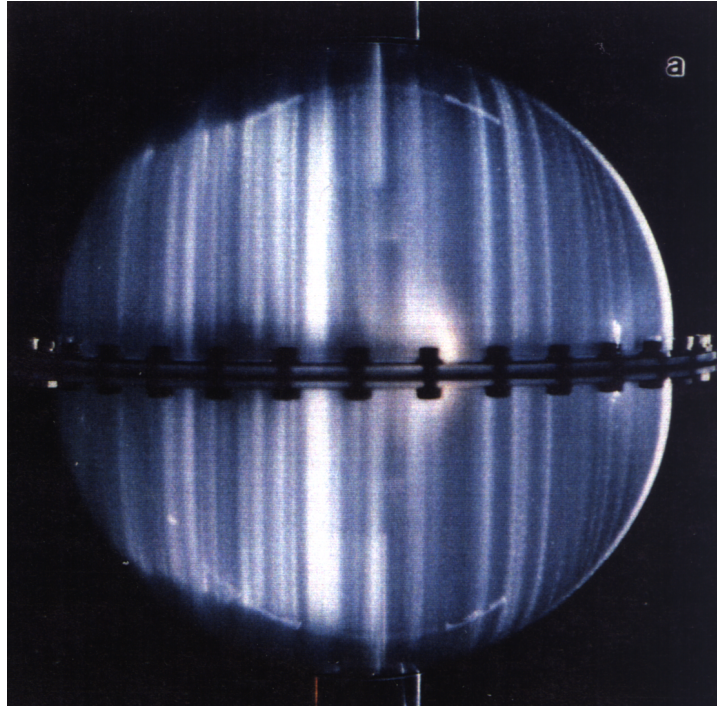
$$(4.5) \quad \Delta T_s = -3\beta,$$

équation dont la solution est

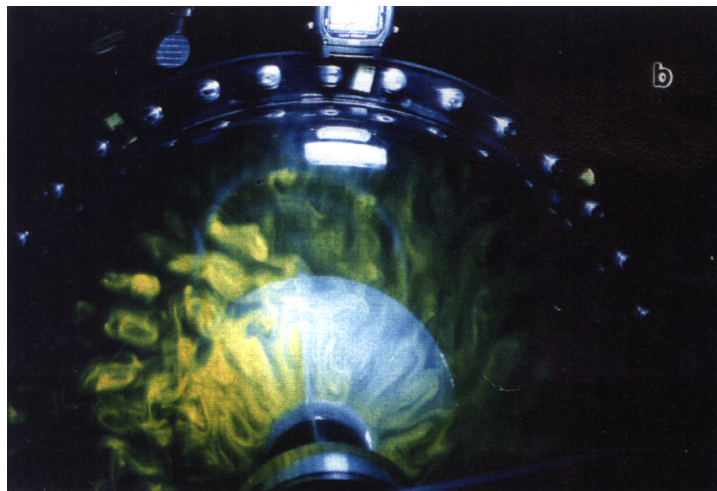
$$(4.6) \quad T_s = -\frac{\beta}{2} r^2 + T_0,$$

3. On note, toutefois, que le gradient adiabatique n'étant pas diffusif (i.e. son laplacien est non nul) il pourrait intervenir comme un terme interne (mais non uniforme) dans notre formulation.

FIG. 4.2 - *Convection thermique développée expérimentale dans une coquille sphérique en rotation rapide. Une coquille sphérique (de rapport d'aspect $\eta = 1/3$) est placée en rotation rapide ($E = 3 \cdot 10^{-6}$), l' "accélération" centrifuge remplace ici la gravité pour la force d'Archimède (la vraie gravité étant négligeable), on impose donc un gradient de température inversé (plus froid au centre). Le nombre de Rayleigh ainsi imposé est de l'ordre de 50 fois critique.*



a) *Cette photographie met en évidence la structure géostrophique de l'écoulement. Les colonnes occupent l'ensemble de la sphère. La visualisation est effectuée à l'aide de paillettes (qui s'alignent le long de l'écoulement), et d'un faisceau lumineux placé dans un plan vertical en avant de la graine ($s = 0.4$).*



b) *Vue du dessus de la trace des vortex révélée par un colorant fluorescent de même densité que l'eau introduit près de l'axe. La convection est de nature chaotique. (Philippe Cardin 1992).*

B. Chauffage différentiel $\underline{\Delta}$

On peut étudier l'effet d'un gradient de température entre les limites. On notera ce chauffage $\underline{\Delta}$. Il n'y a pas de source de chaleur dans le fluide dans ce cas.

Aux frontières interne et externe du noyau liquide, la température est imposée

$$(4.7) \quad T_i = \text{cst},$$

et

$$(4.8) \quad T_e = \text{cst}.$$

Le champ de température statique T_s est à symétrie radiale, et vérifie

$$(4.9) \quad \Delta T_s = 0.$$

équation dont la solution est de la forme

$$(4.10) \quad T_s = \frac{T_a}{r} + T_b,$$

avec

$$(4.11) \quad T_a = (T_i - T_e) \frac{r_i r_e}{r_e - r_i}, \quad \text{et} \quad T_b = T_i - (T_i - T_e) \frac{r_e}{r_e - r_i}.$$

C. Température imposée à la graine, flux de chaleur au manteau $\underline{\Phi}$

On peut aussi imposer une température à la sphère interne et un flux de chaleur à la sphère externe. On notera ce chauffage $\underline{\Phi}$. C'est sans doute le mode de chauffage le plus réaliste pour approcher la convection dans le noyau.

A la frontière interne (graine-noyau ou I.C.B.), la température est imposée

$$(4.12) \quad T_i = \text{cst},$$

correspondant à la température de solidification du fer à cette pression.

A la frontière externe (noyau-manteau ou C.M.B.), c'est le flux de chaleur qui est imposé⁴

$$(4.13) \quad \Phi_e = -k \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_e = \text{cst}.$$

Le champ de température statique T_s est à symétrie radiale, et vérifie

$$(4.14) \quad \Delta T_s = 0.$$

4. Le manteau diffuse et advecte la température beaucoup plus lentement que le noyau (le rapport des diffusivités thermiques généralement admis est de l'ordre de 60). Le manteau peut donc être considéré comme un isolant thermique pour le noyau, c'est pourquoi le flux de chaleur est imposé, et non la température (Réciproquement, pour une modélisation du manteau, ce serait la température qui serait fixée à la C.M.B.).

équation dont la solution est de la forme

$$(4.15) \quad T_s = \frac{T_a}{r} + T_b,$$

avec

$$(4.16) \quad T_a = \frac{\Phi_e r_e^2}{k}, \quad \text{et} \quad T_b = T_i - \frac{\Phi_e r_e^2}{r_i k}.$$

Après mise à l'échelle des variables par⁵

$$(4.17) \quad \mathcal{L} = r_e, \quad t = \frac{r_e^2}{\nu},$$

$$(4.18) \quad \mathcal{T}_\beta = \frac{\beta r_e^2 \nu}{\kappa}, \quad \mathcal{T}_\Delta = \mathcal{T}_\Phi = \frac{T_a \nu}{r_e \kappa}.$$

Le système d'équations (4.1) peut être écrit sous la forme

$$(4.19) \quad \begin{cases} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\vec{u} \cdot \nabla \vec{u} - \vec{\nabla} \pi + \Delta \vec{u} - E^{-1} \vec{e}_z \wedge \vec{u} + R\Theta \vec{r}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, \\ \frac{\partial \Theta}{\partial t} = Pr^{-1} (\mathcal{Q} \vec{u} \cdot \vec{r} + \Delta \Theta + \Delta T_s) - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \Theta, \end{cases}$$

où \mathcal{Q} est une fonction purement radiale, dépendant du type de chauffage

$$(4.20) \quad \mathcal{Q}_\beta = 1, \quad \mathcal{Q}_\Delta = \mathcal{Q}_\Phi = \frac{1}{r^3},$$

et où les nombres sans dimension sont définis comme

$$(4.21) \quad E = \frac{\nu}{2\Omega r_e^2}, \quad Pr = \frac{\nu}{\kappa},$$

suivant le type de chauffage, R se construit comme

$$(4.22) \quad R_\beta = \frac{\alpha g \beta r_e^6}{\nu \kappa}, \quad R_\Delta = R_\Phi = \frac{\alpha g T_a r_e^3}{\nu \kappa}.$$

Le nombre de *Rayleigh* en chauffage uniforme semble varier comme r_e^6 ce qui peut surprendre, cette dépendance inclut la variation en βr^2 du profil de température statique et en gr de la gravité.

Il faut prêter attention à la définition du nombre d'Ekman introduite ici. Ce nombre est construit sur 2Ω et non sur Ω comme cela était le cas au chapitre

5. Nous introduisons r_e comme unité de longueur, certains auteurs utilisent $d = r_e - r_i$. Nous définissons l'unité de température en utilisant le nombre de Prandtl pour permettre une comparaison plus aisée avec les études antérieures (e.g. Cuong et Busse, 1981).

précédent. Nous avons adopté cette convention, pour permettre des comparaisons plus aisées avec les études antérieures tant théoriques (Chandrasekhar 1961, Roberts 1968, Soward 1977) que numériques (Zhang 1992).

On utilisera également beaucoup dans ce chapitre le nombre de Taylor⁶ défini comme

$$(4.23) \quad Ta = E^{-2} = \left(\frac{2\Omega r_e^2}{\nu} \right)^2,$$

ce paramètre est donc très grand pour la terre (de l'ordre de 10^{30}). Les équations scalaires associées à ce système dérivent alors simplement de (2.50) puis (2.102).

On s'intéresse dans un premier temps à l'analyse de stabilité linéaire. Il s'agit d'un problème aux valeurs initiales pour des perturbations infinitésimales, qui peut s'exprimer analytiquement comme un problème aux valeurs propres. Ce problème étant linéaire, les solutions s'obtiennent en appliquant le principe de superposition. Les perturbations sont développées sur une base d'harmoniques adaptée à la géométrie sphérique (comme nous l'avons introduit au chapitre 2). Le terme de Coriolis couple alors (via l'opérateur Q_3) les degrés ℓ des coefficients de cette décomposition, mais ne couple pas les modes m . Chaque mode m évolue donc en temps de façon indépendante. Pour une valeur suffisamment élevée du paramètre de contrôle, le nombre de Rayleigh (appelée valeur de "Rayleigh critique"), une instabilité peut se développer. L'étude revient alors déterminer le premier mode m à devenir instable, la valeur du nombre de Rayleigh critique, et la géométrie de la solution convective.

Ce problème linéarisé revenant à un problème aux valeurs propres, une approche classique (e.g. Zhang 1992) consiste à chercher les vecteurs propres et les valeurs propres de l'opérateur linéarisé. Cette approche, très précise au seuil, a l'inconvénient de ne pouvoir s'étendre au régime non-linéaire. Nous avons adopté une autre approche, consistant à intégrer le système en temps à partir d'une perturbation, et à étudier les valeurs propres de la solution obtenue après une intégration suffisamment longue (après le régime transitoire, quand l'énergie de chaque mode varie exponentiellement).

6. L'usage du nombre de Taylor à la place du nombre d'Ekman peut surprendre, car il n'apporte pas plus d'information, et lui est directement relié. Elle est justifié par deux raisons. La plupart des études analytiques utilisent ce paramètre plutôt que le nombre d'Ekman, il est donc plus aisé de faire le même choix pour les comparaisons. Ce problème étant plus difficile que le précédent, nous progresserons plus lentement vers le régime qui nous intéresse, il est alors plus élégant de faire croître le nombre de Taylor d'un facteur 10 que de faire décroître le nombre d'Ekman d'un facteur $\sqrt{10}$...

4.3 Descriptions analytiques de la convection au seuil

Considérons pour chaque mode m , la valeur propre associée σ_m . La partie réelle de σ_m correspond au taux de croissance du mode m . Quand $Re(\sigma_m)$ est négatif $\forall m$ l'équilibre hydrostatique est stable. Une instabilité linéaire se développe dès qu'au moins un mode est instable. Si $\exists m_c \in \mathbb{N} \cap [0, \infty[$, tel que $Re(\sigma_{m_c}) > 0$ le mode m_c est instable, et croît exponentiellement. L'énergie potentielle d'origine gravitationnelle libérée par le travail de la poussée d'Archimède dépasse les pertes dues à la dissipation. C'est l'instabilité convective. La stabilité marginale correspond à un taux de croissance nul :

- $Re(\sigma_{m_c}) < 0$: la perturbation du mode m_c décroît. Le mode m_c est stable.
- $Re(\sigma_{m_c}) = 0$: la perturbation du mode m_c ne croît pas, ni ne décroît. C'est la stabilité marginale. Dans le même temps, on a $Re(\sigma_m) < 0 \quad \forall m \neq m_c$
- $Re(\sigma_{m_c}) > 0$: la perturbation croît. Le mode m_c est instable.

La partie imaginaire de σ_m est appelée pulsation, ou vitesse de phase⁷, elle contrôle la dépendance temporelle :

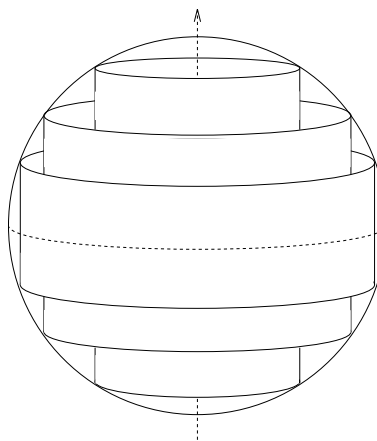
- $Im(\sigma_{m_c}) = \omega_{m_c} = 0$: le mode m_c est stationnaire.
- $Im(\sigma_{m_c}) = \omega_{m_c} \neq 0$: le mode m_c est oscillant (il se propage à la manière d'une onde).

Quand le fluide est en rotation rapide, le terme de Coriolis joue un rôle important dès le seuil, et modifie fortement la solution. Contrairement à la gravité, l'accélération de Coriolis ne travaille pas (elle est orthogonale à la vitesse). En revanche, elle influence fortement l'écoulement, comme le montre la contrainte de Proudman-Taylor (voir chapitre précédent). Pour satisfaire les conditions aux limites, l'écoulement doit alors s'organiser en contours géostrophiques. Si la profondeur du conteneur dans la direction de $\vec{\Omega}$ n'est pas constante, ces contours sont définis comme les contours de hauteur constante comptée le long de l'axe de rotation (dans une sphère, ce sont des cylindres co-axiaux, voir figure 4.3).

Un mouvement purement géostrophique est donc axisymétrique dans notre géométrie. Quand le forçage thermique est suffisant (dans un sens que nous préciserons par la suite), la convection se développe, comme une instabilité de l'état axisymétrique. Il s'agit d'une bifurcation, associée à une rupture de symétrie. Un mouvement convectif dans une coquille sphérique viole donc la contrainte de Proudman-Taylor, pour permettre le transport de particules fluides dans la direction du rayon cylindrique. Une solution convective s'appuie donc sur un équilibre dans lequel la viscosité et/ou le terme $\frac{\partial u}{\partial t}$ ne peuvent pas être négligés. La rotation joue alors un rôle stabilisateur important, et l'on s'attend à ce que l'apport

7. elle est aussi notée ω_m .

FIG. 4.3 – Les contours géostrophiques sont définis par la contrainte de Proudman-Taylor. Dans une sphère ce sont des cylindres concentriques, co-axiaux avec l'axe de rotation.



énergétique nécessaire au démarrage de la convection (caractérisé par le nombre de Rayleigh) croisse lorsque l'on fait tendre le nombre d'Ekman vers zéro⁸.

4.3.1 Etude asymptotique

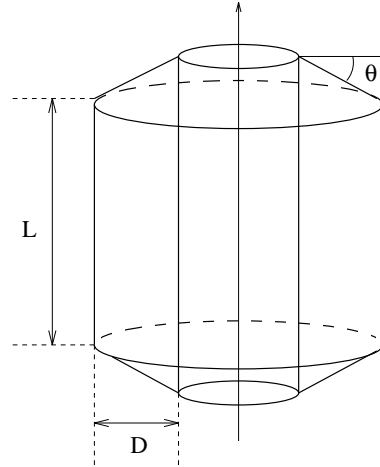
Roberts puis Busse ont recherché la solution au seuil dans la limite $E \ll 1$. Pour un nombre d'Ekman donné, lorsque le nombre de Rayleigh est suffisamment élevé, une instabilité se développe, qui viole l'équilibre de Proudman-Taylor, par une structure d'ordre $E^{1/3}$, reposant sur la viscosité⁹. Cette instabilité est dérivée dans le cas plan (en rotation) dans Chandrasekhar (1961, Chapitre III). La première étude du cas sphérique en rotation rapide est due à Roberts (1965, 1968) pour la solution anti-symétrique par rapport à l'équateur. Roberts mène une étude asymptotique dans la sphère, il obtient une structure azimutale pour la solution en $\mathcal{O}(Ta^{-1/6})$. Pour la structure radiale, il fait l'hypothèse que la solution peut s'écrire sur une fonction de Bessel cylindrique J_m (fonctions propres du Laplacien en s). Comme la largeur d'une telle fonction de Bessel varie comme $m^{-2/3}$, la structure radiale de sa solution varie comme $\mathcal{O}(Ta^{-1/9})$.

Dans son article de 1970 (B-70), Busse reprend l'étude asymptotique de Roberts, en introduisant une solution symétrique, plus instable que celle de Roberts (pour un nombre de Rayleigh plus petit, d'un facteur proche de quatre).

8. Il est important de noter la différence avec le problème de chapitre précédent pour lequel il existait une limite asymptotique indépendante de E . La viscosité est ici une composante essentielle de l'équilibre étudié, et seul un comportement asymptotique (variation des caractéristiques de la solution en fonction du nombre d'Ekman) pourra donc être étudié.

9. Notons que cette échelle en $E^{1/3}$ pour un cisaillement visqueux vertical est aussi celle de la couche de Stewartson (voir Chapitre 3)

FIG. 4.4 – *Modèle cylindrique utilisé par Busse (1970) pour une description approchée de l’instabilité convective dans une sphère en rotation rapide.*



4.3.2 Etude en perturbation

Busse, guidé par l’étude asymptotique, effectue dans un premier temps une approche par perturbation, plus illustrative du démarrage de la convection. Il étudie d’abord le démarrage de la convection dans l’espace entre deux cylindres finis de même profondeur. Un gradient de température déstabilisateur est imposé entre les deux cylindres. Il ressort clairement de ce qui précède que l’inclinaison des bords du domaine constitue une caractéristique essentielle pour décrire la convection dans une sphère (ou dans une coquille sphérique), puisqu’elle interdit une convection purement géostrophique. Si l’on ne retenait pas cette caractéristique, la convection n’apparaîtrait pas sous la forme d’une onde. Après l’étude du cas cylindrique simple, Busse propose donc l’étude d’un “cylindre conique” (voir figure 4.4). La pente θ des limites inférieures et supérieures est introduite pour permettre de modéliser l’effet stabilisateur lié à la rotation, c’est un paramètre essentiel de ce modèle (dit “annulus model”).

Busse introduit une mesure de la pente des bords du cylindre (équation B-70.3.2)

$$(4.24) \quad \check{\eta} = \sin \theta ,$$

et effectue une étude en perturbation en $\check{\eta}$.

Pour pouvoir utiliser une approximation cartésienne locale, Busse traite le cas des grands rapports d’aspect $D \ll L$ (“small gap”). Après intégration selon z , et en faisant, comme Roberts, l’hypothèse que la structure radiale est de grande échelle (ce qui permet de négliger les variations radiales), il obtient (B-70.3.1) une équation d’ordre deux pour la perturbation de pression. Le minimum de R dans cette équation est la valeur critique R_c .

Enfin, il interprète ces résultats dans le cas sphérique (sphère pleine), en chauffage uniforme.

Il obtient le mode de convection au seuil en rouleaux co-axiaux avec l’axe de

rotation, organisés en guirlande : les “colonnes de Busse”. Il détermine l’emplacement de cette guirlande par minimisation de R_c par rapport à $\tilde{\eta}$ (la géométrie sphérique définit le profil de $\tilde{\eta}$ en fonction de la distance à l’axe). Notons que dans l’étude du cas cylindrique, R varie comme $\tilde{\eta}^{4/3}$ (plus la pente est élevée aux bords du domaine, plus la convection est difficile à réaliser), comme les forces d’Archimède, sont moins efficaces près de l’axe de rotation (à cause du profil thermique conductif en r^2 , et du fait que seule la composante de la gravité perpendiculaire à l’axe de rotation est importante pour la force d’Archimède), on s’attend à ce que la convection démarre à une distance finie de l’axe de rotation.

Pour cette valeur de θ , il obtient alors des lois d’évolution en fonction du nombre de Prandtl et du nombre d’Ekman, pour le mode critique (équation B-70.4.11)¹⁰

$$(4.25) \quad m_c = \left(\frac{P \sqrt{5/2}}{4 E (1 + P)} \right)^{1/3},$$

le nombre de Rayleigh critique (équation B-70.4.12, avec B-70.4.4)

$$(4.26) \quad R_c = \left(\frac{P}{E (1 + P)} \right)^{4/3} 3 \left(\frac{5}{4} \right)^{5/3},$$

et de la pulsation (ou vitesse de phase) (équation B-70.4.13, ramenée au temps construit sur la viscosité)

$$(4.27) \quad \omega_c = -(2 E)^{-1} \left(\frac{10 E}{\sqrt{8} P (1 + P)^2} \right)^{1/3}.$$

La solution obtenue est une onde ($\omega = \text{Im}(\sigma) \neq 0$). C’est l’équilibre entre les effets d’un gradient déstabilisateur et l’effet stabilisateur de la rotation rapide qui est responsable de ce phénomène ondulatoire. On décrit souvent cette solution sous le terme d’“ondes de Rossby thermiques” (e.g. Busse, 1982, 1994)¹¹. Signalons que cette étude dans un cylindre a servi de base à un modèle de dynamo (Busse, 1975).

Cette approche en perturbation est moins précise que l’approche asymptotique, mais elle lui donne un sens physique. Elle permet de décrire les variations de la solution en fonction du nombre de Prandtl. Une comparaison quantitative avec l’étude asymptotique menée par Busse montre qu’il existe presque un facteur deux entre les deux études. Il s’explique vraisemblablement par le fait que

10. Reprise dans Chamberlain et Carrigan (1986), une erreur de typographie est introduite (leur équation 8), il faut lire $\frac{\sqrt{5/2}}{2}$ et non $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

11. *Stricto sensu* (Greenspan, 1968) les ondes de Rossby correspondent aux oscillations des colonnes fluides dans le cas où il n’existe pas de contour géostrophique (par exemple si les bords contiennent des points anguleux). C’est donc par analogie que l’on parle d’ondes de Rossby thermiques pour la convection dans une sphère (bien que les contours géostrophiques y existent.)

la pente ne peut pas être traitée comme une perturbation à la distance à l'axe où apparaît la convection. Busse propose également de l'expliquer par le fait que près de l'axe la gravité soit essentiellement axiale, or l'approche par perturbation n'en conserve que la composante selon le rayon cylindrique.

Nous allons également étudier l'influence du mode de chauffage sur le démarrage de la convection. Pour cela, il est important d'avoir à l'esprit une adaptation de l'étude précédente au cas du chauffage différentiel $\underline{\Delta}$ (Carrigan et Busse 1983). Cette adaptation est réalisée pour une étude expérimentale de convection, elle prend donc en compte la présence d'un vent thermique dès le seuil, mais les résultats peuvent être étendus au cas d'une gravité centrale. L'instabilité convective se développe alors près de la frontière interne du domaine (le profil conductif est à présent en $1/r$), et le nombre de Rayleigh critique, comme le mode critique dépendent du rapport d'aspect de la coquille sphérique.

On a ¹²

$$(4.28) \quad R_c = 3 \frac{P}{E^2} (\eta P)^{-1} \left(\frac{1}{2} E \left[\frac{2 P \eta}{(1 + P) r_e (1 - \eta^2)} \right]^2 \right)^{2/3},$$

$$(4.29) \quad m_c = \left(\frac{\sqrt{2} \eta P}{(1 + P) r_e (1 - \eta^2) E} \right)^{1/3}.$$

Le problème de la convection thermique dans une sphère en rotation rapide aurait donc une solution satisfaisante. Une étude asymptotique numérique donnerait les caractéristiques de la solution dans la limite des grands Ta , tandis qu'un modèle physique simplifié éclairerait la dépendance en fonction du nombre de Prandtl. Un nuage obscurcit ce tableau...

4.3.3 Limites de la méthode asymptotique

Soward (1977) étudie pour le chauffage uniforme la structure radiale de la solution asymptotique au seuil (voir sa section 5) et obtient que pour $Re(\sigma_m) = 0$ la longueur d'onde radiale de la solution est instable (elle décroît indéfiniment). Une solution linéaire localisée (en rayon) au seuil n'est pas réalisable. Il montre qu'une perturbation d'échelle ℓ évolue en temps comme $\ell - \frac{\partial \omega}{\partial s} t$. La diminution de l'échelle spatiale d'une perturbation avec le temps entraîne que toute perturbation linéaire près du seuil tend vers zéro quand $t \rightarrow \infty$. La conséquence physique est étonnante: la convection marginale ne se produit pas pour $R = R_c$, mais pour $R_2 > R_c$. Il insiste toutefois sur le fait que l'étude de l'instabilité des équations linéarisées pour $R = R_2$ serait d'un intérêt "purement académique", en effet dès $R = R_c$, le taux de croissance initial d'une perturbation locale étant grand, les termes non-linéaires ne peuvent en fait pas être négligés. Soward étudie

12. Ne pas confondre $\eta = r_i/r_e$ avec $\tilde{\eta}$ défini plus haut.

alors l'effet de ces termes sur la convection au seuil (voir plus loin : “convection d'amplitude finie”). Yano (1992) a repris ce problème dans le cadre de la méthode par perturbation (“annulus model”) de Busse. Il propose une structure radiale en $\mathcal{O}(Ta^{-1/6})$ (comme la structure azimuthale) “oblique” (décalage de la phase). Le problème théorique reste pour l'instant abstrait, faute d'illustrations numériques ou expérimentales.

4.3.4 Confrontation avec les études numériques

Hirsching et Yano (1993) présentent une confrontation de résultats numériques avec les études analytiques présentées ci-dessus. Une grande attention est apportée à la dépendance de la solution en fonction du nombre de Prandtl. Les auteurs étudient exclusivement le cas du chauffage uniforme et des conditions aux limites cinématiques de contraintes horizontales nulles, ils ne présentent les variations de la solution en fonction du nombre de Taylor que pour $Ta \leq 8 \cdot 10^6$. Nous utiliserons dans les sections suivantes le même genre de représentations que celles utilisées dans ce travail (pour l'étude de la section structure radiale de la solution). On le voit, le démarrage de la convection dans une coquille sphérique en rotation présente de nombreuses subtilités absentes du cas sans rotation.

Il paraît intéressant d'étudier sur une gamme aussi large que possible l'effet du nombre de Taylor sur la convection au seuil, de décrire l'évolution des paramètres critiques, et de la structure radiale de la solution. Cela demande des simulations numériques directes de la convection pour des petites valeurs du nombre d'Ekman.

Nous montrons que le démarrage de la convection présente des caractéristiques variant avec le chauffage utilisé. Ainsi, si une différence de température est maintenue, le démarrage est également en rouleaux mais leur localisation est fixée par la taille de la graine, ce qui n'est pas le cas en chauffage uniforme (dans la limite asymptotique). Lorsqu'un flux de chaleur est imposé comme condition aux limites externes, la convection est de très grande échelle pour une large gamme de nombres d'Ekman.

4.4 Etude numérique de la convection au seuil

4.4.1 Validation

Dans le souci de valider notre code, nous avons adopté pour les premières simulations un chauffage uniforme, mode de chauffage retenu par la plupart des auteurs. Nous avons utilisé à titre de validation l'article de Zhang et Jones (1992) qui est l'une des très rares études numériques de convection utilisant des conditions de non glissement, beaucoup plus difficiles à résoudre numériquement. Notons que la méthode de résolution numérique (aux valeurs propres) utilisée par ces auteurs diffère de la nôtre. Nous avons validé, après conversion de nos para-

mètres, nos résultats par rapport à leur table 2 (donnant m_c, R_c, ω_c pour différents E et rapports d'aspects). Nous avons aussi validé la structure spatiale de notre solution par rapport à leurs figures 2 et 4 (pour deux valeurs différentes du nombre d'Ekman, et les deux types de conditions aux limites cinématiques). Nous reproduisons ces résultats figures 4.5 et 4.6.

4.4.2 Détermination du seuil

Notre approche numérique diffère de celle habituellement employée pour résoudre le problème linéaire. Comme nous anticipons les études ultérieures, nous utilisons une intégration temporelle et non une recherche de vecteurs propres, le problème de la détermination numérique du seuil se pose alors.

On sait que le mode critique croît près du seuil comme

$$(4.30) \quad M = e^{\sigma t} \quad M, \sigma \in \mathbb{C},$$

que ce mode est caractérisé par $m = m_c$ et que les degrés l de ce mode se divisent en deux familles indépendantes $l + m$ pair et $l + m$ impair, qui correspondent aux deux symétries par rapport à l'équateur. Busse (1970) a montré que c'est la famille symétrique par rapport à l'équateur qui est critique. Tous les degrés d'une même famille pour un mode donné suivent la même évolution temporelle. On peut donc suivre en temps l'évolution de l'un de ces coefficients pour chaque famille de chaque mode m et calculer une valeur approchée du coefficient complexe σ correspondant en utilisant un schéma aux différences

$$(4.31) \quad \frac{dM}{dt}(t) = \frac{M(t) - M(t - \delta t)}{\delta t} + \frac{\delta t}{2} \frac{d^2 M}{dt^2}(t) + \mathcal{O}(\delta t^2) = \sigma e^{\sigma t},$$

$$(4.32) \quad \sigma = \frac{1}{M(t)} \left[\frac{M(t) - M(t - \delta t)}{\delta t} + \frac{\delta t}{2} \frac{d^2 M}{dt^2}(t) + \mathcal{O}(\delta t^2) \right].$$

Ce schéma est consistant et convergent lorsque $\delta t \rightarrow 0$, il convient toutefois d'être prudent lors de la détermination du seuil. On cherche à déterminer la valeur du nombre de Rayleigh telle que

$$(4.33) \quad Re(\sigma) = 0,$$

pour cela, on se rapproche par dichotomie (pondérée des taux de croissances) de ce seuil jusqu'à

$$(4.34) \quad |Re(\sigma)| \ll \mathcal{O}(1),$$

puis on linéarise $Re(\sigma)$ comme fonction du nombre de Rayleigh pour déterminer précisément la valeur de R_c connaissant $Re(\sigma(R_c + \varepsilon_1))$ et $Re(\sigma(R_c + \varepsilon_2))$ deux valeurs du taux de croissance près du seuil¹³. On vérifie ensuite à l'aide d'autres points ($\sigma(R_c + \varepsilon_3)$, ...) que la linéarisation est justifiée (c'est-à-dire que l'on est assez près du seuil).

13. où ε_1 comme ε_2 peuvent être négatifs.