

## Summary

We study here a simplified problem (axisymmetric, and with no energy equation) where motions are generated by differentially rotating boundaries. We first study the fluid dynamic problem. After rapidly recalling the experimental and theoretical knowledge on Ekman layers (§3.1), we test our numerical resolution (fig 3.5 & 3.6). The asymptotic solution (Proudman, 1956) for this problem is explained in §3.2. The simplicity of this problem (as compared to the dynamo one) allows us to study a wide range of Ekman numbers (§3.3). It is found that the Ekman number has to be decreased below  $10^{-6}$  to reproduce qualitative features of the asymptotic solution (see fig. 3.10 and 3.12).

We then study the MHD problem, in the presence of an imposed dipolar and force free magnetic field with sources at the inner core boundary (fig. 3.14). We compare (§3.4.2) the results with an insulating inner body with the numerical study of Hollerbach (1994) and the analytical development of Kleorin et al. (1997). We find a good agreement with both (fig. 3.19). Then we study in more details the case of a conducting inner core (§3.4.3, §3.4.4). In this case, when the magnetic field is strong enough, the solution is expected to be close to a state of solid rotation with the inner body. As the Elsasser number increases, the boundary layers are modified by magnetic effects. Ekman layers are progressively changed into Hartmann type layers (fig. 3.16 and 3.17). In the limit of large Elsasser numbers, the shear at the inner sphere boundary vanishes, as the flow tends to a bulk rotation together with the inner sphere. The first effects of the Lorentz forces on the main flow is, as expected, to smooth the change in angular velocity at the tangent cylinder (fig. 3.24). Unexpectedly, for increasing strength of the field, we observed a super rotation (the fluid's angular velocity reaches a maximum inside the fluid volume) localized in an equatorial torus limited by imposed field lines. It results from the spherical geometry (Hartmann and Ekman boundaries singularities) and the presence of a conducting inner core. At a given field strength, the amplitude of this phenomenon depends on the Ekman number and tends to vanish in the magnetostrophic limit. This demonstrates once again the decisive role played by the Ekman number on the solutions, even with important magnetic effects.

Main results and discussions presented in this chapter have been submitted to “Earth and Planetary Science Letters” in an article entitled “MHD flow in a slightly differentially rotating spherical shell, with conducting inner core, in a dipolar magnetic field”, co-authored with Philippe Cardin and Dominique Jault. It is included as a “pre-print” in appendix C .

## Chapitre 3

# Magnétohydrodynamique entre deux sphères en rotation différentielle



Le système d'équations introduit aux chapitres précédents est complexe et sa résolution numérique ardue. Il apparaît donc sensé d'en étudier pour commencer une version simplifiée. L'une des difficultés majeures que l'on rencontre lorsque l'on cherche à approcher numériquement une solution de ce système est liée à la rotation très rapide de la terre. Le nombre d'Ekman qui mesure le temps caractéristique associé à la rotation du système par rapport au temps caractéristique associé à la viscosité du fluide est très petit, environ  $10^{-15}$ . La puissance de calcul nécessaire à la résolution du système (ou d'un système simplifié) croît très rapidement lorsque l'on diminue ce paramètre<sup>1</sup>. Même en utilisant diverses astuces pour réduire les petites échelles (suppression des couches d'Ekman, usage d'hyperviscosité), ce nombre n'est jamais descendu en dessous de  $10^{-6}$  et est en général choisi autour de  $10^{-5}$ , ce qui reviendrait à allonger la longueur du jour d'un coefficient supérieur au million, ou encore, à surestimer d'autant la viscosité du fluide dans le noyau liquide.

Il paraît utile de chercher à mieux comprendre les difficultés numériques associées aux petits nombres d'Ekman via l'étude de problèmes simplifiés. Nous présentons ici l'étude de l'un de ces problèmes : axisymétrique, laminaire et où les mouvements sont générés par une rotation différentielle des sphères aux limites du problème (figure 3.1). On notera  $\Omega$  la rotation de la sphère externe (à

---

1. Considérons la résolution de structures en  $E^{1/2}$ , pour trois dimensions d'espace et en tenant compte de la stabilité numérique, le temps de calcul croît comme  $E^{-2}$ .

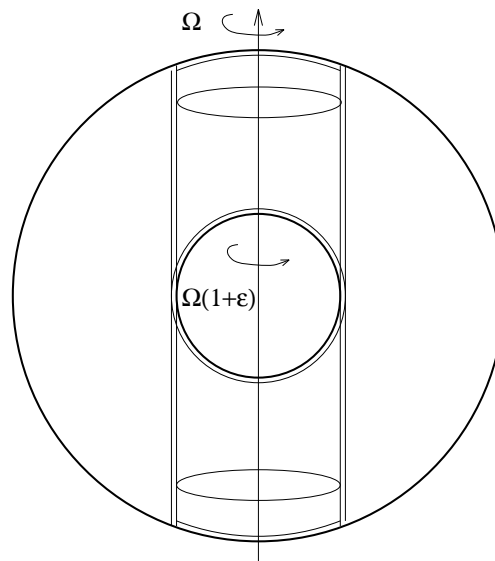


FIG. 3.1 – Nous étudions l'écoulement fluide, puis l'écoulement MHD entre deux sphères en rotation rapide et légèrement différentielle.

laquelle notre repère sera associé) et  $(1 + \epsilon)\Omega$  celle de la sphère interne.

Nous étudions ce problème de mécanique des fluides, puis l'écoulement magnétohydrodynamique en présence d'un champ magnétique imposé. Nous cherchons à étudier une gamme aussi large que possible de paramètres et essaierons d'en tirer des conclusions sur le régime asymptotique des petits nombres d'Ekman. Par la nature de ce problème, l'usage d'une hyperviscosité ou la suppression des couches d'Ekman n'auraient pas de sens. Une motivation supplémentaire pour ce travail est de pouvoir tester le code 3D présenté au chapitre précédent sur un problème assez simple et dont la solution est bien comprise, afin de le valider. Ce travail nous permet également de tester les performances et les limitations de notre approche numérique.

Bien que nettement plus simple que la convection magnétohydrodynamique en trois dimensions, ce problème est très intéressant en lui même, puisqu'il présente, même en l'absence de champ magnétique imposé, une solution asymptotique non triviale. Enfin, l'annonce récente d'une possible observation de rotation différentielle de la graine par rapport au manteau terrestre (Song et al. 1996, Su et al. 1996) ajoutera, si cela était nécessaire, une motivation supplémentaire à l'étude de l'écoulement entre deux sphères concentriques en rotation différentielle et des effets d'un champ magnétique sur cet écoulement.

### 3.1 Système et forme adimensionnée

On peut simplifier le système (1.71) ; pour ce problème, l'équation d'énergie peut être oubliée,

$$(3.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} &= -\vec{u} \cdot \nabla \vec{u} - \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} \pi + \nu \Delta \vec{u} - 2\Omega (\vec{e}_z \wedge \vec{u}) \\ &+ \frac{1}{\mu_0 \rho_0} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= 0, \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{B}) + \eta \Delta \vec{B}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0. \end{cases}$$

On adimensionnalise le système d'équations (3.1), en choisissant respectivement comme unité de longueur de temps et d'induction

$$(3.2) \quad \mathcal{L} = r_e, \quad t = [\varepsilon \Omega]^{-1}, \quad \mathcal{B} = B_0 |_{r=r_e}.$$

On peut alors définir les grandeurs sans dimension

$$(3.3) \quad E = \frac{\nu}{\Omega r_e^2}, \quad \Lambda = \frac{B_0^2}{\Omega \rho \mu \eta}, \quad P_m = \frac{\nu}{\eta},$$

appelées respectivement nombre de *Ekman*, nombre d'*Elsasser* et nombre de *Prandtl magnétique*.

Le système (3.1) s'écrit alors sous forme adimensionnée

$$(3.4) \quad \begin{cases} \varepsilon \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) &= -\vec{\nabla} \pi + E \Delta \vec{u} \\ &- 2 \vec{e}_z \wedge \vec{u} + \Lambda \cdot P_m^{-1} \cdot E \cdot \varepsilon^{-1} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= 0, \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{B}) + P_m^{-1} \cdot E \cdot \varepsilon^{-1} \Delta \vec{B}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0. \end{cases}$$

On décompose le champ  $\vec{B}$  en un champ statique imposé à force nulle ( $\vec{j} \wedge \vec{B} = \vec{0}$ ) plus une perturbation induite. On peut mettre la perturbation à l'échelle pour avoir

$$(3.5) \quad \vec{B} = \vec{B}_0 + (\varepsilon \cdot P_m \cdot E^{-1}) \vec{b}.$$

Quand  $b \ll B_0$ , le système (3.4) devient

$$(3.6) \quad \begin{cases} \varepsilon \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \nabla \vec{u} \right) &= -\vec{\nabla} \pi + E \Delta \vec{u} \\ &\quad -2 \vec{e}_z \wedge \vec{u} + \Lambda (\vec{\nabla} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{B}_0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= 0, \\ \varepsilon \cdot P_m \cdot E^{-1} \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} &= \vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{B}_0) + \Delta \vec{b}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{b} &= 0. \end{cases}$$

Les équations scalaires dérivent alors simplement de (2.50) puis (2.102). Il est important de noter que s'il faut quatre nombres sans dimension,  $\varepsilon$ ,  $E$ ,  $\Lambda$ ,  $P_m$ , pour décrire l'ensemble des paramètres, deux d'entre eux,  $E$ ,  $\Lambda$ , suffisent lorsqu'on ne s'intéresse qu'à l'état stationnaire ( $t \rightarrow \infty$ ). Nous n'avons pas étudié les états intermédiaires et avons constaté (pour une large gamme de paramètres  $E$ ,  $\Lambda$ ) qu'avec nos approximations (axisymétrie,  $b \ll B_0$  et  $\varepsilon \ll 1$ ), la solution se stabilisait toujours sur un état stationnaire.

## 3.2 Mécanique des fluides

Dans cette section nous aborderons le problème de mécanique des fluides classique, c'est-à-dire que nous restreignons le système précédent au cas  $\vec{B}_0 = \vec{0}$  et donc  $\vec{b} = \vec{0}$ .

### 3.2.1 Couches d'Ekman

Les couches visqueuses représentent un problème central dans les études de mécanique des fluides. Aux limites, lorsqu'elles sont modifiées par l'effet d'une rotation rapide, ces couches, que l'on appelle alors couches d'Ekman, deviennent encore plus importantes, car elles induisent un écoulement secondaire dans le corps du fluide.

Un exemple classique est celui de la tasse de thé<sup>2</sup>. Lorsque l'on agite le thé dans une tasse avec une cuillère en lui donnant un mouvement globalement circulaire, on constate que les feuilles tombées au fond se rassemblent invariablement au centre de la tasse<sup>3</sup>. Cela prend en général l'intuition à défaut, car on s'attendrait volontiers, à ce que des effets centrifuges les séparent et les entraînent à

---

2. A la demande de Philippe Cardin, je précise qu'il faut utiliser du thé vert pour obtenir de bons résultats.

3. Cette observation est bien entendu indépendante du sens de la rotation imposée au fluide. Pour obtenir l'effet opposé, il faut imposer un mouvement de rotation au conteneur (la tasse) alors que le liquide est au repos, les feuilles se dispersent alors en périphérie.

la périphérie. Plus denses que le liquide (puisqu'elles sont au fond), elles échantillonnent clairement une couche limite au fond de la tasse et cet effet met en évidence la complexité des couches d'Ekman. En conjonction avec la contrainte du théorème de Proudman-Taylor (en rotation rapide l'écoulement principal est verticalement invariant), l'effet de ces couches limites sur l'écoulement principal peut être très important et même primordial très loin des régions directement affectées par les effets visqueux.

Revenons à la tasse de thé. Edward Taylor réalise, en 1972, une expérience (qu'il baptise d'ailleurs "Teacup Experiment") visant à observer ce phénomène de manière plus rigoureuse. Il utilise un vase cylindrique (d'environ 50 cm de diamètre). Pour commencer, il place le conteneur en rotation et attend d'avoir atteint un régime stationnaire de rotation en bloc du fluide avec le conteneur. Il arrête alors la rotation du conteneur ; à l'exception des régions proches du bord, le fluide continue de tourner. Il visualise l'écoulement grâce à une ligne de bulles d'hydrogène produites par électrolyse à l'aide de brèves impulsions dans un fil placé verticalement (*c.f.* figure 3.2). On observe clairement sur ses photographies un mouvement radial vers le centre du conteneur confiné dans une couche limite en bas de la cuve (photographie 3.2.b à droite). On observe également que la vitesse angulaire non-nulle de l'écoulement principal croît à l'entrée de la couche limite avant de se raccorder à la vitesse angulaire nulle du conteneur.

Pour décrire ce phénomène, on peut commencer par considérer que l'écoulement consiste en une rotation en bloc à l'exception du fluide près de la paroi qui doit tourner moins vite, pour se raccorder au conteneur qui est à l'arrêt. On aurait alors affaire à une couche limite de type classique. Cet écoulement satisfait clairement les conditions aux limites, ainsi que l'équation de continuité. En ce qui concerne l'équation de la quantité de mouvement, on doit avoir :

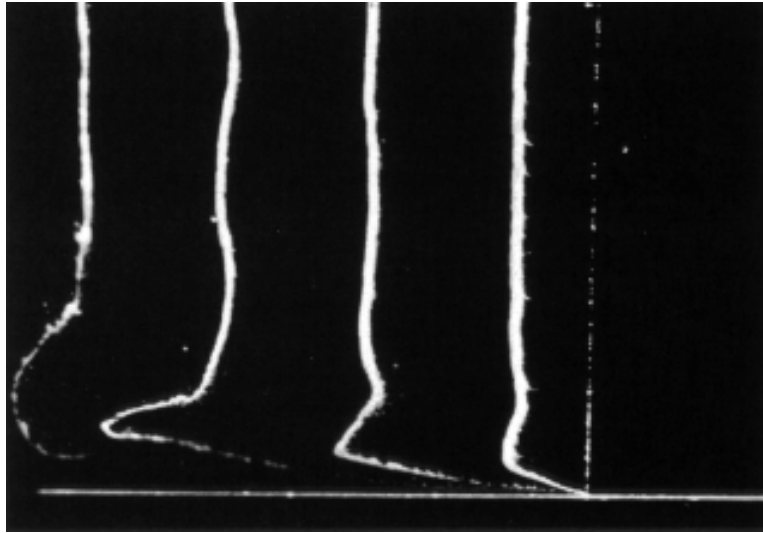
$$-\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p^0 + \frac{1}{2} \vec{\nabla} (u_\phi^0)^2 = 0,$$

dans l'écoulement principal et

$$-\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p + \frac{1}{2} \vec{\nabla} (u_\phi^2) + \nu \Delta u = 0,$$

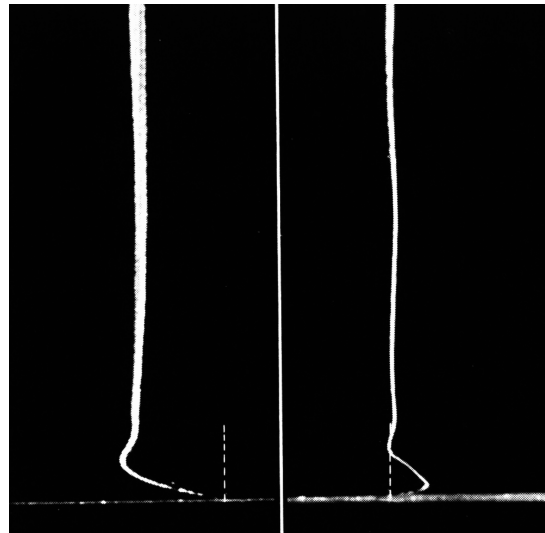
dans les couches visqueuses. On fait l'hypothèse que l'écoulement principal fixe le gradient de pression et que celui-ci ne varie pas dans la couche limite (ce qui est raisonnable si la couche limite est très fine). A gradient de pression constant, la diminution de la vitesse angulaire du fluide entraîne un déséquilibre associé au gradient centrifuge. Ce déséquilibre se caractérise par une force qui entraîne un écoulement vers le centre du conteneur (ce terme se trouve alors compensé par la viscosité).

Dans le cas en rotation, qui nous intéresse, les choses ne s'expriment pas tout à fait de la même façon (bien qu'en fait cela soit équivalent). L'équilibre dans



a.

FIG. 3.2 – L'écoulement dans une expérience en rotation (conteneur cylindrique), est ici visualisé en suivant les déformations d'une ligne de bulles d'hydrogène produites par électrolyse à partir d'un fil vertical (E.S. Taylor, 1972). Sur la première photographie (a), la vue est radiale (on regarde vers l'axe de rotation) on observe donc à travers les déformations de lignes créées par de très courtes impulsions de courant régulièrement espacées dans le temps la vitesse azimutale dans l'écoulement principal ainsi que dans la couche limite.



b.

Sur la deuxième photographie (b), on observe la déformation d'une ligne unique, l'emplacement du fil a été indiqué par des pointillés. A gauche, la vue est la même que sur la première photographie, à droite en revanche la vue est tangente et l'on visualise donc la vitesse radiale (le centre de la cuve est sur la droite). Ces résultats expérimentaux sont à comparer à la théorie analytique et aux simulations numériques (figures 3.3, 3.4 et 3.5).

l'écoulement principal s'écrit

$$-\vec{\nabla} p - 2\Omega \vec{e}_z \wedge \vec{u}^0 = 0,$$

et dans la couche limite s'écrit alors

$$-\vec{\nabla} p + \nu \Delta u - 2\Omega \vec{e}_z \wedge \vec{u} = 0,$$

la variation de vitesse angulaire intervient alors directement à travers le terme de Coriolis car c'est l'interaction avec  $\Omega$  qui importe (l'interaction de  $u_\phi$  sur lui-même étant négligeable). L'effet reste toutefois le même. Le terme de Coriolis est au premier ordre  $-2\Omega \vec{e}_z \wedge \vec{u}_\phi$  et la variation de  $u_\phi$  dans la couche limite entraîne, à nouveau, à gradient de pression constant, un déséquilibre des différents termes et un écoulement vers le centre.

L'effet visible sur la photographie 3.2.a de dépassement de la vitesse angulaire de l'écoulement principal est lié à ce mouvement secondaire parallèle à l'axe de rotation dans la couche limite, qui entraîne le fluide à son contact et l'accélère.

Une caractéristique essentielle des couches d'Ekman est la succion qui y est associée, souvent appelée pompage d'Ekman et directement liée à l'écoulement secondaire qui y a lieu (par la conservation de la masse).

Formellement, on a dans le cas plan<sup>4</sup> ( $x, y$ ) tournant<sup>5</sup> autour d'un axe normal ( $z$ ) pour l'écoulement principal (géostrophique)  $u^0$

$$(3.7) \quad \begin{aligned} 2\Omega u_x^0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^0}{\partial y}, \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^0}{\partial x}. \end{aligned}$$

Dans la couche limite,

$$(3.8) \quad \begin{aligned} -2\Omega u_y &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}, \\ 2\Omega u_x &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

En identifiant les gradients de pression horizontaux ( $p = p_0$ ) par soustraction des équations précédentes, on a

$$(3.9) \quad \begin{aligned} -2\Omega u_y &= \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}, \\ 2\Omega (u_x - u_x^0) &= \nu \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

---

4. Tritton, 1988

5. Volume et frontières sont en rotation.



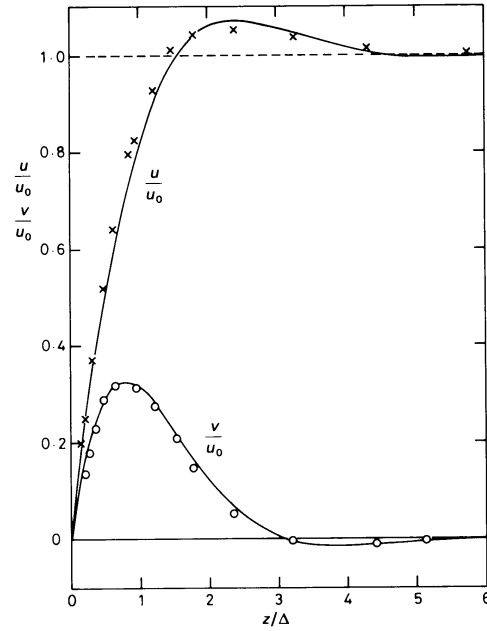


FIG. 3.3 – Comparaison entre les résultats expérimentaux et la description théorique des couches d’Ekman effectuée par D.J.Tritton (1988).

Equation dont la solution avec des conditions aux limites de vitesse nulle, est de la forme

$$(3.10) \quad \begin{aligned} u_x &= u_x^0 \left[ 1 - e^{-z/\delta} \cos(z/\delta) \right], \\ u_y &= u_x^0 e^{-z/\delta} \sin(z/\delta), \end{aligned}$$

la taille de la couche est donnée par  $\delta = \left( \frac{\nu}{\Omega} \right)^{1/2}$ .

Cette solution est représentée graphiquement figure 3.3 (où  $u$  correspond à  $u_x$  et  $v$  à  $u_y$ ). Cette compréhension théorique est en excellent accord avec les observations expérimentales, comme on peut le vérifier figure 3.3.

Cependant, cette solution de couche limite ne satisfait pas la conservation de la masse ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ ),

$$(3.11) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{\partial}{\partial y} u_x^0 e^{-z/\delta} \sin(z/\delta),$$

Cela entraîne un écoulement secondaire  $u_z$  tel que

$$(3.12) \quad \frac{\partial}{\partial z} u_z = -\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = -\frac{\partial}{\partial y} u_x^0 e^{-z/\delta} \sin(z/\delta),$$

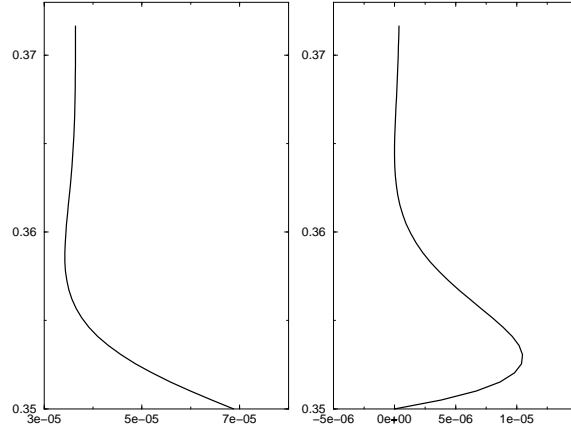
d’où

$$(3.13) \quad u_z = \frac{\partial}{\partial y} u_x^0 \left[ \frac{\delta}{2} \cos(z/\delta) + \frac{\delta}{2} \sin(z/\delta) \right] e^{-z/\delta},$$

déterminé à une constante près pour que  $u_z$  s’annule au bord. D’où

$$u_z = -\frac{\delta}{2} \left( \frac{\partial u_x^0}{\partial y} \right),$$

FIG. 3.4 – *A gauche une coupe de  $u_\phi$  et à droite une coupe de  $u_\theta$  dans la couche limite près de la graine pour une de nos simulations ( $E = 10^{-5}$ ). La comparaison avec l'expérience 3.2 est aussi bonne qu'avec la théorie 3.3.*



qui donne le mouvement rentrant dans la couche limite, c'est le "pompage d'Ekman".  $u_z$  est d'ordre  $\delta$  ( $E^{1/2}$ ), mais ne s'annule pas en dehors de la couche limite. Il entraîne un écoulement secondaire dans le volume.

Cette étude doit être modifiée dès lors que la frontière n'est plus normale à l'axe de rotation (voir Pedlosky 1979). Si  $\vec{\Omega}$  fait un angle  $\theta$  avec la normale, i.e.

$$\vec{\Omega} = \cos \theta \vec{e}_z + \sin \theta \vec{e}_y .$$

L'équation 3.7 (dans le volume) devient

$$(3.14) \quad \begin{aligned} 2\Omega \cos \theta u_x^o &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^o}{\partial y} , \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^o}{\partial x} . \end{aligned}$$

Le raisonnement qui suit est identique, mais la grandeur  $\delta$  doit être remplacée par

$$(3.15) \quad \delta_\theta = \left( \frac{\nu}{\Omega \cos \theta} \right)^{1/2} = \delta \frac{1}{(\cos \theta)^{1/2}} .$$

Le pompage s'écrit alors

$$(3.16) \quad \vec{u} \cdot \vec{n} = -\frac{\delta_\theta}{2} \left( \frac{\partial u_x^o}{\partial y} \right) ,$$

où  $\vec{n}$  est la normale à la paroi. L'amplitude et le signe du flux de matière dans la couche limite sont donc contrôlés par le saut de vorticité à travers la couche limite, ainsi que par un coefficient géométrique dépendant de la pente locale au bord du domaine.

Ces couches limites sont donc très différentes des couches limites visqueuses classiques. Leur structure compliquée peut être résumée graphiquement sous la forme d'une spirale (appelée spirale d'Ekman) si l'on représente une section de la

vitesse azimutale par rapport à la vitesse méridionale (voir à nouveau Greenspan, 1969, Chapitre 2).

Nous verrons dans la section suivante que le pompage des couches d'Ekman peut dans certains cas contrôler l'ensemble de l'écoulement.

Du point de vue numérique, ces couches limites posent des problèmes ardu. Tout d'abord, leur petite taille (en  $E^{1/2}$ ) qui nécessite l'usage de grilles déformées aux abords des limites du domaine. Même avec des grilles déformées, leur résolution accroît considérablement le nombre de points de calcul et il est essentiel de déterminer soigneusement combien de points sont nécessaires pour assurer leur résolution. Une autre difficulté est liée au fort gradient de la solution dans ces couches limites. Des oscillations parasites "polluent" souvent la résolution numérique de telles couches. Il est décisif de s'assurer qu'elles restent petites et qu'elles ne détériorent pas la solution (qu'elles ne s'étendent pas au cours de la résolution) et qu'elles s'amortissent, pour disparaître, dans l'état stationnaire.

A cause de leur structure compliquée et de l'écoulement secondaire qui s'y produit, la couche d'Ekman est plus difficile à résoudre qu'une couche limite classique. Nous avons étudié cette question numériquement en variant le nombre de points utilisés. Nous concluons qu'environ dix points (régulièrement espacés) à l'intérieur de la couche sont nécessaires à sa résolution numérique. Si l'on utilise moins de points, l'écoulement secondaire n'est pas correctement résolu, le pompage d'Ekman s'en trouve faussé et la solution dans l'ensemble de l'écoulement est alors erronée (voir figures 3.5 et 3.6).

### 3.2.2 Etat asymptotique

Le système étant en rotation rapide, dans la limite des faibles viscosités, le terme de Coriolis domine largement les autres forces dans l'écoulement principal, et il ne peut être équilibré en régime stationnaire que par le gradient de pression. C'est ce que l'on appelle l'équilibre géostrophique

$$(3.17) \quad 2\rho \vec{\Omega} \wedge \vec{u} = -\vec{\nabla} \pi .$$

En prenant le rotationnel de (3.17), on dérive la contrainte de Proudman-Taylor

$$(3.18) \quad \vec{\nabla} \wedge (\vec{e}_z \wedge \vec{u}) = \vec{0} ,$$

$$(3.19) \quad (\vec{e}_z \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - \underbrace{(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{z}}_{=\vec{0}} + \underbrace{\vec{u} (\vec{\nabla} \cdot \vec{e}_z)}_{=\vec{0}} - \underbrace{\vec{e}_z (\vec{\nabla} \cdot \vec{u})}_{=\vec{0}} = \vec{0} ,$$

$$(3.20) \quad (\vec{e}_z \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \vec{0} ,$$

$$(3.21) \quad \boxed{\frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = \vec{0} .}$$

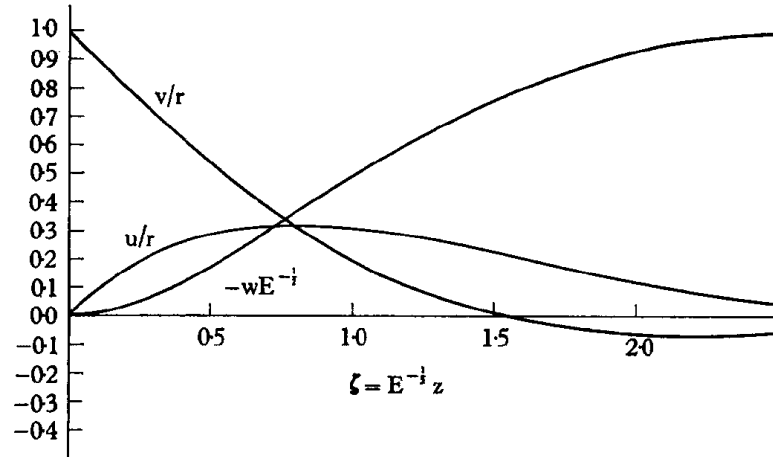


Fig. 2.1. Velocity profiles in the steady Ekman layer.

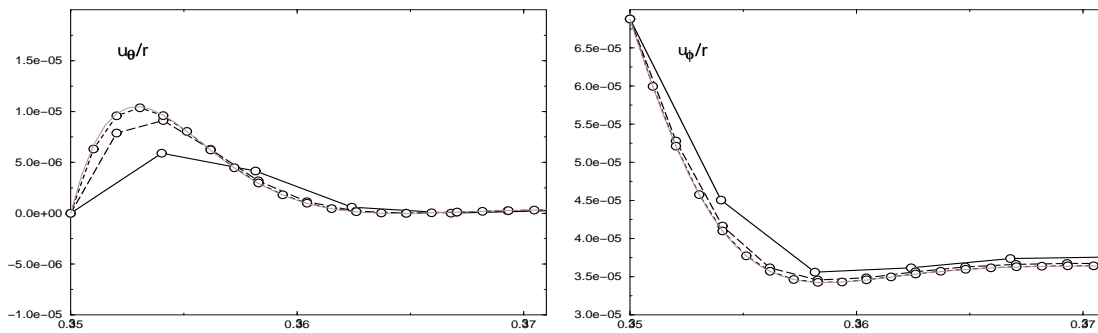


FIG. 3.5 – En haut, la couche d'Ekman théorique dans le cas plan extraite de Greenspan (1969), en bas la convergence de notre résolution numérique avec l'augmentation du nombre de points dans la couche limite (pour  $E = 10^{-5}$ ). La composante  $v$  de Greenspan correspond à notre  $u_x$  et  $u$  à notre  $u_y$ .

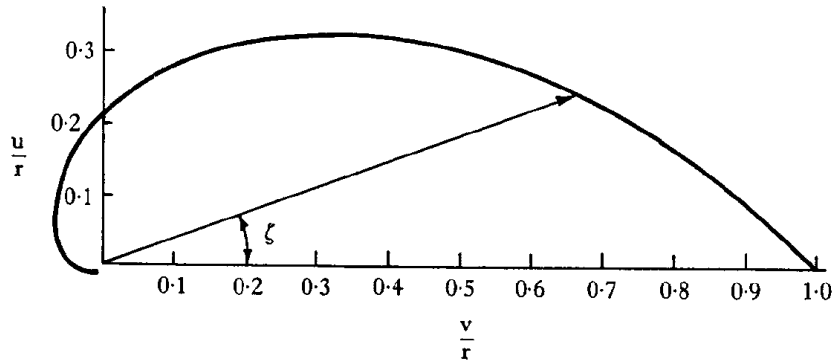


Fig. 2.2. The Ekman spiral. The boundary layer co-ordinate is plotted as a polar angle.

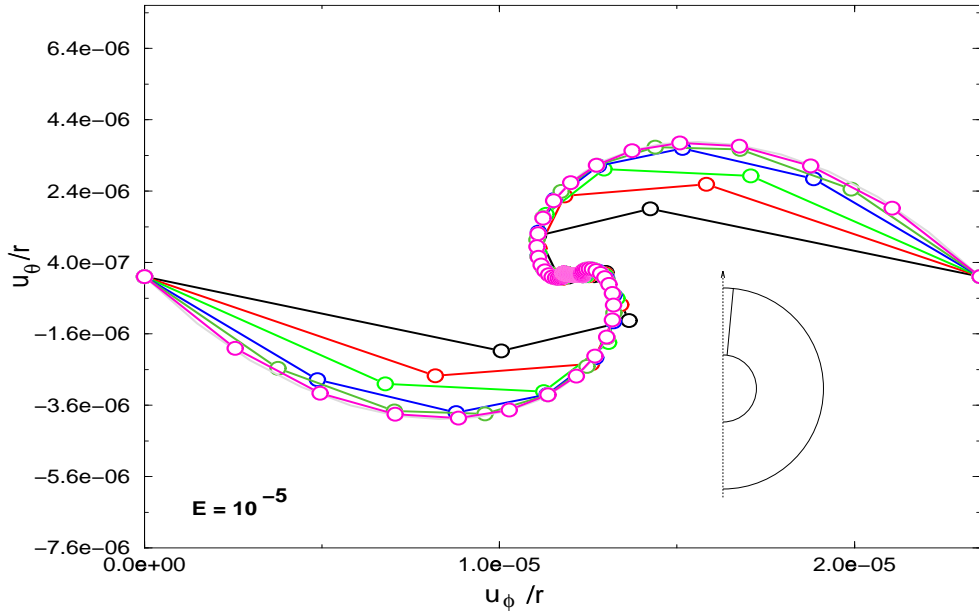


FIG. 3.6 – En haut, une représentation paramétrique de la vitesse dans la couche d'Ekman théorique (à partir des deux profils de vitesse de la figure 3.5) sous la forme d'une spirale (Greenspan, 1969). En bas, une coupe monodimensionnelle adoptant la même représentation à travers toute la coquille pour un de nos calculs ( $E = 10^{-5}$  et pour un angle  $\theta$  petit). La vitesse angulaire variant peu le long de cette coupe dans le corps du fluide et la vitesse méridienne étant négligeable devant celle des couches limites, cette représentation donne énormément d'importance aux couches limites (l'écoulement principal étant concentré entre les deux spirales). L'accord qualitatif avec la spirale théorique constitue une validation supplémentaire de notre résolution de la couche d'Ekman.

Un écoulement géostrophique est donc invariant verticalement. Dans une sphère parfaite (comme dans une coquille sphérique), cela implique que le mouvement s'organise en cylindres concentriques, co-axiaux avec l'axe de rotation (que l'on appelle "contours géostrophiques"). Tout mouvement selon  $\vec{e}_s$  entraînerait en raison de l'inclinaison des conditions aux limites, un étirement ou une contraction de la colonne de fluide et donc une violation de (3.21). L'écoulement principal s'écrit alors

$$(3.22) \quad \vec{u} = \vec{\nabla} \wedge [\vec{r} u_t(s)]$$

où

$$(3.23) \quad u_t(s) = s^2 \Omega_g(s).$$

Après ces rappels généraux, revenons maintenant au problème entre deux sphères en rotation différentielle. Proudman a montré qu'il existe une solution stationnaire à symétrie de révolution. Dans le corps du volume, les forces visqueuses sont négligées, la contrainte de Proudman-Taylor s'applique donc. On en déduit  $u_s = 0$ , par l'équation de conservation de la masse (on rejette la solution singulière à l'axe). La solution comprend donc deux termes, la vitesse géostrophique et une vitesse parallèle à l'axe  $u_z(s)$ .

Remarquons le rôle particulier joué par le "cylindre tangent". Il s'appuie sur l'équateur de la sphère interne (son rayon  $s$  est égal au rayon  $r_i$  de la sphère interne)<sup>6</sup>. Tous les cylindres dont le rayon  $s$  est supérieur à  $r_i$  touchent la sphère externe aux deux extrémités. Puisque  $\vec{\Omega}_g = \vec{\Omega}$ , il n'y a pas de pompage dans les couches limites. Leur état stationnaire consiste donc en une rotation à la vitesse angulaire de la sphère externe, et la vitesse axiale est nulle. A l'extérieur du cylindre tangent, la solution asymptotique sera donc une rotation en bloc avec la sphère externe. A l'intérieur du cylindre tangent la situation est différente, les cylindres géostrophiques "touchent" d'une extrémité la sphère externe, de l'autre la sphère interne. On peut donc s'attendre à ce que leurs vitesses angulaires se trouvent comprises entre celles des deux conditions aux limites. Proudman a démontré, en 1956, que la vitesse angulaire de ces cylindres est contrainte par le pompage d'Ekman. Comme le fluide est supposé incompressible et que l'écoulement à symétrie de révolution est invariant verticalement, le fluide entrant dans la couche d'Ekman à une extrémité d'un cylindre géostrophique doit nécessairement correspondre au fluide sortant de la couche limite à l'autre extrémité. Comme nous l'avons rappelé dans la section précédente, le pompage d'Ekman ne dépend pas seulement du saut de vorticité à travers la couche limite, mais également de la pente de la frontière. Dans le cas sphérique (d'après 3.16),

$$(3.24) \quad u_r = \vec{u} \cdot \vec{n} = -\frac{\delta_\theta}{2} \left( \frac{\partial u_x^0}{\partial y} \right),$$

---

6. Il est représenté sur la figure 3.1.

où

$$\delta_\theta = \frac{E^{1/2} r_e}{(\cos \theta)^{1/2}}.$$

Avec

$$u_x^0 = r \sin \theta \Omega(s),$$

il vient

$$(3.25) \quad u_r = -\frac{1}{2} E^{1/2} \frac{r_e}{(\cos \theta)^{1/2}} \cos \theta \Omega(s).$$

Le même raisonnement s'applique à la sphère externe (le saut de vitesse angulaire valant alors  $\Omega(s) - \varepsilon \Omega$ ).

En utilisant  $u_r = u_z \cos \theta$  (car  $u_s = 0$ ) dans le volume,  $u_z$  s'écrit

$$(3.26) \quad u_z = -\frac{1}{2} E^{1/2} \frac{r_e}{(\cos \theta)^{1/2}} \Omega(s)$$

à l'entrée de la couche limite externe, et

$$(3.27) \quad u_z = \frac{1}{2} E^{1/2} \frac{r_e}{(\cos \theta)^{1/2}} (\Omega(s) - \varepsilon \Omega)$$

à l'entrée de la couche limite interne. En égalant les deux quantités, on détermine la vitesse angulaire d'un cylindre géostrophique de rayon  $s < r_i$

$$(3.28) \quad \Omega_g(s) = \Omega + \Omega \varepsilon \frac{(1 - s^2)^{1/4}}{(1 - s^2)^{1/4} + (1 - (s/r_i)^2)^{1/4}},$$

exprimée dans le repère au repos (voir figure 3.7).

On peut vérifier que près de l'axe, les deux sphères présentant des frontières presque horizontales, le pompage est proportionnel au saut de vitesse angulaire et la vitesse angulaire des cylindres est donc proche de la moyenne de celles des deux sphères ( $\Omega_g(0) = (1 + \varepsilon/2) \Omega$ ). Près du cylindre tangent (mais à l'intérieur de celui-ci), en revanche, le facteur géométrique est très important. L'efficacité du pompage d'Ekman augmente avec la pente de la condition aux limites, qui croît beaucoup plus vite pour la sphère interne. Le saut de vorticité entre le cylindre géostrophique et la sphère interne se doit donc d'être petit pour que le pompage, rendu important par le coefficient géométrique, puisse être compensé à l'autre extrémité ( $\Omega_g(r_i) = (1 + \varepsilon) \Omega$ ). La solution asymptotique se caractérise donc par une synchronisation progressive de la vitesse angulaire des cylindres géostrophiques avec la sphère interne lorsque la distance à l'axe croît, puis une chute brutale à la vitesse angulaire de la sphère externe au passage du cylindre tangent.

Nous ne décrivons pas ici la couche de Stewartson (Stewartson, 1957), qui est la couche visqueuse associée à ce changement violent de vitesse géostrophique

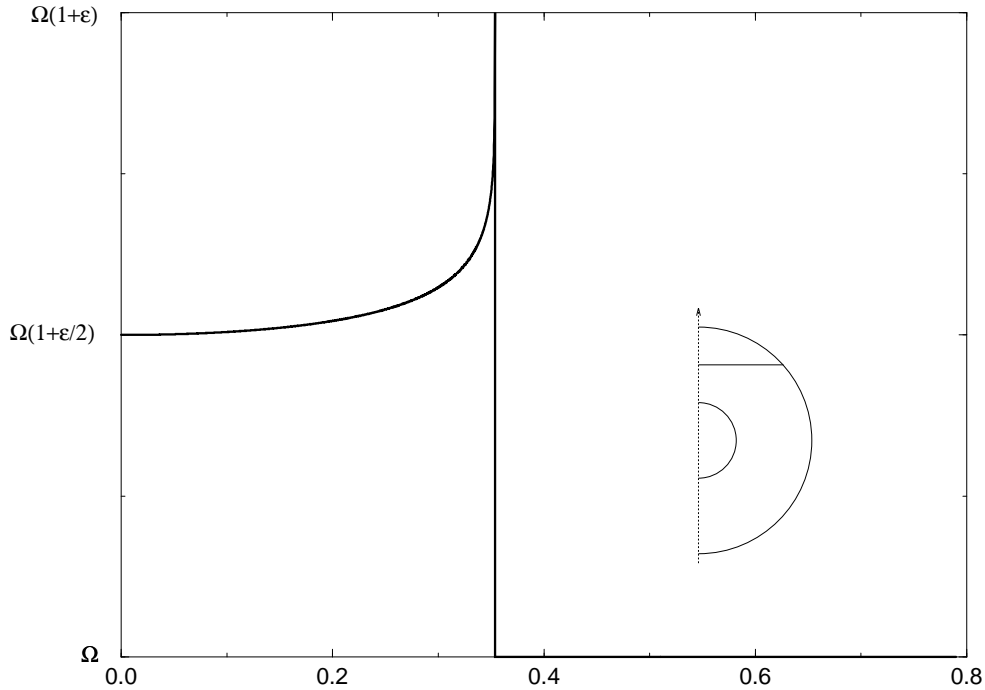


FIG. 3.7 – La vitesse angulaire en fonction de la distance à l'axe en régime stationnaire pour  $E \rightarrow 0$  (d'après l'étude de Proudman, 1956).

entre  $s < r_i$  et  $s > r_i$ . Cette structure de re-circulation très fine ( $E^{1/3}$ ) demanderait des nombres d'Ekman très petits pour être convenablement étudiée. Même avec nos plus petits nombres d'Ekman, la viscosité modifie encore fortement l'écoulement hors des couches limites.

Pour des rotations différentielles assez petites ( $\varepsilon \ll E^{1/3}$ ), le terme non-linéaire ne modifie pas significativement la solution. Pour des  $\varepsilon$  assez grand, on attend des instabilités 3D (voir Dumas 1994, ou Quartapelle 1995). Nous n'avons pas cherché à étudier ces régimes. Nous avons vérifié que la non-linéarité quadratique ne modifiait pas la solution.

### 3.2.3 Résultats numériques

Les équations sont intégrées en temps jusqu'à atteindre un régime stationnaire, pour différents nombres d'Ekman. Nous reproduisons les résultats publiés par Rainer Hollerbach (1994), pour des nombres d'Ekman  $E \geq 10^{-5}$  (voir figures 3.10 et 3.11). Nous avons ensuite fait décroître le nombre d'Ekman jusqu'à  $10^{-8}$ . Nous montrons alors que le comportement asymptotique de synchronisation de l'écoulement principal avec la sphère interne au voisinage du cylindre tangent ne peut être observé qualitativement que pour des nombres d'Ekman  $E \leq 10^{-6}$  (voir Figures 3.10 et 3.12). La figure 3.12 montre clairement que les solutions obtenues pour  $E > 10^{-6}$  ne possèdent pas cette caractéristique.



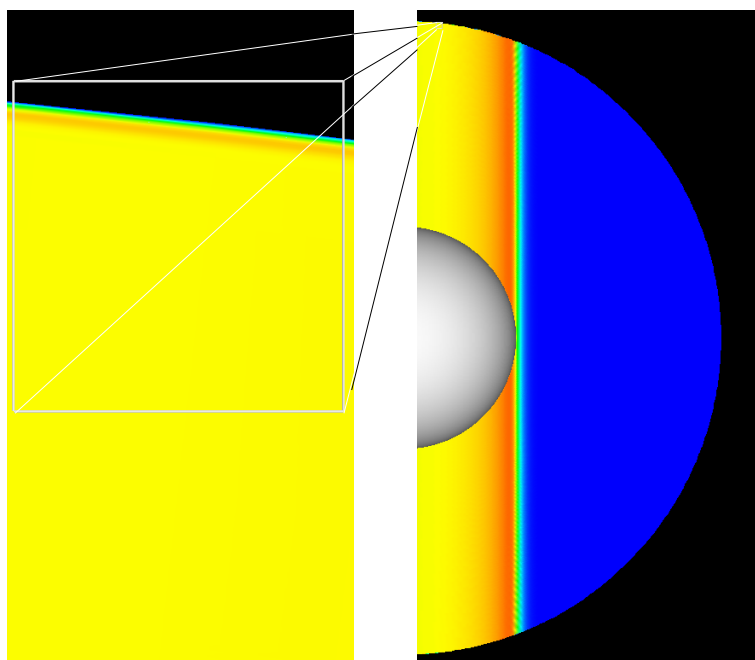


FIG. 3.8 – Les représentations en code de couleur dans le plan méridien ne permettent de voir la couche limite que pour des nombres d’Ekman de  $10^{-3}$  et  $10^{-4}$ . A droite la solution pour  $E = 10^{-7}$  dans le plan méridien. Un tout petit carré (à peine visible) est sélectionné et agrandi à gauche, la couche limite d’Ekman est alors visible en dégradé bleu-vert très près du bord. C’est dans cette couche très fine que nous devons maintenir 10 points de calculs. Ce calcul a nécessité 1000 coquilles radiales, densifiées aux bords.

En faisant décroître le nombre d’Ekman, on fait diminuer la taille des couches limites et en même temps on laisse se développer la singularité au cylindre tangent.

On donne, à titre indicatif, le nombre de coquilles concentriques (NR) et le nombre d’harmoniques (Lmax) utilisés pour quelques valeurs du nombre d’Ekman

$E$	NR	Lmax
$10^{-5}$	300	100
$10^{-6}$	320	200
$10^{-7}$	1000	300
$10^{-8}$	2800	800

Le nombre minimum de coquilles croît comme  $E^{1/2}$  pour assurer la résolution des couches d’Ekman. Pour des nombres d’Ekman aussi petits que  $10^{-8}$ , la couche limite est vraiment très fine. Il aurait été impossible (avec les ressources actuelles) d’assurer la résolution de telles couches sans utiliser une grille déformée. Il aurait fallu plus de 27000 points régulièrement espacés pour assurer la même résolution

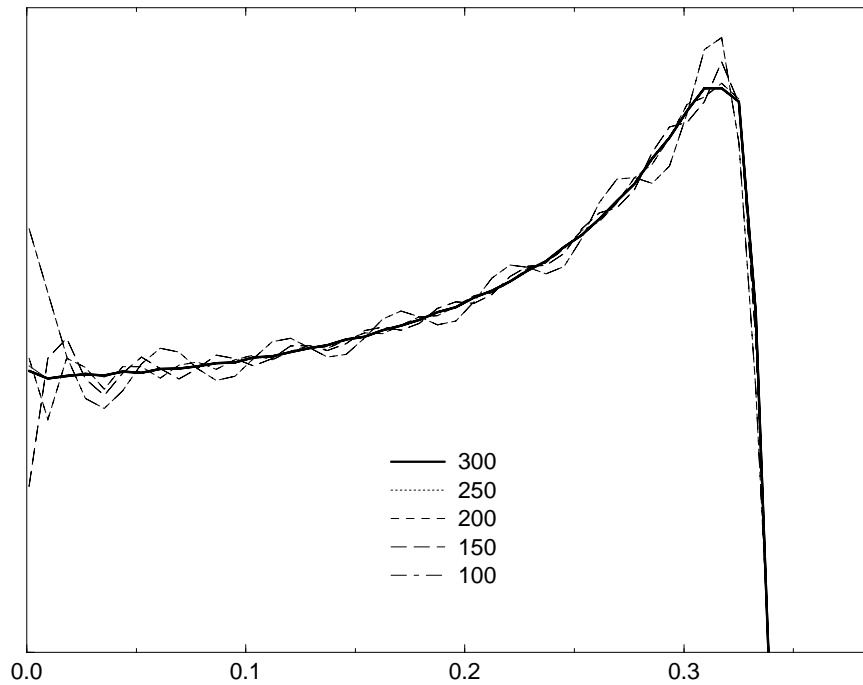


FIG. 3.9 – Les oscillations sur la solution obtenue avec moins d’harmoniques ne sont pas liées à un problème d’instabilité numérique, mais tout simplement à un problème de convergence, car le spectre de la solution a été tronqué trop tôt. Nous représentons ici dans une représentation identique à celle de la figure 3.7 une partie de la solution calculée pour  $E = 10^{-7}$  avec 300 harmoniques, puis la même solution en annulant les degrés supérieurs à 250, 200, ...

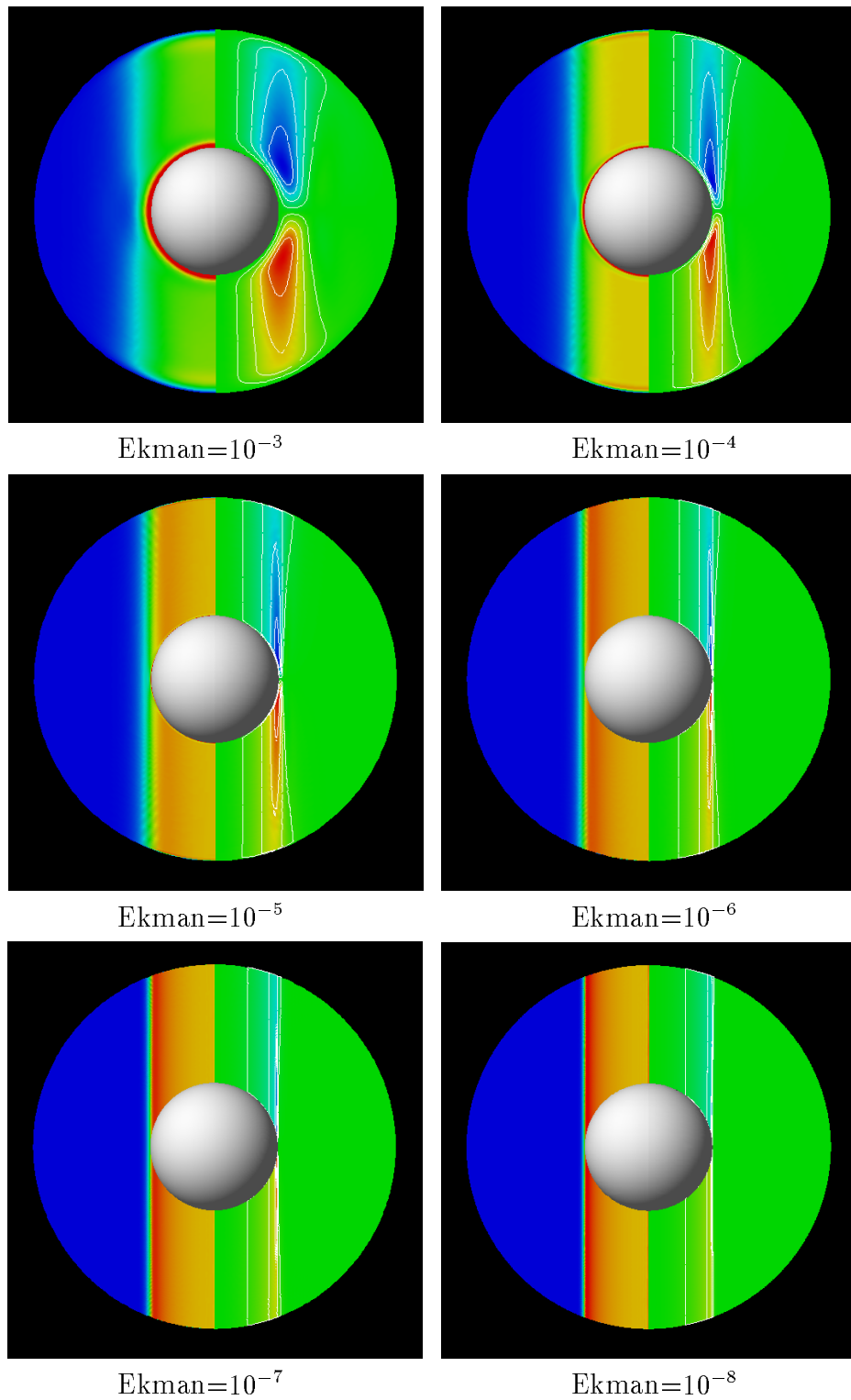


FIG. 3.10 – Vitesse angulaire (à gauche) et lignes de courants (à droite) dans un plan méridien pour différents nombres d'Ekman.

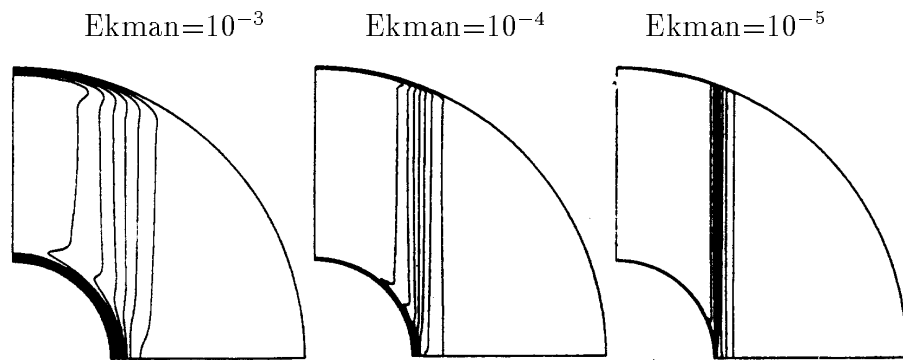


FIG. 3.11 – *Vitesse angulaire dans un demi-plan méridional. Résultats publiés par R.Hollerbach pour le même problème dans Proc. R. Soc. Lond. A en 1994. On peut comparer ces résultats avec ceux de la figure précédente. On n’observe pas pour ces valeurs du nombre d’Ekman le comportement qualitatif décrit par l’analyse asymptotique.*

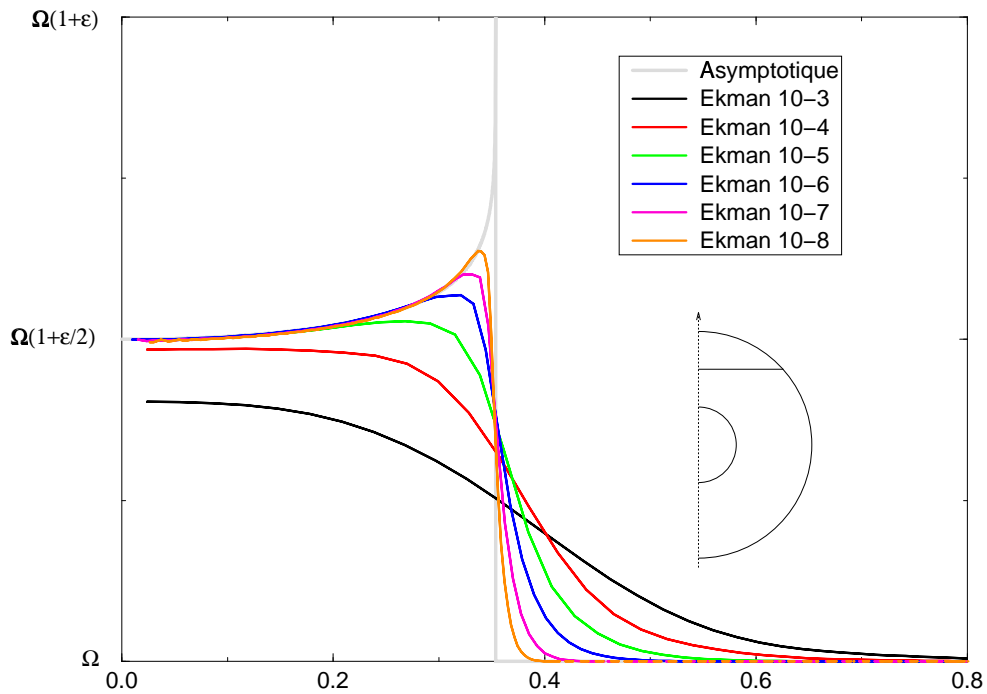


FIG. 3.12 – *Représentation de la vitesse angulaire en fonction de la distance à l’axe de rotation. Cette représentation montre clairement que la solution pour des  $E$  décroissants converge vers la limite asymptotique. Il est clair que le résultat qualitatif de synchronisation avec la sphère interne au voisinage interne du cylindre tangent ne commence à être visible que pour  $E \leq 10^{-6}$ .*

dans les couches limites (contre 2800 ici). Avec les grilles que nous avons utilisées, le plus petit pas de grille (c'est-à-dire par exemple l'espace entre la sphère externe et le premier point de calcul dans le domaine) vaut à peu près  $0,36 \cdot E^{1/2}$  et le plus grand pas de grille vaut environs 12 fois cette valeur. Pour  $E = 10^{-8}$ , si l'on met le modèle à l'échelle du noyau, cela signifie que le premier point de calcul est à 130 mètres de la frontière... Pour atteindre des nombres d'Ekman comme  $10^{-15}$  avec la même résolution, il faudrait ne laisser que 40 cm entre la frontière et le premier point de calcul.

Le nombre d'harmoniques utilisées est également ajusté pour garantir la résolution du problème. Non pour des raisons de stabilité de l'algorithme, mais simplement parce que le spectre de la solution se prolonge de manière non négligeable jusqu'à ces degrés. Pour preuve, on a représenté figure 3.9 une coupe de la solution calculée pour  $E = 10^{-7}$  avec 300 harmoniques et les représentations obtenues en tronquant le spectre à différents degrés. On observe des oscillations sur la solution, comparables au phénomène de Gibbs (voir par exemple Morse et Feshbach, 1953).

### 3.3 Magnétohydrodynamique

Nous allons à présent étudier l'effet d'un champ magnétique imposé sur cet écoulement. L'une des motivations pour cette étude est de déterminer s'il est aussi important avec que sans champ magnétique de décroître très bas le nombre d'Ekman pour avoir une description approchée correcte du comportement asymptotique<sup>7</sup>.

La conductivité de la graine est un paramètre très important de ce problème. Nous avons principalement étudié pour sa pertinence géophysique le cas où graine et noyau fluide ont la même conductivité. Nous évoquerons néanmoins le cas d'une graine isolante, problème de référence qui a fait l'objet de plusieurs études (Hollerbach 1994, Kleeorin et al. 1997).

Si les lignes de champ sont cisailées par l'écoulement, cela crée un champ induit toroïdal. La génération de champ toroïdal par cisaillement du champ poloïdal imposé correspond à l'effet "omega" (noté  $\Omega$  ou  $\omega$  selon les références) présenté figure 3.13. En revanche la génération de champ poloïdal à partir de ce champ toroïdal n'a rien à voir avec l'effet  $\alpha$ . Au contraire, on sait qu'il ne peut pas venir renforcer le  $B_p$  imposé, sinon on pourrait avoir une dynamo axisymétrique (ce qui s'oppose au Théorème de Cowling).

A ce champ induit sont associés des courants, dont les premiers effets seront de s'opposer au cisaillement leur ayant donné naissance (loi de Lenz). On s'attend donc à ce que les premiers effets du champ magnétique mènent à une réduction du cisaillement au cylindre tangent. En présence d'un champ magnétique fort, on peut attendre, à cause de la rotation rapide, un équilibre magnétostrophique, c'est-à-dire de la forme

$$(3.29) \quad 2\rho \vec{\Omega} \wedge \vec{u} - \vec{j} \wedge \vec{B} = -\vec{\nabla}\pi,$$

il correspond à un équilibre entre le terme de Coriolis et la force de Laplace dans lequel les forces visqueuses n'interviennent pas (toujours dans l'écoulement principal bien sûr).

Nous n'avons étudié que des champs imposés dont le rotationnel est nul (ce qui impose  $\vec{J} = \vec{0}$  dans le liquide). Nous avons principalement étudié le cas où les sources du champ sont internes. Le champ imposé s'écrit alors

$$(3.30) \quad B_r = \frac{1}{r^3} \cos \theta, \quad B_\theta = \frac{1}{2r^3} \sin \theta.$$

---

7. Un raisonnement simpliste pouvant laisser penser que l'effet du champ magnétique étant "comparable" à celui de la viscosité (par l'atténuation des petites échelles de mouvement), une surestimation de la viscosité est moins importante en présence d'un champ magnétique fort.

FIG. 3.13 – Cette figure résume ce que l'on entend par "effet Omega". Si l'écoulement (a) cisaille un champ poloïdal (b), il courbe les lignes de force du champ (c et d). Par diffusion ohmique, ces lignes de champ peuvent se refermer sous la forme de lignes de champ toroïdales (e). L'effet Omega explique donc la génération du champ toroïdal à partir de champ poloïdal. Il permet de rendre compte dans l'expérience que nous présentons de la génération de champ toroïdal à partir du cisaillement du champ poloïdal imposé (figure d'après J.Wicht 1995, figure originale J.Love).

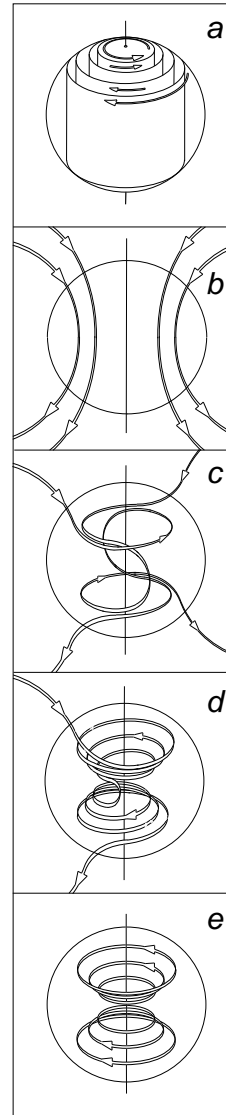
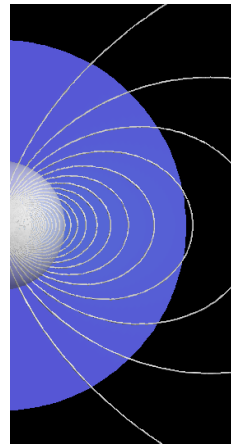


FIG. 3.14 – *Le champ magnétique imposé est à force nulle, dipolaire axial et correspond à des sources internes.*



Dans ce cas le champ magnétique n'est pas aligné avec l'axe de rotation et les lignes de force du champ (figure 3.14) coupent le cylindre tangent. Il est important de noter la variation radiale de l'intensité du champ imposé. Son amplitude varie comme  $r^{-3}$  et est donc beaucoup plus forte (un coefficient 23) à la frontière de la sphère interne, qu'aux limites externes du domaine. Comme nous mettons le champ à l'échelle par rapport au champ externe, cela signifie que le nombre d'Elsasser local près de la graine est près de 544 fois supérieur à celui que nous reportons (les effets les plus intéressants se produisent dans la limite des grands nombres d'Elsasser).

### 3.3.1 Couches de Hartmann et d'Ekman-Hartmann

#### Couches de Hartmann

En l'absence de rotation, on peut bien décrire les couches limites de Hartmann contre un isolant. Elles apparaissent par exemple dans l'écoulement de Poiseuille plan avec un champ normal. Considérons l'écoulement entre deux plans fixes, infinis, parallèles et isolants ( $x, y, z = 0$ ) et ( $x, y, z = d$ ) créé par un gradient de pression horizontal selon  $x$  et soumis à un champ magnétique uniforme  $\vec{B}^*$  perpendiculaire aux plans limites, c'est-à-dire parallèle à  $z$  (figure 3.15.a). En faisant l'hypothèse que le champ induit  $\vec{b}$  est petit devant le champ imposé, on écrit en utilisant  $d$  comme unité de longueur,  $d^2/\nu$  comme unité de temps et  $B^*$  comme unité d'induction magnétique,



$$(3.31) \quad \begin{cases} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \pi + \Delta \vec{u} + M (\vec{\nabla} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{B}^*, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, \\ Pm \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = \Delta \vec{b} + M \vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{B}^*), \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0. \end{cases}$$

L'intensité du champ magnétique par rapport aux diffusions visqueuse et magnétique est mesurée par le nombre de Hartmann :

$$M = \frac{d B_0}{\sqrt{\mu_0 \rho_0 \nu \eta}}$$

et le nombre de Prandtl magnétique, déjà défini, s'écrit

$$Pm = \frac{\nu}{\eta}.$$

Le champ induit  $\vec{b}$  a été mis à l'échelle de sorte que

$$(3.32) \quad \vec{B} = \vec{B}^* + (M/Pm) \vec{b}.$$

Les conditions aux limites cinématiques et magnétiques s'écrivent respectivement

$$\vec{u} = \vec{0}$$

et

$$\vec{b} \cdot \vec{e}_x = \vec{b} \cdot \vec{e}_y = 0.$$

Si l'on fait l'hypothèse que le mouvement est permanent (stationnaire en temps), rectiligne, parallèle aux plans et bidimensionnel, la solution sans champ magnétique ( $M = 0$ ) correspond au profil parabolique de Poiseuille (figure 3.15.b).

Lorsque le nombre de Hartmann est très grand en revanche, les effets visqueux sont négligeables dans l'écoulement principal et les équilibres y sont décrits, sous les mêmes hypothèses, par

$$(3.33) \quad \begin{cases} -\vec{\nabla} \pi + M (\vec{\nabla} \wedge \vec{b}^0) \wedge \vec{B}^* = \vec{0}, \\ \Delta \vec{b}^0 + M \vec{\nabla} \wedge (\vec{u}^0 \wedge \vec{B}^*) = \vec{0}. \end{cases}$$

Le champ induit  $\vec{b}^0$  est donc dirigé, comme l'écoulement, selon  $\vec{e}_x$ , et que l'écoulement principal est invariant selon  $\vec{e}_z$ . Le fluide a tendance à entraîner les lignes de forces du champ dans la direction de son mouvement. Il crée alors un champ  $b_x$  induit parallèle au mouvement, auquel sont associés des courants électrique  $\vec{j}$  dirigés selon  $y$ . L'interaction de ces courants avec  $\vec{B}^*$  s'oppose aux cisaillements dans le fluide. Quand le nombre de Hartmann devient grand ( $M \gg 1$ ),

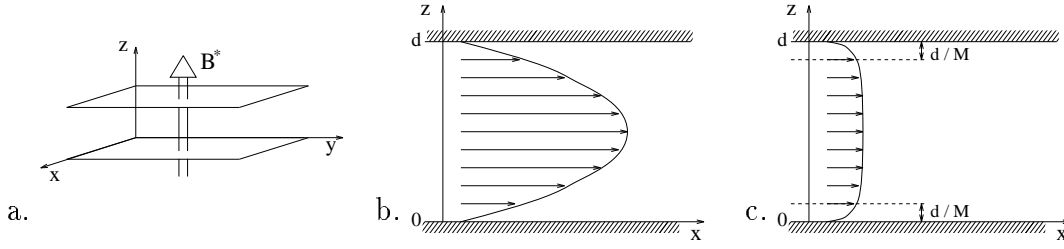


FIG. 3.15 – Couches de Hartmann dans le cas d'un écoulement plan (a). Si le champ est faible, on obtient la solution de Poiseuille (b). Quand le champ est fort, il s'oppose aux cisaillements dans le corps de l'écoulement, où la vitesse devient quasi constante et les repousse contre l'isolant (c). Les couches limites de Hartmann correspondantes sont d'ordre  $M^{-1}$ .

l'écoulement est donc rigidifié par les effets magnétiques. La viscosité est cependant importante au voisinage des plans limites. On écrit alors en introduisant la coordonnée  $\xi$  normale à la paroi,

$$(3.34) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + M \frac{\partial b}{\partial \xi} = 0, \\ \frac{\partial^2 b}{\partial \xi^2} + M \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0, \end{cases}$$

dont la solution satisfaisant les conditions aux limites est

$$(3.35) \quad \begin{cases} u = u_0 (1 - e^{-M\xi}), \\ b = b_0 (1 - e^{-M\xi}). \end{cases}$$

L'épaisseur de ces couches limites (de Hartmann) varie donc comme  $M^{-1}$  (voir figure 3.15.c). Une couche de Hartmann correspond à un équilibre entre la force de Laplace (qui entraîne le fluide avec l'écoulement principal) et les effets visqueux. Le profil de vitesse à travers l'ensemble de la section s'écrit dans la limite des grands nombres de Hartmann (Jackson 1962, Moreau 1990)

$$(3.36) \quad u_x \propto \frac{1}{M} \left[ 1 - e^{-Mz/d} - e^{-M(d-z)/d} \right].$$

Dans le cas où le champ n'est pas selon la normale aux bords mais forme un angle  $\theta$  avec celle-ci, l'invariance par translation entraîne que seule la composante normale du champ intervient dans la définition de la couche de Hartmann. Il convient alors de remplacer  $B^*$  dans les formules précédentes par  $B^* \cos \theta$ . La couche devient donc singulière lorsque  $\theta \rightarrow \pi/2$ .

Notons enfin que si l'écoulement n'était pas invariant horizontalement, les courants associés au champ induit auraient également une composante selon  $\vec{e}_z$  à l'entrée de la couche limite.

### Géométrie sphérique

Dans cette section, nous étudions la limite des grands nombres de Hartmann dans le cas sphérique. Le champ  $\vec{B}$  s'écrit alors

$$(3.37) \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} \frac{2 \cos \theta}{r^3} \\ \frac{\sin \theta}{r^3} \\ b \end{pmatrix}$$

L'écoulement principal est proche d'une rotation en bloc et une couche de Hartmann apparaît à la frontière avec l'isolant (la sphère externe) à travers laquelle la vitesse azimutale de l'écoulement décroît de  $r_0 \sin \theta (1 + \varepsilon) \Omega$  à  $r_0 \sin \theta \Omega$ .

En tenant compte de la géométrie du champ imposé et en introduisant comme précédemment la coordonnée radiale de couche limite  $\xi$ , on a alors :

$$(3.38) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2M \cos \theta \frac{\partial b}{\partial \xi} = 0, \\ \frac{\partial^2 b}{\partial \xi^2} + 2M \cos \theta \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0, \end{cases}$$

dont la solution est (Roberts, 1967)

$$(3.39) \quad u = b = \varepsilon \sin \theta (1 - e^{-2M \cos \theta \xi}).$$

Pour que cet écoulement soit compatible avec la rotation en bloc attendue dans le corps du volume, il faut encore que

$$(3.40) \quad \vec{j} \wedge \vec{B} = \vec{0}.$$

En écrivant la projection sur  $\vec{e}_\phi$  de cette équation

$$(3.41) \quad \frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial \theta} (b \sin \theta) + \frac{2 \cos \theta}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} (r b) = 0$$

dont la solution s'écrit

$$(3.42) \quad b = \frac{1}{r \sin \theta} f\left(\frac{\sin^2 \theta}{r}\right) \quad \forall f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

On vérifie que

$$(3.43) \quad b = \varepsilon \frac{\sin \theta}{r^2},$$

mène bien alors à une solution globale.

Ces équations sont cependant singulières à l'équateur, où les lignes du champ imposé sont parallèles au bord du domaine. Cette singularité a d'importantes conséquences sur la solution asymptotique, car les courants électriques qui y rentrent ne s'annulent pas lorsque  $M \rightarrow 0$  (voir Roberts, 1967).

### Couches mixtes Ekman-Hartmann

La théorie des couches limites intermédiaires, influencées à la fois par la rotation et les forces magnétiques, est reprise dans Acheson et Hide<sup>8</sup> (1973). Ils donnent (voir leur § 5.2) une dérivation locale de l'effet de la couche limite sur l'écoulement et sur le champ dans le corps du domaine. Pour  $\Lambda = 0$ , l'effet sur l'écoulement se réduit évidemment à la succion d'Ekman (décrite précédemment). Dans la limite de Hartmann, en revanche, la composante normale de  $\vec{u}$  s'annule à l'entrée des couches limites. Dans le cas d'une couche mixte, Ekman-Hartmann, des courants radiaux non nuls entrent dans la couche limite. En éliminant la vorticité de l'écoulement principal dans les expressions de  $u_r$  et  $j_r$  à l'entrée de la couche limite, on obtient (Acheson et Hide, 1973)

$$(3.44) \quad \frac{[j_r]}{[u_r]} = Pm \cdot E^{-1} \cdot ((1 + \Lambda_\Omega)^{1/2} + \Lambda_\Omega) \times (\vec{r} \cdot \vec{n}) \times \text{signe}(\vec{B} \cdot \vec{n}),$$

où  $\Lambda_\Omega$  est défini comme

$$(3.45) \quad \Lambda_\Omega = \frac{\Omega}{\vec{\Omega} \cdot \vec{n}} \Lambda_\perp,$$

avec

$$(3.46) \quad \Lambda_\perp = \frac{(\vec{B}_0 \cdot \vec{n})^2}{\Omega \rho \mu \eta}.$$

La figure 3.16 montre comment, dans nos simulations, la spirale d'Ekman aux deux extrémités est modifiée par les effets magnétiques. L'écoulement méridional  $u_\theta$  dans la couche limite (caractéristique de l'écoulement secondaire dans la couche d'Ekman) diminue, puis disparaît lorsque le nombre d'Elsasser local atteint l'ordre de l'unité.

La figure 3.17 montre l'évolution de la composante radiale de la vitesse et des courants électriques. La couche limite pour les courants électriques n'est bien définie que pour  $\Lambda = 0.1, 1.0, 10.0$ . La figure 3.18 donne une comparaison entre la formule théorique (3.44) et nos résultats numériques (pour  $E = 10^{-5}$ ,  $\Lambda \in [0.1, 10.0]$  et  $\theta = \pi/12$ ).

Insistons enfin sur la complexité de la région équatoriale. Outre la singularité de la couche de Hartmann (décrite précédemment), la rotation seule (couche d'Ekman) rend cette région singulière, car le vecteur  $\vec{\Omega}$  y est également parallèle au bord (voir Kleorin et al., 1997 pour une étude détaillée de ce problème en géométrie sphérique). Les études numériques apparaissent donc comme nécessaires pour décrire l'effet de la rotation sur la solution de Hartmann.

---

8. Il y a une erreur de typographie pour la formule liant  $[j_z]$  à  $[\hat{w}]$  (juste après 5.34), il faut lire  $(\rho V^2 / \mu \eta^2)$  et non  $(\rho V^2 / \mu \eta)$ .

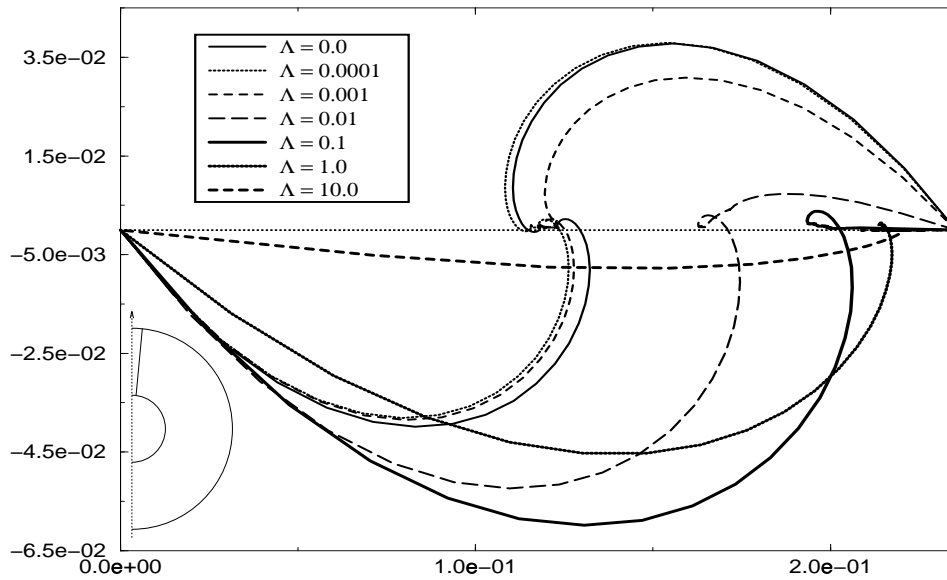


FIG. 3.16 – Représentation de  $u_\theta/r$  versus  $u_\phi/r$  dans une section monodimensionnelle de l'écoulement pour  $\theta = \pi/12$  (toujours à  $E = 10^{-5}$  et pour diverses valeurs du nombre d'Elsasser). Cette représentation donne beaucoup d'importance aux couches limites, car  $u_\theta/r$  comme  $u_\phi/r$  varient très peu dans l'écoulement principal le long de cette direction. Pour  $\Lambda = 0.0$  cette coupe montre le raccordement des deux spirales d'Ekman aux extrémités du domaine. Lorsque l'on fait croître le nombre d'Elsasser, la vitesse angulaire de l'écoulement principal se rapproche de celle de la sphère interne. La transition d'une couche de type Ekman en une couche de type Hartmann s'accompagne d'une diminution de la composante  $\theta$  de la vitesse.

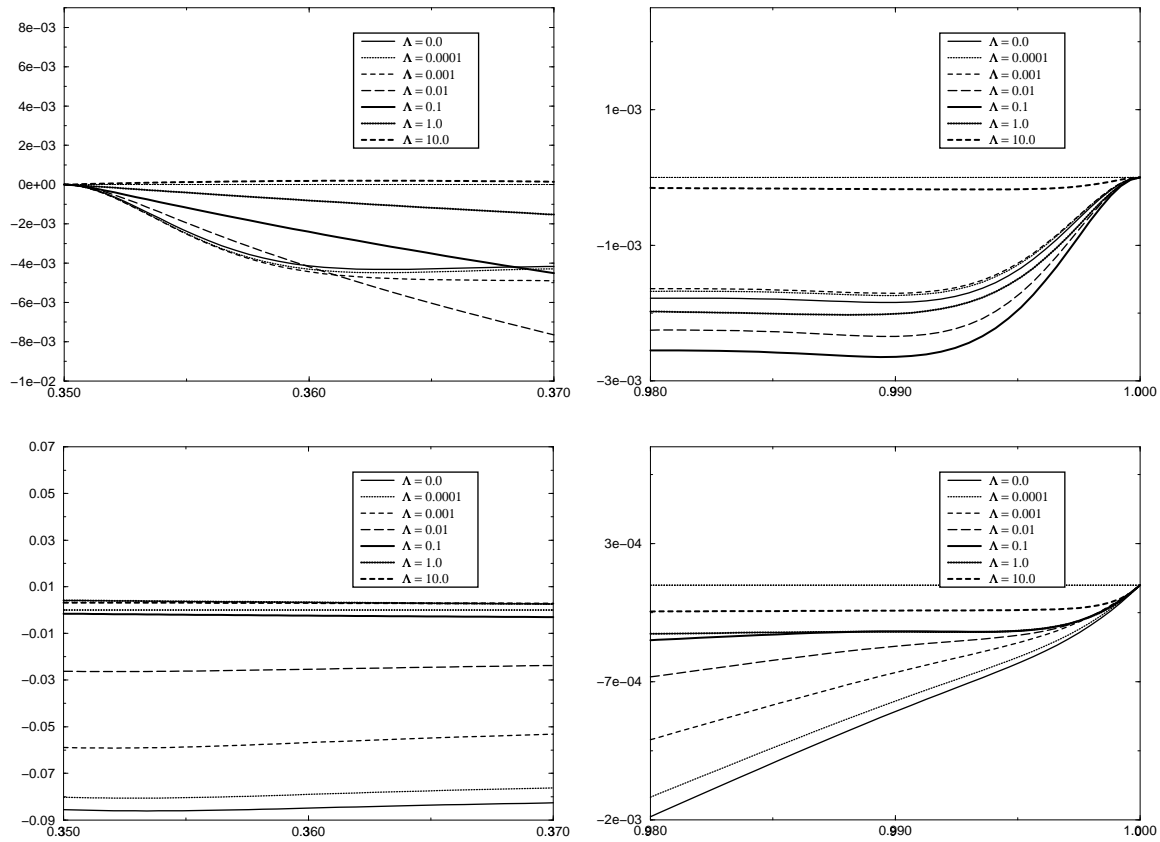


FIG. 3.17 – Composante radiale de la vitesse (en haut) et des courants électriques (en bas) près de la frontière interne (à gauche) pour  $\theta = \pi/4$  et externe (à droite) pour  $\theta = \pi/2$  pour  $E = 10^{-5}$  et différents nombres d'Elsasser.

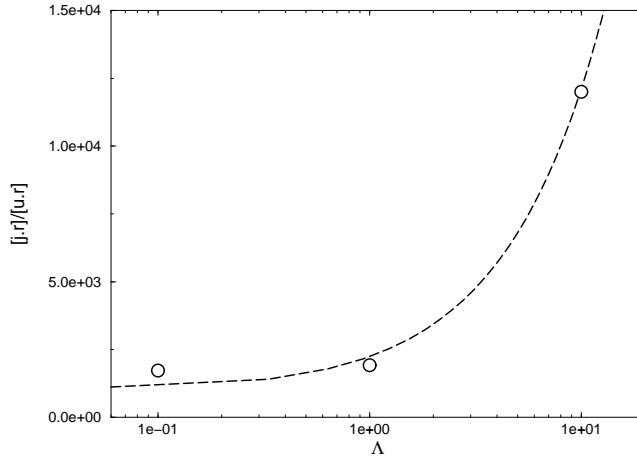


FIG. 3.18 – *Comparaison de nos résultats numériques avec la transition Ekman-Hartmann prédite théoriquement (Acheson et al. 1973). Nous représentons  $[j_r]/[u_r]$  pour  $\Lambda = 0.1, 1.0, 10.0$  avec  $E = 10^{-5}$ .*

### 3.3.2 Etude numérique

#### Validation, Comparaison avec les études antérieures

Nous présentons d’abord ici des résultats obtenus avec une graine isolante, dans le but de comparer nos résultats avec ceux de Hollerbach (1994) et avec la récente étude analytique de Kleorin, Rogachevskii, Ruzmaikin, Soward et Starchenko (1997). Le premier effet des forces magnétiques est bien de réduire le cisaillement au cylindre tangent. En augmentant le nombre d’Elsasser et donc l’effet des forces magnétiques, le mouvement s’approche d’une rotation en bloc. Comme les deux frontières sont isolantes, seul le couple visqueux est à considérer, c’est le facteur géométrique qui rend le couple externe plus efficace et le fluide est presque en rotation solidaire avec le manteau. La figure (3.19) montre comment la solution varie en fonction de  $\Lambda$  pour  $E = 10^{-5}$ . Une comparaison avec Hollerbach (1994) permet de valider nos calculs. Kleorin, Rogachevskii, Ruzmaikin, Soward et Starchenko ont réalisé récemment une étude analytique détaillée du problème équivalent avec une graine isolante. Cette étude prédit un minimum local de la vitesse angulaire dans le voisinage de l’équateur de la graine dans la limite des champs forts (voir leur section 4.3). Nous avons retrouvé cette caractéristique dans nos calculs, comme on peut le vérifier sur la section équatoriale de la figure 3.19. Cette étude dérive également (Kleorin, 1997, équation 5.4) la loi asymptotique caractérisant la taille de la singularité mixte Ekman-Hartmann à l’équateur (appelée “magnetic-Proudman layer”) dans le cas où elle est plus grande que  $E^{2/5}$ . Cette singularité est également rencontrée dans nos calculs avec une graine conductrice. Bien que l’hypothèse  $E^{2/5}$  petit devant la taille de la singularité équatoriale, ne soit vérifiée dans nos calculs que pour les petites

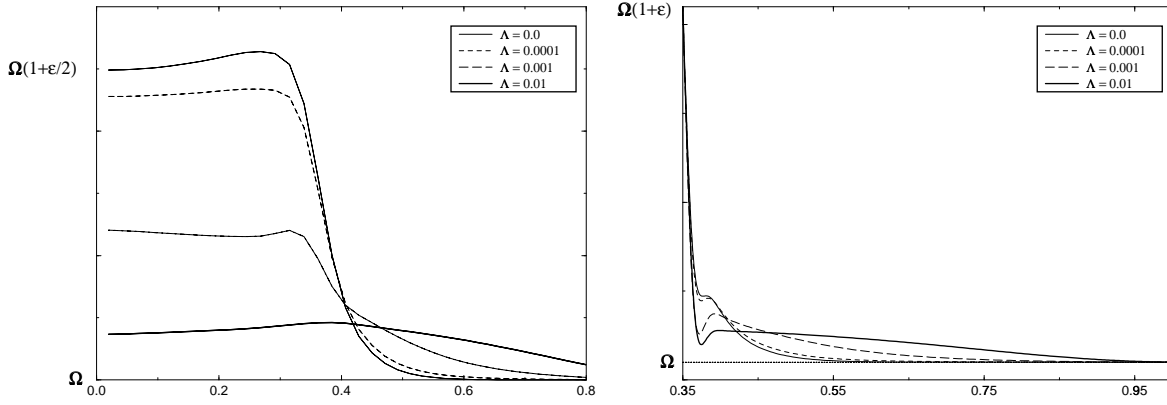


FIG. 3.19 – Représentation de la vitesse angulaire par rapport au rayon cylindrique  $s$  dans le cas d'une graine isolante pour un nombre d'Ekman de  $10^{-5}$ . À gauche aux  $3/4$  de la coquille, à droite en coupe équatoriale.

valeurs du nombre d'Elsasser, ils observent une remarquable concordance entre nos simulations (figure 3.28) et leur théorie.

Nous étudions dans la suite le cas d'une graine de conductivité électrique finie, et égale à celle du fluide. La présence du champ magnétique favorise toujours une rotation en bloc, mais cette fois avec la graine à cause du couplage magnétique entre le noyau fluide et la graine. La partie diffusive de l'équation d'induction doit à présent être résolue à l'intérieur de la graine. Dès que le nombre d'Elsasser est non nul, un couple magnétique apparaît à la frontière avec la sphère interne,

$$(3.47) \quad \Gamma_B = \varepsilon \cdot \Lambda \cdot Pm \cdot E^{-1} r \iint_S B_r b_\phi \sin \theta dS.$$

Le couple visqueux, qui existe aux deux limites du domaine, s'écrit

$$(3.48) \quad \Gamma_\nu = E r \iint_S \sin \theta r \frac{\partial}{\partial r} \frac{u_\phi}{r} dS.$$

Dans le régime stationnaire ces couples doivent s'équilibrer. Dans nos calculs, ils s'équilibrent au % près, ce qui constitue une validation supplémentaire.

$\Lambda = 0.1$	$E = 10^{-3}$	$E = 10^{-4}$	$E = 10^{-5}$	$E = 10^{-6}$
$\Gamma_\nu _{r_i}$	$-3.13 \cdot 10^{-8}$	$-4.04 \cdot 10^{-9}$	$-1.19 \cdot 10^{-9}$	$-2.39 \cdot 10^{-10}$
$\Gamma_B _{r_i}$	$-2.40 \cdot 10^{-6}$	$-1.39 \cdot 10^{-6}$	$-6.96 \cdot 10^{-7}$	$-3.00 \cdot 10^{-7}$
$\Gamma_\nu _{r_e}$	$2.43 \cdot 10^{-6}$	$1.39 \cdot 10^{-6}$	$7.00 \cdot 10^{-7}$	$3.05 \cdot 10^{-7}$

(3.49)

## Résultats numériques

Pour mieux comprendre comment l'écoulement principal est accéléré par la force de Laplace, nous avons mené une étude sans rotation (c'est-à-dire que la



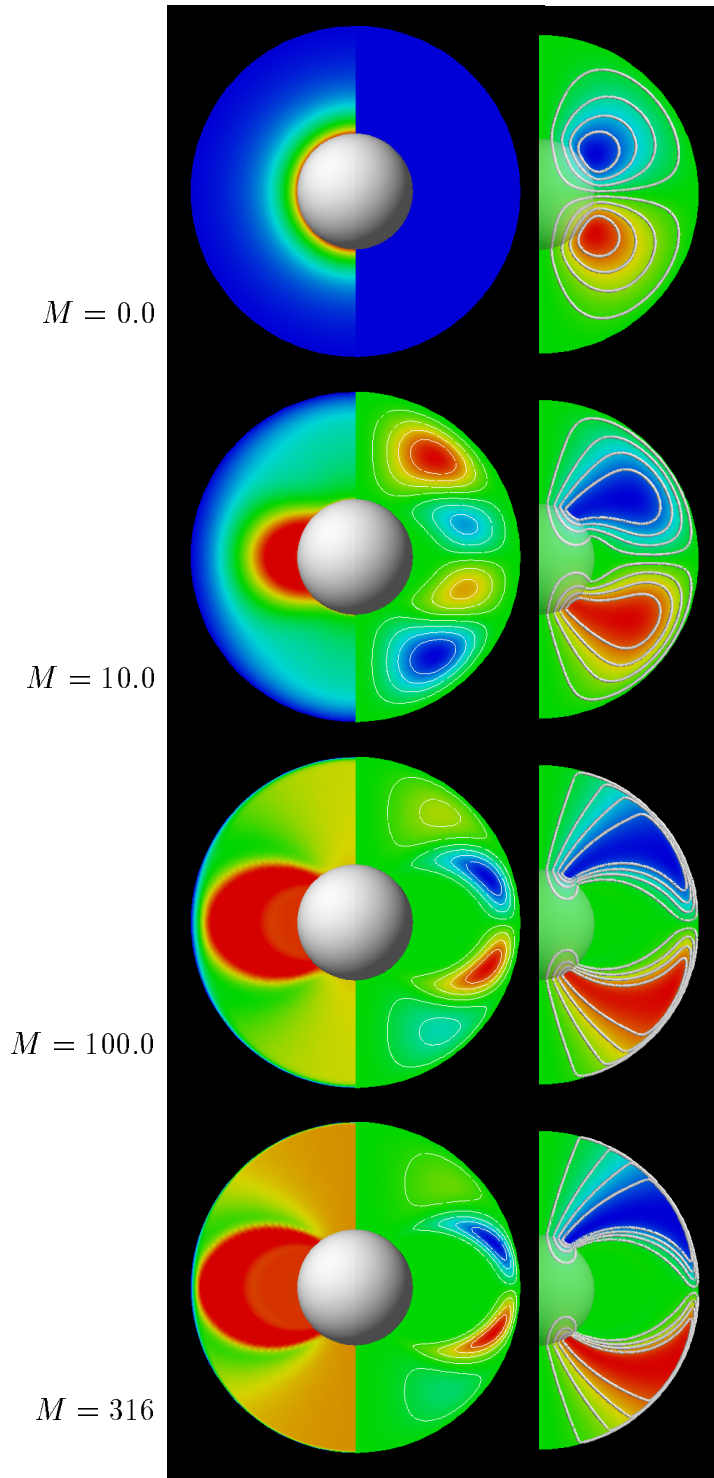


FIG. 3.20 – Coupes méridionales de la vitesse angulaire  $u_\phi/s$ , de la vitesse méridionale  $u_{pol}$ , et des courants poloïdaux  $j_{pol}$  en l'absence de force de Coriolis, pour des nombres de Hartmann croissants.

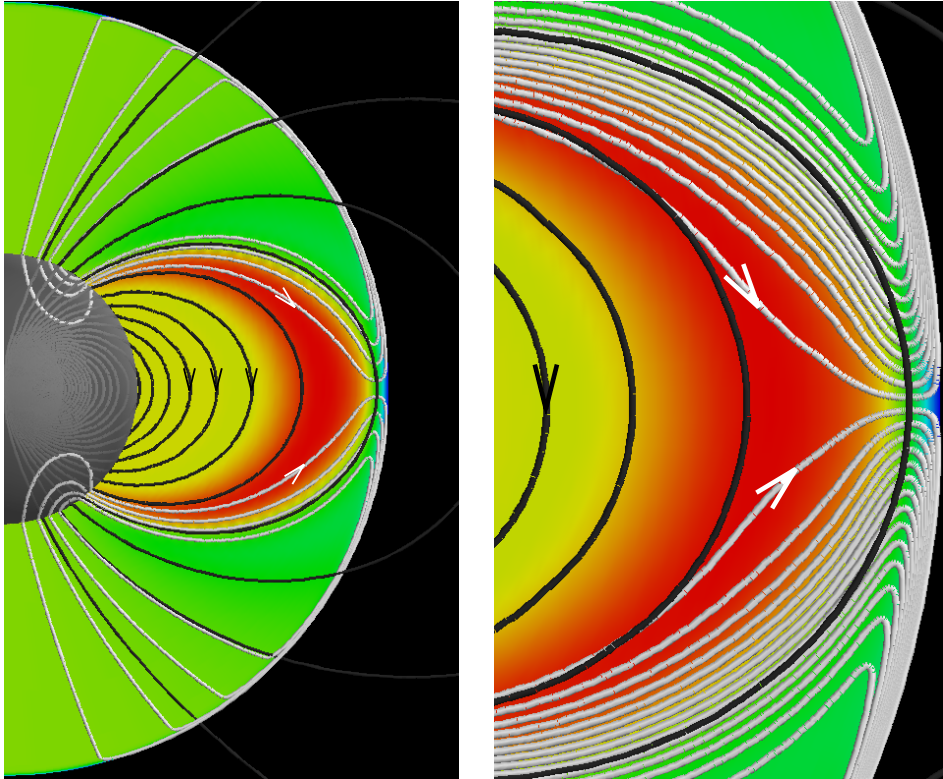


FIG. 3.21 – Visualisation des courants (lignes claires) et du champ imposé (lignes sombres) dans un plan méridien pour  $M = 316$ . Le code de couleur représente la vitesse angulaire (du bleu foncé au rouge). En bleu foncé la vitesse angulaire du manteau, en jaune celle de la graine. La région en “super-rotation” est en rouge. Les courants quittent les lignes forces du champ imposé et la force de Laplace est positive dans cette région.

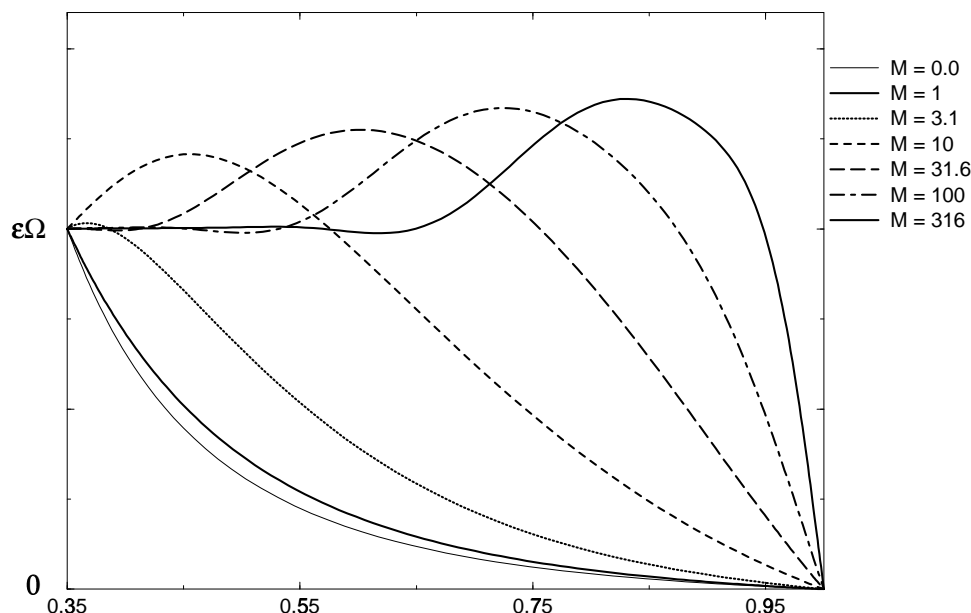


FIG. 3.22 – Section équatoriale de la vitesse angulaire en l'absence de forces de rotation.

sphère externe est au repos, et qu'il n'y a donc pas de terme de Coriolis). Les résultats obtenus sont présentés figures 3.20 à 3.22. Le système est dans ce cas caractérisé par le nombre de Hartmann  $M$ .

Les cisaillements visqueux (essentiellement dans la couche de Hartmann à la frontière externe du domaine) génèrent des courants électriques. Pour les latitudes élevées ( $\theta$  petit), ces courants s'alignent avec les lignes de force du champ principal imposé. Près du plan équatorial, en revanche, les lignes de forces du champ imposé sont parallèles à la frontière externe, alors que les courants lui sont normaux. Il est utile de noter que les champs magnétiques et électriques ne partagent pas la même symétrie par rapport à l'équateur. En conséquence, près du plan équatorial, les courants doivent quitter les lignes de force du champ imposé. Les forces magnétiques ne sont alors plus nulles et elles écartent l'écoulement principal de son état de rotation en bloc.

La figure 3.22 montre le profil de vitesse angulaire dans le plan équatorial pour des nombres de Hartmann croissants. La vitesse angulaire atteint son maximum à l'intérieur du domaine. La région de l'écoulement ainsi accéléré est définie par des lignes de force du champ imposé, tout d'abord près de la sphère interne (où le champ imposé est le plus intense), puis à travers la région équatoriale, quand, le nombre de Hartmann croissant, l'écoulement se synchronise avec la graine.

Cette super-rotation du fluide par rapport aux conteneurs est donc un effet magnéto-visqueux. Seules les forces visqueuses s'opposent à l'accélération zonale

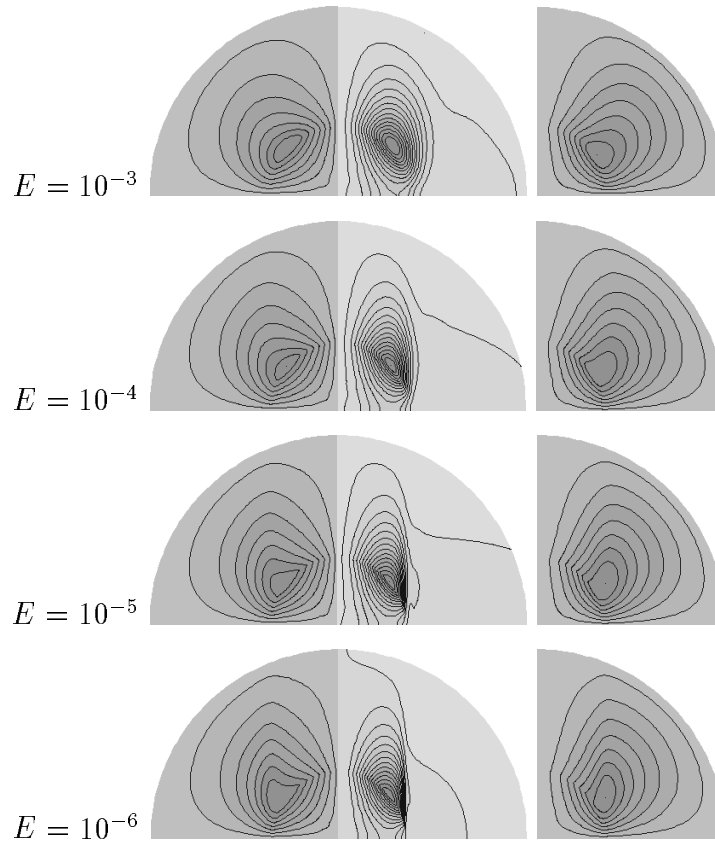


FIG. 3.23 – Section méridienne de  $b_\phi$ ,  $b_{pol}$  et  $j_{pol}$  pour des nombres d'Ekman de  $10^{-3}$  à  $10^{-6}$  pour  $\Lambda = 0.0$ .

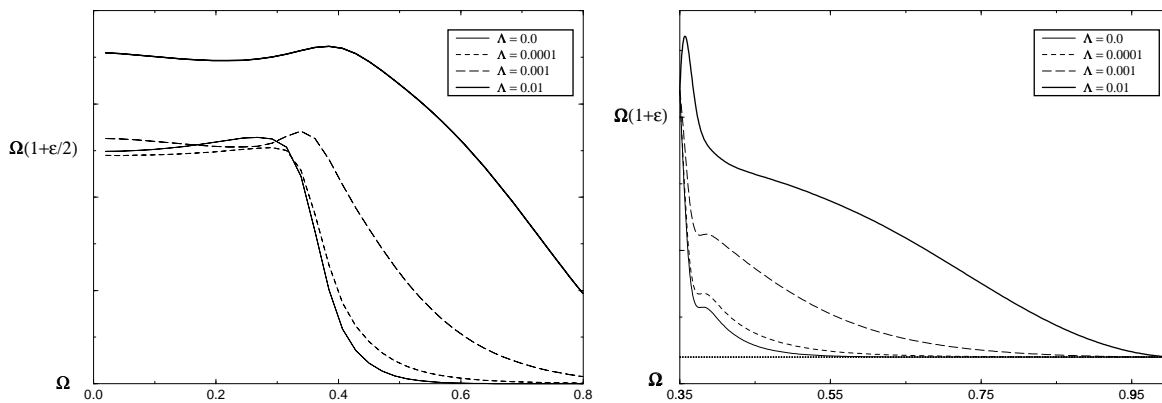


FIG. 3.24 – Représentation de la vitesse angulaire par rapport à la distance à l'axe  $s$  dans le cas d'une graine conductrice. A gauche au  $3/4$  de la coquille fluide, à droite dans une coupe équatoriale. Le nombre d'Ekman est de  $10^{-5}$ .

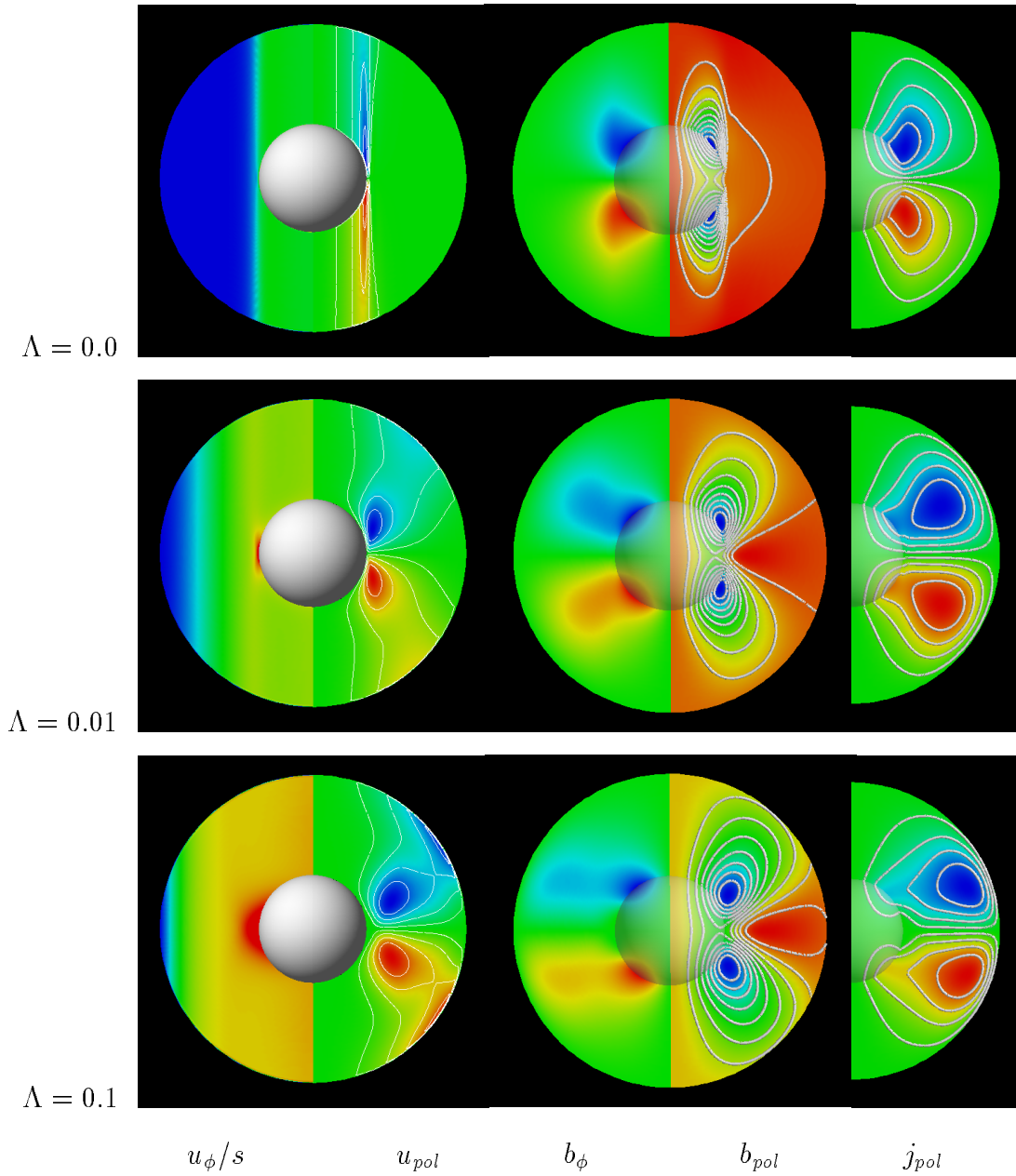


FIG. 3.25 – Représentations dans un plan méridien de  $u_\phi/s$ ,  $u_{pol}$ ,  $b_\phi$ ,  $b_{pol}$  et  $j_{pol}$  pour  $E = 10^{-5}$  et des valeurs croissantes du nombre d'Elsasser (de 0.0 à 0.1).

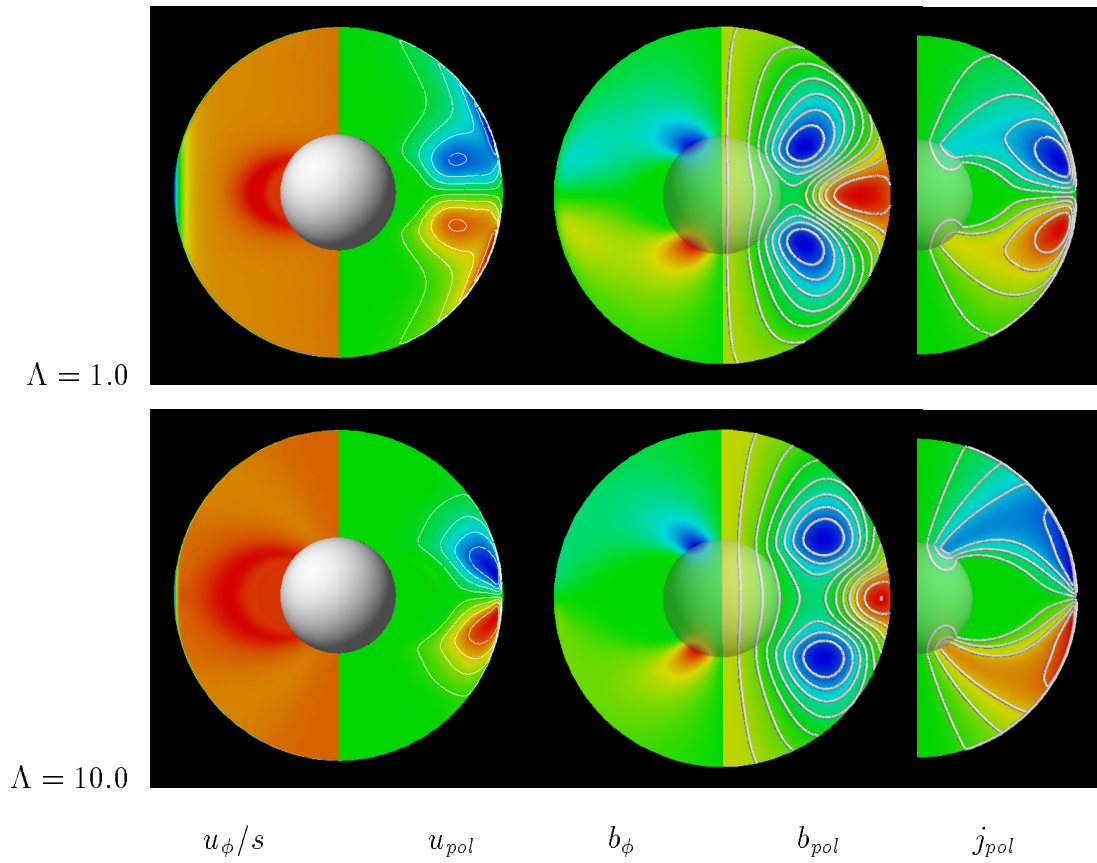


FIG. 3.26 – Représentations dans un plan méridien de  $u_\phi/s$ ,  $u_{pol}$ ,  $b_\phi$ ,  $b_{pol}$  et  $j_{pol}$  pour  $E = 10^{-5}$  et des nombres d'Elsasser de 1.0 et 10.0.

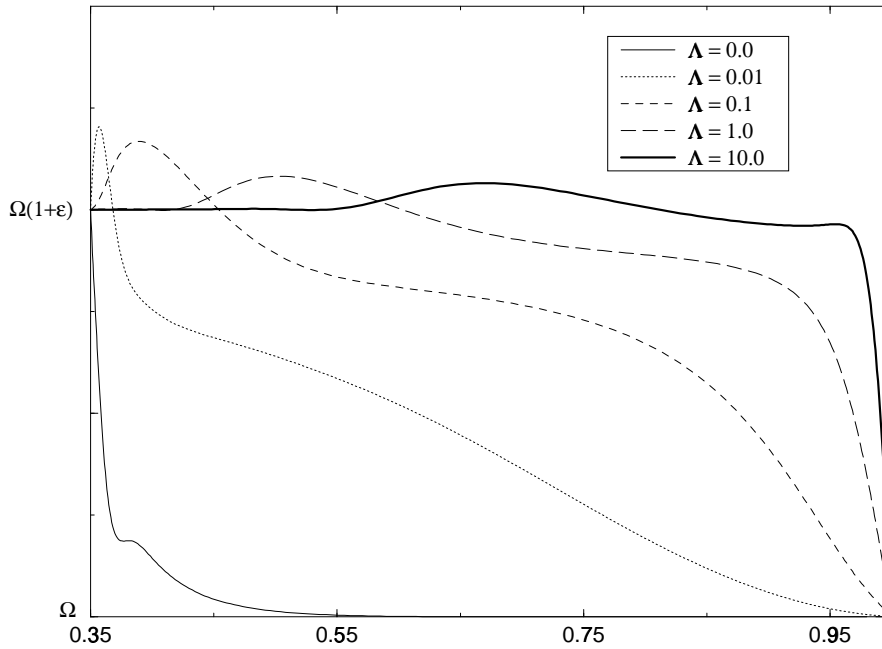


FIG. 3.27 – Coupe équatoriale de la vitesse angulaire pour  $Ekman 10^{-5}$  et des nombres d'Elsasser de 0.0 à 10.0 . On voit clairement que l'écoulement se synchronise avec la sphère interne à mesure que l'on augmente le nombre d'Elsasser. Le maximum de vitesse angulaire se trouve à l'intérieur du domaine et dépasse celle de la sphère interne.

dans la région équatoriale due aux forces magnétiques. De plus, la super-rotation, si elle n'apparaît pas pour les tous petits nombres de Hartmann (il n'y a pas super-rotation pour  $M = 1.0$ ), existe pour des valeurs modérées du nombre de Hartmann (voir  $M = 3.1$ ). Il faudrait étudier de plus grands nombres de Hartmann pour décrire précisément la singularité équatoriale de la couche de Hartmann et la migration de la région accélérée vers la frontière externe. Pour  $M = 316$  le cisaillement n'est pas encore confiné à une couche limite bien définie, nous avons vérifié que la largeur du cisaillement externe est proche de la loi en  $M^{-2/3}$  prédite asymptotiquement (voir Roberts, 1967).

Notons que la rotation d'un conteneur cylindrique renfermant un métal liquide, en présence d'un champ transverse uniforme peut également mener à des super-rotations locales (*c.f.* Alemany et al. 1977 et Hall et al. 1993). Dans ce cas, c'est le champ magnétique qui joue le rôle de la graine, comme moteur de la rotation différentielle entre l'écoulement principal et la couche limite, mais le mécanisme physique général est comparable (dans la limite des grands nombres de Hartmann).

Nous nous intéressons à présent au cas en rotation (il faut alors introduire la force de Coriolis). Le champ induit créé par le cisaillement de l'écoulement pour différentes valeurs du nombre d'Ekman, avec  $\Lambda = 0.0$  (pas d'effets en retour de ce champ sur l'écoulement) est présenté figure 3.23. Le champ imposé est cisailé au cylindre tangent. Dès que  $\Lambda$  est non nul, la force de Laplace agit sur l'écoulement pour réduire ce cisaillement. On observe figure 3.24 comment l'écoulement se synchronise avec la sphère interne à mesure que l'on augmente le nombre d'Elsasser. Dans le même temps, les courants électriques, originellement concentrés près du cylindre tangent s'écartent vers l'équateur de la sphère externe (voir figure 3.25 et 3.26). Pour les grandes valeurs du nombre d'Elsasser, la solution numérique caractérise le rôle de la singularité équatoriale.

La figure 3.27 montre le profil de vitesse angulaire dans le plan équatorial pour des nombres d'Elsasser croissants à  $E = 10^{-5}$ . Le cas  $\Lambda = 10.0$  ( $M = 10^3$ ) illustre l'écart à la rotation en bloc décrit dans le cas sans rotation. La comparaison des solutions avec et sans forces de rotation montre que ces forces inhibent très efficacement l'accélération équatoriale, qui viole la contrainte de Proudman-Taylor. L'écart à l'état de rotation en bloc est donc de moins en moins prononcé lorsque l'on décroît la viscosité (voir figure 3.28). Quand la viscosité diminue, le rôle des forces de rotation devient important, même pour de grands nombres d'Elsasser.

La conductivité de la graine est essentielle quant à la géométrie des courants électriques. Les courants peuvent parcourir la graine (car elle est conductrice) sans pour autant la cisailer (car elle est solide). Il est clair sur les figures 3.25 et 3.26 que les courants électriques essaient de suivre les lignes de forces du champ imposé à l'intérieur du fluide jusqu'à la graine, où ils peuvent boucler.

Notons que le choix d'un champ, axisymétrique, dipolaire à force nulle n'est



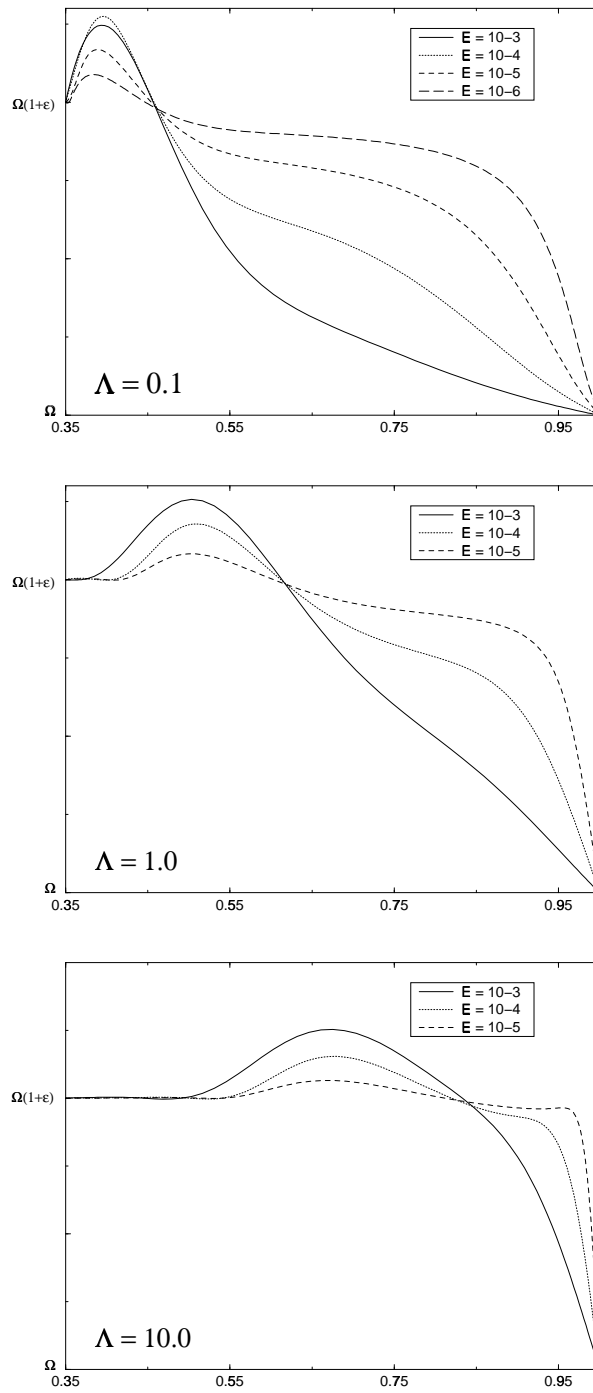


FIG. 3.28 – Coupe équatoriale de la vitesse angulaire pour des nombres d’Elsasser de 0.1 , 1.0 , 10.0, en faisant varier le nombre d’Ekman. On vérifie sur ces graphes que l’amplitude de la super-rotation est contrôlée par la viscosité.

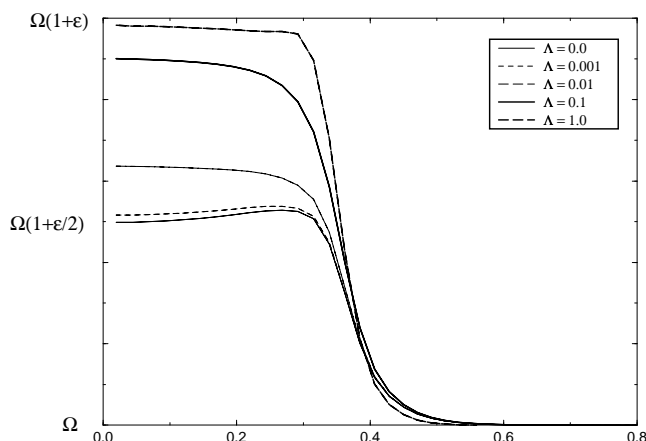


FIG. 3.29 – Représentation au  $3/4$  de la coquille fluide de la vitesse angulaire par rapport à la distance à l'axe  $s$  dans le cas d'un champ dont les sources seraient à l'extérieur du domaine. La graine est conductrice, et l'ensemble du cylindre tangent se synchronise avec elle alors que le nombre d'Elsasser croît. Le nombre d'Ekman est de  $10^{-5}$ .

pas unique. Pour des sources à l'extérieur du domaine, il s'écrit

$$(3.50) \quad B_r = \cos \theta, \quad B_\theta = -\sin \theta.$$

Cette géométrie est très particulière, car le champ est aligné partout avec l'axe de rotation. En conséquence, le cisaillement au cylindre tangent ne crée pas de courants dans cette géométrie. Nous avons vérifié que, dans ce cas, le cisaillement au cylindre tangent n'est pas réduit par les effets magnétiques, et est même renforcé pour les fortes valeurs du nombre d'Elsasser. La force de Laplace couple alors très efficacement le fluide à l'intérieur du cylindre tangent avec la sphère interne conductrice. La solution asymptotique des grands nombres d'Elsasser ( $\Lambda$ ) consiste en une rotation en bloc de l'ensemble du volume fluide à l'intérieur du cylindre tangent à la vitesse angulaire de la sphère interne, alors que le fluide à l'extérieur tourne à la vitesse angulaire du manteau (voir figure 3.29).

Depuis ce travail, Hollerbach (1997) a publié une étude numérique de ce cas particulier dont les conclusions sont identiques aux nôtres.

## Bibliographie

- D. Acheson et Raymond Hide, 1973  
*Hydromagnetics of rotating fluids*,  
 Reports on Progress in Physics, **36**, p.159–221.
- Antoine Alemany et René Moreau, 1977  
*Écoulement d'un fluide conducteur de l'électricité  
 en présence d'un champ magnétique tournant*,  
 Journal de Mécanique, **16**, p.625–646.
- Thomas Cowling, 1934  
*The magnetic field of sunspots*,  
 Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, **94**, p.39–48.
- G. Dumas et A. Leonard, 1994  
*A Divergence-Free Spectral Expansions Method for Three-Dimensional  
 Flows in Spherical-Gap Geometries*,  
 Journal of Computational Physics, **111**, p.205–219.
- Harvey Greenspan, 1969  
*The theory of rotating fluids*,  
 Cambridge University Press.
- M. Hall et J. Walker, 1993  
*Heat and mass transfer through a liquid metal in an infinitely long  
 rotating cylinder with a uniform, transverse magnetic field*,  
 International journal of heat and mass transfer,  
**36**, p.3509–3514.
- Rainer Hollerbach, 1994  
*Magnetohydrodynamic Ekman and Stewartson layers  
 in a rotating spherical shell*,  
 Proceedings of the Royal Society of London A, **444**, p.333–346.
- Rainer Hollerbach, 1997  
*The influence of an axial field on magnetohydrodynamic  
 Ekman and Stewartson layers, in the presence of a  
 finite conducting inner core*  
 Acta Astron. et Geophys. Univ. Comenianae **19**, p. 263–275.
- K. Kleorin, I. Rogachevskii, A. Ruzmaikin,  
 Andrew Soward, Serguei Starchenko, 1997  
*Axisymmetric flow between differentially rotating spheres  
 in a magnetic field with dipole symmetry*,

- Journal of Fluid Mechanics, **344**, p.213–244.
- John **J**ackson, 1962, 1975  
*Classical Electrodynamics*  
John Wiley & Sons, New-York.
- René **M**oreau, 1990  
*Magnetohydrodynamics*  
Kluwer Academic Publishers.
- Philip **M**orse et Herman Feshbach, 1953  
*Methods of theoretical physics*,  
McGraw-Hill Inc.
- Joseph **P**edlosky, 1979, 1982, 1987  
*Geophysical Fluid Dynamics*,  
Springer-Verlag.
- Ian **P**roudman, 1956  
*The almost-rigid rotation of viscous fluid between concentric spheres*,  
Journal of Fluid Mechanics, **1**, p.505–516.
- Luigi **Q**uartapelle et M. Verri, 1995  
*On the spectral solution of the three-dimensional Navier-Stokes equations  
in spherical and cylindrical regions*,  
Comp. Phys. Comm., **90**, p.1–43.
- Paul **R**oberts, 1967  
*Singularities of Hartmann layers*,  
Proceedings of the Royal Society of London A, **300**, p.94–107.
- X. **S**ong et P.G. Richards, 1996  
*Seismological evidence for differential rotation of the Earth's inner core*,  
Nature, **382**, No 6588, p.221–224.
- Keith **S**tewartson, 1957  
*On almost rigid rotations*,  
Journal of Fluid Mechanics, **3**, p.299–303.
- W. **S**u, A. Dziewonski et R. Jeanloz, 1996  
*Planet within a planet : rotation of the inner core of the Earth*,  
Science, **274**, No 5294, p.1883–1887.
- Edward **T**aylor, 1972  
*Secondary flow*,  
dans *Illustrated Experiments in Fluid Mechanics*,  
MIT Press.

D. Tritton, 1988

*Physical Fluid Dynamics*

Oxford Science Publications.

Johannes Wicht, 1995

*Zur Zeitabhängigkeit von Konvektion und Selbstkonsistenten*

*Dynamos in Rotierenden Kugelschalen*

Thèse, Université de Bayreuth.

Keke Zhang, David Fearn, 1995

*Hydromagnetic waves in rapidly rotating spherical shells*

*generated by poloidal decays modes,*

Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics, **81**, p.193–209.