Appendix C

Schéma aux différences finies compactes pour nos équations

Pour résoudre l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f\,, \tag{C.1}$$

on utilise alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = {} & \left(\tilde{\delta}^2 u\right)_0 - \frac{1}{3}\left(h_2 - h_1\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(0) \\ & - \frac{h_1^2 - h_1 h_2 + h_2^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(0) + \left(h_2 - h_1\right)\mathcal{O}(h^3)\,. \end{aligned} \tag{C.2}$$

L'idée de la méthode est de re-différencier l'équation (C.1) pour réduire l'erreur de troncature. L'équation précédente peut s'écrire

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = {} & \left(\tilde{\delta}^2 u\right)_0 - \frac{1}{3}\left(h_2 - h_1\right)\frac{\partial f}{\partial x}(0) \\ & - \frac{h_1^2 - h_1 h_2 + h_2^2}{12}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0) + \left(h_2 - h_1\right)\mathcal{O}(h^3)\,. \end{aligned} \tag{C.3}$$

En approchant les dérivées du second membre à l'aide des opérateurs centrés, il vient

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = &\left(\tilde{\delta}^2 u\right)_0 - \frac{1}{3}(h_2 - h_1)\left((\tilde{\delta} f)_0 - \frac{h_1 h_2}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \mathcal{O}(h^3)\right) \\
&-\frac{h_1^2 - h_1 h_2 + h_2^2}{12}\left(\begin{array}{l} (\tilde{\delta}^2 f)_0 - \dfrac{1}{3}(h_2 - h_1)\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0) \\ -\dfrac{h_1^2 - h_1 h_2 + h_2^2}{12}\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0) \\ +(h_2 - h_1)\,\mathcal{O}(h^3) \end{array}\right) \\
&+(h_2 - h_1)\,\mathcal{O}(h^3)\,.
\end{aligned} \tag{C.4}
$$

Pour simplifier l'écriture, plaçons nous dans le cas d'une grille à décroissance géométrique, c'est-à-dire pour laquelle $(h_2 - h_1) \simeq \mathcal{O}(h)$, on a alors

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = &\left(\tilde{\delta}^2 u\right)_0 - \frac{1}{3}(h_2 - h_1)\left((\tilde{\delta} f)_0 + \mathcal{O}(h^2)\right) \\
&-\frac{h_1^2 - h_1 h_2 + h_2^2}{12}\left((\tilde{\delta}^2 f)_0 + \mathcal{O}(h)\right) \\
&+\mathcal{O}(h^4)\,.
\end{aligned} \tag{C.5}
$$

La version discrète de l'équation (C.1) s'écrit alors

$$
\left(\tilde{\delta}^2 u\right)_0 = f + \frac{1}{3}(h_2 - h_1)(\tilde{\delta} f)_0 + \frac{h_1^2 - h_1 h_2 + h_2^2}{12}(\tilde{\delta}^2 f)_0 + \mathcal{O}(h^3)\,. \tag{C.6}
$$

Ce schéma est d'ordre trois sur une grille irrégulière, alors que le schéma de différences finies classiques n'est que d'ordre un. D'une manière matricielle ce schéma s'écrit

$$
\left[\tilde{\delta}^2\right](u_i) = \left([Id] + \frac{1}{3}(h_2 - h_1)\left[\tilde{\delta}\right] + \frac{h_1^2 - h_1 h_2 + h_2^2}{12}\left[\tilde{\delta}^2\right]\right)(f_i)\ , \tag{C.7}
$$

soit

$$
\left[\tilde{\delta}^2\right](u_i) = [K_{\tilde{\delta}^2}]\ (f_i)\ . \tag{C.8}
$$

Sur une grille régulière (lorsque les opérateurs $\tilde{\delta}$ et $\tilde{\delta}^2$ deviennent δ et δ^2) ce schéma s'écrit sous forme matricielle

$$
\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{12} & & & \\ \frac{1}{12} & \frac{5}{6} & \frac{1}{12} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{1}{12} & \frac{5}{6} & \frac{1}{12} \\ & & & \frac{1}{12} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{C.9}
$$

Un schéma aux différences finies compactes tel que nous l'avons introduit (par redifférentiation) doit être redérivé pour chaque nouvelle équation. Nous allons à présent établir un schéma compact sur grille irrégulière pour notre système d'équations, que nous mettons sous la forme (voir équation 2.102)

$$\text{(C.10)}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\,\Delta u_{p_l}^{\,m} = \Delta^2 u_{p_l}^{\,m} + E^{-1}\,\mathrm{i}\,\dfrac{m}{l\,(l+1)}\,\Delta u_{p_l}^{\,m} + E^{-1}\,\dfrac{1}{l\,(l+1)}\,Q_3\,u_{t_l}^{\,m} + F_1\,, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\,u_{t_l}^{\,m} = \Delta u_{t_l}^{\,m} + E^{-1}\,\mathrm{i}\,\dfrac{m}{l\,(l+1)}\,u_{t_l}^{\,m} - E^{-1}\,\dfrac{1}{l\,(l+1)}\,Q_3\,u_{p_l}^{\,m} + F_2\,, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\,\Theta_l^m = \dfrac{1}{Pr}\,\Delta\Theta_l^m + F_3\,. \end{cases}$$

où F_1 et F_2 représentent les termes indépendants de u (Archimède) ainsi que les interactions non-linéaires calculées dans l'espace physique, et F_3 contient le $\vec{u}\cdot\vec{\nabla}T_s$ (indépendant de θ) et le $\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\theta$ calculé dans l'espace physique.

Procédons par complexité croissante ; commençons par traiter l'équation pour la perturbation de température

$$\text{(C.11)}\qquad \frac{\partial}{\partial t}\,\Theta_l^m = \frac{1}{Pr}\,\Delta\,\Theta_l^m + F_3\,,$$

$$\text{(C.12)}\qquad \frac{\partial}{\partial t}\,\Theta_l^m = \frac{1}{Pr}\,\frac{\partial^2}{\partial r^2}\Theta_l^m + \frac{1}{Pr}\,\frac{2}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Theta_l^m - \frac{1}{Pr}\,\frac{l\,(l+1)}{r^2}\Theta_l^m + F_3\,.$$

Suivant Spotz (1995), nous posons

$$\text{(C.13)}\qquad \hat{F}_3 = F_3 - \frac{\partial}{\partial t}\,\Theta_l^m - \frac{1}{Pr}\,\frac{l\,(l+1)}{r^2}\Theta_l^m\,,$$

l'équation (C.12) s'écrit alors

$$\text{(C.14)}\qquad \frac{\partial^2}{\partial r^2}\Theta_l^m + \frac{2}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Theta_l^m = -Pr\,\hat{F}_3\,.$$

Appliquons alors la même approche que pour l'équation (C.1) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2}\Theta_l^m + \frac{2}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Theta_l^m = & \left(\tilde{\delta}^2\Theta_l^m\right)_0 - \frac{1}{3}\,(h_2-h_1)\,\frac{\partial^3\Theta_l^m}{\partial x^3}(0) - \frac{h_1^2 - h_1h_2 + h_2^2}{12}\,\frac{\partial^4\Theta_l^m}{\partial x^4}(0) \\ & + (h_2-h_1)\,\mathcal{O}(h^3) + \frac{2}{r}\,\left(\left(\tilde{\delta}\Theta_l^m\right)_0 - \frac{h_1h_2}{6}\,\frac{\partial^3\Theta_l^m}{\partial x^3}(0) + \mathcal{O}(h^3)\right)\,. \end{aligned}\qquad \text{(C.15)}$$

En différentiant (C.14) il vient

$$\text{(C.16)}\qquad \frac{\partial^3}{\partial r^3}\Theta_l^m = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{2}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\Theta_l^m\right) - Pr\,\frac{\partial\hat{F}_3}{\partial r}\,,$$

$$\text{(C.17)}\qquad \frac{\partial^3}{\partial r^3}\Theta_l^m = \frac{2}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\Theta_l^m - \frac{2}{r}\,\frac{\partial^2}{\partial r^2}\Theta_l^m - Pr\,\frac{\partial\hat{F}_3}{\partial r}\,,$$

et

$$\text{(C.18)}\qquad \frac{\partial^4}{\partial r^4}\Theta_l^m = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Theta_l^m\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{2}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\Theta_l^m\right) - Pr\,\frac{\partial^2 \hat{F}_3}{\partial r^2}\,,$$

$$\text{(C.19)}\qquad \frac{\partial^4}{\partial r^4}\Theta_l^m = -\frac{4}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}\Theta_l^m + \frac{4}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\Theta_l^m - \frac{2}{r}\frac{\partial^3}{\partial r^3}\Theta_l^m - Pr\,\frac{\partial^2 \hat{F}_3}{\partial r^2}\,,$$

$$\text{(C.20)}\qquad \frac{\partial^4}{\partial r^4}\Theta_l^m = -\frac{8}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}\Theta_l^m + \frac{8}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\Theta_l^m + \frac{2}{r}\,Pr\,\frac{\partial \hat{F}_3}{\partial r} - Pr\,\frac{\partial^2 \hat{F}_3}{\partial r^2}\,.$$

Avec l'équation (C.15) on a alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\Theta_l^m+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Theta_l^m = &\left(\tilde{\delta}^2\Theta_l^m\right)_0 - \frac{1}{3}(h_2-h_1)\left(\frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Theta_l^m - \frac{2}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\Theta_l^m - Pr\,\frac{\partial \hat{F}_3}{\partial r}\right)\\ &-\frac{h_1^2-h_1h_2+h_2^2}{12}\left(-\frac{8}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}\Theta_l^m + \frac{8}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\Theta_l^m + \frac{2}{r}\,Pr\,\frac{\partial \hat{F}_3}{\partial r} - Pr\,\frac{\partial^2 \hat{F}_3}{\partial r^2}\right)\\ &+(h_2-h_1)\,\mathcal{O}(h^3)\\ &+\frac{2}{r}\left(\left(\tilde{\delta}\Theta_l^m\right)_0 - \frac{h_1h_2}{6}\left(\frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Theta_l^m - \frac{2}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\Theta_l^m - Pr\,\frac{\partial \hat{F}_3}{\partial r}\right) + \mathcal{O}(h^3)\right)\,.\end{aligned}\tag{C.21}$$

En remplaçant les opérateurs différentiels par leurs approximations discrètes on obtient alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\Theta_l^m+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Theta_l^m = &\left(\tilde{\delta}^2\Theta_l^m\right)_0 + \frac{2}{r}\left(\tilde{\delta}\Theta_l^m\right)_0\\ &-\frac{1}{3}(h_2-h_1)\left(\frac{2}{r^2}\left(\tilde{\delta}\Theta_l^m\right)_0 - \frac{2}{r}\left(\tilde{\delta}^2\Theta_l^m\right)_0 - Pr\,\left(\tilde{\delta}\hat{F}_3\right)_0\right)\\ &-\frac{h_1^2-h_1h_2+h_2^2}{12}\left(-\frac{8}{r^3}\left(\tilde{\delta}\Theta_l^m\right)_0 + \frac{8}{r^2}\left(\tilde{\delta}^2\Theta_l^m\right)_0 + \frac{2}{r}\,Pr\,\left(\tilde{\delta}\hat{F}_3\right)_0 - Pr\,\left(\tilde{\delta}^2\hat{F}_3\right)_0\right)\\ &+\frac{2}{r}\left(-\frac{h_1h_2}{6}\left(\frac{2}{r^2}\left(\tilde{\delta}\Theta_l^m\right)_0 - \frac{2}{r}\left(\tilde{\delta}^2\Theta_l^m\right)_0 - Pr\,\left(\tilde{\delta}\hat{F}_3\right)_0\right)\right) + \mathcal{O}(h^2)\,.\end{aligned}\tag{C.22}$$

La version discrète de l'équation (C.14) s'écrit alors

$$\begin{aligned}&\left(\tilde{\delta}^2\Theta_l^m\right)_0\left(1+\frac{2\,(h_2-h_1)}{3\,r} - \frac{8\,(h_1^2-h_1h_2+h_2^2)}{12\,r^2} + \frac{2\,h_1h_2}{3\,r^2}\right)\\ &+\left(\tilde{\delta}\Theta_l^m\right)_0\left(\frac{2}{r} - \frac{2\,(h_2-h_1)}{3\,r^2} + \frac{8\,(h_1^2-h_1h_2+h_2^2)}{12\,r^3} - \frac{2\,h_1h_2}{3\,r^3}\right)\\ &\qquad = -Pr\,\hat{F}_3 - Pr\,\left(\tilde{\delta}\hat{F}_3\right)_0\left(\frac{h_2-h_1}{3} - \frac{(h_1^2-h_1h_2+h_2^2)}{6\,r} - \frac{2}{r}\right)\\ &\qquad\quad -Pr\,\left(\tilde{\delta}^2\hat{F}_3\right)_0\left(\frac{(h_1^2-h_1h_2+h_2^2)}{12}\right)\,.\end{aligned}\tag{C.23}$$

Soit sous forme matricielle

$$
\begin{aligned}
&\left(1+\frac{2\,(h_2-h_1)}{3\,r}-\frac{8\,(h_1^2-h_1h_2+h_2^2)}{12\,r^2}+\frac{2\,h_1h_2}{3\,r^2}\right)\left[\tilde{\delta}^2\right]\,(\Theta_l^m)\\
&+\left(\frac{2}{r}-\frac{2\,(h_2-h_1)}{3\,r^2}+\frac{8\,(h_1^2-h_1h_2+h_2^2)}{12\,r^3}-\frac{2\,h_1h_2}{3\,r^3}\right)\left[\tilde{\delta}\right]\,(\Theta_l^m)\\
&\qquad=-Pr\;[Id]\,\left(\hat{F}_3\right)\\
&\qquad\quad-Pr\left(\frac{h_2-h_1}{3}-\frac{(h_1^2-h_1h_2+h_2^2)}{6\,r}-\frac{2}{r}\right)\left[\tilde{\delta}\right]\,\left(\hat{F}_3\right)\\
&\qquad\quad-Pr\left(\frac{(h_1^2-h_1h_2+h_2^2)}{12}\right)\left[\tilde{\delta}^2\right]\,\left(\hat{F}_3\right).
\end{aligned}
\tag{C.24}
$$

Notons que pour accroître l'ordre du schéma, on n'a pas seulement introduit une matrice au second membre comme dans l'exemple précédent, mais les coefficients du premier membre du système ont eux même été modifiés.

Il est intéressant de noter également que les modifications par rapport au schéma de différences finies classiques sont toutes en h ou en puissance de h , elles disparaissent dans la limite des petits h (consistance).

On écrira encore ce schéma de manière condensée

$$
\left[\tilde{\Delta}_r\right]\,\Theta_l^m=-Pr\,\left[K_{\tilde{\Delta}_r}\right]\,\hat{F}_3\,. \tag{C.25}
$$

D'où en remplaçant $\hat{F}_3$ par son expression

$$
\frac{\partial}{\partial t}\left[K_{\tilde{\Delta}_r}\right]\,\Theta_l^m=\frac{1}{Pr}\left[\tilde{\Delta}_r\right]\,\Theta_l^m-\frac{1}{Pr}\,\frac{l\,(l+1)}{r^2}\left[K_{\tilde{\Delta}_r}\right]\,\Theta_l^m+\left[K_{\tilde{\Delta}_r}\right]\,F_3\,. \tag{C.26}
$$

Que l'on peut écrire

$$
\frac{\partial}{\partial t}\left[K_{\tilde{\Delta}_r}\right]\,\Theta_l^m=\frac{1}{Pr}\,\underbrace{\left[\tilde{\Delta}_r\right]-\frac{l\,(l+1)}{r^2}\left[K_{\tilde{\Delta}_r}\right]}_{\left[\tilde{\Delta}\right]}\,\Theta_l^m+\left[K_{\tilde{\Delta}_r}\right]\,F_3\,. \tag{C.27}
$$

Intéressons nous à présent à l'équation du scalaire toroïdal de la vitesse

$$
\frac{\partial}{\partial t}\,u_{tl}^{\;m}=\Delta\,u_{tl}^{\;m}+E^{-1}\,\mathrm{i}\,\frac{m}{l\,(l+1)}\,u_{tl}^{\;m}-E^{-1}\,\frac{1}{l\,(l+1)}\,Q_3\,u_{pl}^{\;m}+F_2\,, \tag{C.28}
$$

Le terme Q_3 défini précédemment (équation (2.50)) introduit des dérivées radiales des harmoniques de degrés $(l+1)$ et $(l-1)$. En toute rigueur ces dérivées devraient être traitées ici par un opérateur compact, ce qui interdirait de traiter indépendamment les différents degrés. Pour une première approche, nous traiterons donc ce terme par différences classiques, et nous l'incluons au terme F_2.

(C.29) $$\frac{\partial}{\partial t} u_{t\,l}^{\,m} = \Delta\, u_{t\,l}^{\,m} + E^{-1}\,\mathrm{i}\,\frac{m}{l\,(l+1)}\, u_{t\,l}^{\,m} + F_2' \,,$$

(C.30) $$\frac{\partial}{\partial t} u_{t\,l}^{\,m} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} u_{t\,l}^{\,m} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} u_{t\,l}^{\,m} - \frac{l\,(l+1)}{r^2} u_{t\,l}^{\,m} + E^{-1}\,\mathrm{i}\,\frac{m}{l\,(l+1)}\, u_{t\,l}^{\,m} + F_2' \,,$$

Qui se discrétise donc par le même schéma que l'équation (C.27) :

(C.31) $$\frac{\partial}{\partial t} \left[K_{\tilde\Delta_r}\right] u_{t\,l}^{\,m} = \underbrace{\left[\tilde\Delta_r\right] - \frac{l\,(l+1)}{r^2} \left[K_{\tilde\Delta_r}\right]}_{\left[\tilde\Delta\right]} u_{t\,l}^{\,m} + E^{-1}\,\mathrm{i}\,\frac{m}{l\,(l+1)} \left[K_{\tilde\Delta_r}\right] u_{t\,l}^{\,m} + \left[K_{\tilde\Delta_r}\right] F_2' \,.$$

Traitons enfin le cas du scalaire poloïdal

(C.32) $$\frac{\partial}{\partial t} \Delta u_{p\,l}^{\,m} = \Delta^2\, u_{p\,l}^{\,m} + E^{-1}\,\mathrm{i}\,\frac{m}{l\,(l+1)}\, \Delta\, u_{p\,l}^{\,m} + E^{-1}\,\frac{1}{l\,(l+1)}\, Q\, u_{t\,l}^{\,m} + F_1 \,,$$

(C.33) $$\frac{\partial}{\partial t} \Delta u_{p\,l}^{\,m} = \Delta^2\, u_{p\,l}^{\,m} + E^{-1}\,\mathrm{i}\,\frac{m}{l\,(l+1)}\, \Delta\, u_{p\,l}^{\,m} + F_1' \,,$$

Posons

(C.34) $$X = \Delta u_{p\,l}^{\,m} \,,$$

on a alors

(C.35) $$\frac{\partial}{\partial t} X = \Delta\, X + E^{-1}\,\mathrm{i}\,\frac{m}{l\,(l+1)}\, X + F_1' \,.$$

On utilise alors pour cette équation le schéma d'ordre deux déjà utilisé pour les deux précédentes

(C.36) $$\left[K_{\tilde\Delta_r}\right] \frac{\partial}{\partial t} X = \left[\tilde\Delta\right] X + E^{-1}\,\mathrm{i}\,\frac{m}{l\,(l+1)} \left[K_{\tilde\Delta_r}\right] X + \left[K_{\tilde\Delta_r}\right] F_1' \,.$$

En utilisant alors le schéma également d'ordre deux

(C.37) $$X = \left[K_{\tilde\Delta_r}\right]^{-1} \left[\tilde\Delta\right] u_{p\,l}^{\,m} \,,$$

on peut proposer le schéma d'ordre deux

(C.38) $$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[K_{\tilde\Delta_r}\right] \left[K_{\tilde\Delta_r}\right]^{-1} \left[\tilde\Delta\right] u_{p\,l}^{\,m} &= \left[\tilde\Delta\right] \left[K_{\tilde\Delta_r}\right]^{-1} \left[\tilde\Delta\right] u_{p\,l}^{\,m} \\ &+ E^{-1}\,\mathrm{i}\,\frac{m}{l\,(l+1)} \left[K_{\tilde\Delta_r}\right] \left[K_{\tilde\Delta_r}\right]^{-1} \left[\tilde\Delta\right] u_{p\,l}^{\,m} + \left[K_{\tilde\Delta_r}\right] F_1' \,, \end{aligned}$$

(C.39) $$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\tilde\Delta\right] u_{p\,l}^{\,m} &= \left[\tilde\Delta\right] \left[K_{\tilde\Delta_r}\right]^{-1} \left[\tilde\Delta\right] u_{p\,l}^{\,m} \\ &+ E^{-1}\,\mathrm{i}\,\frac{m}{l\,(l+1)} \left[\tilde\Delta\right] u_{p\,l}^{\,m} + \left[K_{\tilde\Delta_r}\right] F_1' \,. \end{aligned}$$

On utilise alors la commutativité, propriété généralement fausse pour le produit matriciel, mais vérifiée ici car les matrices sont symétriques (les matrices des opérateurs sont symétriques car les schémas sont centrés, et les matrices “de masses” sont constitués de combinaisons linéaires de l'identité et de matrices d'opérateurs, elles sont donc également symétriques).

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\tilde{\Delta}\right] {u_p}_l^m = &\left[K_{\tilde{\Delta}_r}\right]^{-1} \left[\tilde{\Delta}\right]^2 {u_p}_l^m \\ &+ E^{-1}\, \mathbb{i}\, \frac{m}{l\,(l+1)} \left[\tilde{\Delta}\right] {u_p}_l^m + \left[K_{\tilde{\Delta}_r}\right] F_1', \end{aligned} \tag{C.40}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[K_{\tilde{\Delta}_r}\right] \left[\tilde{\Delta}\right] {u_p}_l^m = &\left[\tilde{\Delta}\right]^2 {u_p}_l^m \\ &+ E^{-1}\, \mathbb{i}\, \frac{m}{l\,(l+1)} \left[K_{\tilde{\Delta}_r}\right] \left[\tilde{\Delta}\right] {u_p}_l^m + \left[K_{\tilde{\Delta}_r}\right]^2 F_1'. \end{aligned} \tag{C.41}$$

où tous les opérateurs sont pentadiagonaux, comme dans le schéma de différences finies classique.