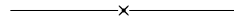


Appendix A

Notations, dimensions, et ordres de grandeurs



A.1 Notations

g	Champ de gravité,
α	Coefficient d'expansion thermique,
u	Vitesse,
ν	Viscosité cinématique,
κ	Diffusivité thermique,
η	Diffusivité magnétique,
ρ	Masse volumique,
Ω	Rotation,
B	Induction magnétique,
μ	Perméabilité magnétique,
$\vec{*}$	Vecteur,
$\overleftarrow{*}$	Pseudo-vecteur (i.e. tenseur antisymétrique d'ordre 2),
$\underline{*}$	Tenseur.

A.2 Abréviations

ICB	Frontière graine-noyau (en anglais “Inner Core Boundary”),
CMB	Frontière noyau-manteau (en anglais “Core Mantle Boundary”),
D''	couche fine à l’interface entre le noyau et le manteau (mal connue).
$\underline{\beta}$	Chauffage uniforme.
$\underline{\Delta}$	Chauffage différentiel.
$\underline{\Phi}$	Chauffage avec température imposée à la graine et flux de chaleur au manteau.

A.3 Dimension des principales grandeurs

$[q]$	$= Q$	Charge,
$[\vec{E}]$	$= Q^{-1}MLT^{-2}$	Champ électrique,
$[\vec{H}]$	$= QL^{-1}T^{-1}$	Champ magnétique,
$[\sigma]$	$= Q^2M^{-1}L^{-3}T$	Conductivité,
$[\vec{j}]$	$= QL^{-2}T^{-1}$	Densité de courant,
$[\rho]$	$= ML^{-3}$	Densité de masse,
$[\eta]$	$= L^2T^{-1}$	Diffusivité magnétique,
$[\kappa]$	$= L^2T^{-1}$	Diffusivité thermique,
$[\vec{g}]$	$= LT^{-2}$	Gravité,
$[\vec{D}]$	$= QL^{-2}$	Déplacement électrique,
$[\vec{B}]$	$= Q^{-1}MT^{-1}$	Induction magnétique,
$[\mu]$	$= Q^{-2}ML$	Perméabilité magnétique,
$[\varepsilon]$	$= Q^2M^{-1}L^{-3}T^2$	Permittivité,
$[\vec{\Omega}]$	$= T^{-1}$	Rotation,
$[\nu]$	$= L^2T^{-1}$	Viscosité cinématique,
$[\vec{u}]$	$= LT^{-1}$	Vitesse,
$[\vec{\nabla}]$	$= L^{-1}$	Nabla,
$[\Delta]$	$= L^{-2}$	Laplacien,
$[\vec{F}]$	$= MLT^{-2}$	Force,
$[\vec{f}]$	$= ML^{-2}T^{-2}$	Densité de force,
$[\vec{\Gamma}]$	$= ML^2T^{-2}$	Couple.

A.4 Nombres sans dimensions

A.4.1 Introduction

Reynolds

Le nombre de Reynolds mesure le rapport entre le terme advectif et le terme diffusif dans Navier-Stokes

$$(A.1) \quad Re = \frac{\{\vec{u} \nabla \vec{u}\}}{\{\nu \Delta \vec{u}\}} \simeq \frac{u\ell}{\nu}$$

où u est une vitesse caractéristique et ℓ une longueur caractéristique de l'écoulement.

Si l'on s'intéresse à l'écoulement de grande échelle ($\ell = r_e$), et que l'on met la vitesse à l'échelle par rapport à la rotation du système, on peut écrire ce nombre comme

$$(A.2) \quad Re = \frac{\Omega r_e^2}{\nu}$$

Reynolds Magnétique

Le nombre de Reynolds Magnétique mesure le rapport entre le terme advectif et le terme diffusif dans l'équation d'induction

$$(A.3) \quad Rm = \frac{\{\vec{u} \nabla \vec{B}\}}{\{\eta \Delta \vec{B}\}} \simeq \frac{u\ell}{\eta}$$

où u est toujours une vitesse caractéristique et ℓ une longueur caractéristique de l'écoulement.

Sous les mêmes hypothèses que précédemment, on peut écrire ce nombre comme

$$(A.4) \quad Rm = \frac{\Omega r_e^2}{\eta}$$

Remarque : L'équilibre entre création et diffusion de champ que nécessite une dynamo demande des Rm égaux ou supérieurs à l'unité. Pour un champ de vitesse raisonnablement efficace, on attend un Rm de l'ordre de 100 pour arriver à entretenir le champ.

Peclet

Le nombre de Peclet mesure le rapport entre le terme advectif et le terme diffusif dans l'équation d'énergie

$$(A.5) \quad Pe = \frac{\{\vec{u} \cdot \nabla T\}}{\{\kappa \Delta T\}} \simeq \frac{u\ell}{\kappa}$$

où u est toujours une vitesse caractéristique et ℓ une longueur caractéristique de l'écoulement.

Sous les mêmes hypothèses que précédemment, on peut écrire ce nombre comme

$$(A.6) \quad Pe = \frac{\Omega r_e^2}{\kappa}$$

Ekman

Le nombre d'Ekman mesure le rapport entre les forces visqueuses, et la force de Coriolis (il est utilisé sans le facteur 2 dans le chapitre 3)

$$(A.7) \quad E = \frac{\{f_\nu\}}{\{f_\Omega\}} = \frac{\{\nu \Delta \vec{u}\}}{\{2\Omega(\vec{e}_z \wedge \vec{u})\}} \simeq \frac{\nu u \ell^{-2}}{2\Omega u}$$

Remarques: On définit aussi le nombre de Taylor $T = E^{-2}$.

En fait l'intensité du terme de diffusion dépend largement de la géométrie du champ u , ce qui explique que les échelles caractéristiques de l'écoulement varient souvent non comme E mais comme ses puissances ($E^{1/2}, E^{1/3}, \dots$).

Rossby

Le nombre de Rossby mesure le rapport entre les termes d'inertie, et la force de Coriolis

$$(A.8) \quad Ro = \frac{\{\frac{d\vec{u}}{dt}\}}{\{f_\Omega\}} = \frac{\{\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \nabla \vec{u}\}}{\{2\Omega(\vec{e}_z \wedge \vec{u})\}} \simeq \frac{t^{-1} + u \ell^{-1}}{2\Omega u} = \frac{u}{\Omega \ell}$$

Pour les mouvements de grande échelle (comme précédemment)

$$Ro = \frac{u}{\Omega r_e}$$

Ce nombre est petit pour le noyau liquide ($\simeq 10^{-7}$) il est raisonnable de le négliger (à condition de négliger également le nombre d'Ekman, qui est encore plus petit). Si l'on néglige les deux on se place dans l'approximation magnétostrophique.

Elsasser

Le nombre d'Elsasser mesure le rapport entre les forces magnétiques et la force de Coriolis

1ère méthode:

$$(A.9) \quad \Lambda = \frac{\{f_B\}}{\{f_\Omega\}} = \frac{\{\frac{1}{\mu_0 \rho_0} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B}\}}{\{2\Omega(\vec{e}_z \wedge \vec{u})\}} \simeq \frac{1}{\mu_0 \rho_0} \frac{B^2 \ell^{-1}}{2\Omega u} = \frac{B^2}{2\Omega \rho_0 \mu_0 2\ell u}$$

si l'on met la vitesse à l'échelle avec la diffusivité magnétique, il vient

$$(A.10) \quad \Lambda = \frac{B^2}{2\Omega\rho_0\mu_0\eta}$$

2ème méthode:

$$(A.11) \quad \vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B})$$

On suppose que

$$(A.12) \quad \{j\} = \{\sigma u B\}$$

On a alors le même résultat :

$$(A.13) \quad \Lambda = \frac{\{f_B\}}{\{f_\Omega\}} = \frac{\{\frac{1}{\rho_0}(\vec{j} \wedge \vec{B})\}}{\{2\Omega(\vec{e}_z \wedge \vec{u})\}} \simeq \frac{\sigma u B^2}{2\Omega u \rho_0} = \frac{\sigma B^2}{2\Omega \rho_0}$$

$$(A.14) \quad \Lambda = \frac{B^2}{2\Omega\rho_0\mu_0\eta}$$

Hartmann

Le nombre de Hartmann mesure le rapport entre les forces magnétiques et les forces visqueuses

$$(A.15) \quad M^2 = \frac{\{f_B\}}{\{f_\nu\}} = \frac{\sigma u B^2}{\rho_0 \nu \Delta u} = \frac{B^2 \ell^2}{\rho_0 \nu \mu_0 \eta}$$

On a introduit ici le carré du nombre d'Hartmann, en effet il est plus commode d'utiliser

$$(A.16) \quad M = \frac{B \ell}{\sqrt{\rho_0 \nu \mu_0 \eta}}$$

pour définir l'unité de champ magnétique.

Rayleigh & Busse

Le nombre de Rayleigh, comme le nombre de Busse, mesure le rapport entre les forces qui aident la convection (Archimède) et celles qui la freinent (visqueuses)

$$(A.17) \quad R = \frac{\{f_a\}}{\{f_\nu\}} = \frac{\alpha \theta \vec{g}}{\nu \Delta \vec{u}} = \frac{\alpha \theta g \ell^2}{\nu u} \simeq \frac{\alpha T g \ell^2}{\nu u}$$

où T est une température caractéristique (en général imposée par les C.L.). Reste à mettre à l'échelle le diviseur. Si on le met à l'échelle avec κ , on définit le nombre de Rayleigh (très utile en convection)

$$(A.18) \quad R = \frac{\alpha T g \ell^3}{\nu \kappa}$$

Si on le met à l'échelle avec η , on définit le nombre de Busse (très utile en magnéto-convection, ou dynamo)

$$(A.19) \quad B = \frac{\alpha T g \ell^3}{\nu \eta}$$

Remarque: Bien sûr on n'a pas en convection $u\ell = \kappa$, sinon la valeur critique serait $R_c = 1.0\dots$

Prandtl

Le nombre de Prandtl mesure le rapport entre viscosité (“diffusivité cinétique”) et diffusivité thermique

$$(A.20) \quad P = \frac{\nu}{\kappa}$$

Prandtl Magnétique

Le nombre de Prandtl Magnétique mesure le rapport entre viscosité (“diffusivité cinétique”) et diffusivité magnétique

$$(A.21) \quad Pm = \frac{\nu}{\eta}$$

Roberts

Le nombre de Roberts mesure le rapport entre diffusivité thermique et diffusivité magnétique

$$(A.22) \quad q = \frac{\kappa}{\eta}$$

Ce nombre est important car il vaut environ 10^{-6} pour la terre (c'est à dire que le champ diffuse beaucoup, et qu'il est donc difficile d'entretenir une dynamo. C'est aussi une “raison” pour avoir un champ de grande échelle). Il est hélas toujours plus grand que 10^{-1} dans les simulations numériques.

Lewis

Le nombre de Lewis mesure le rapport entre diffusivité thermique et diffusivité chimique

$$(A.23) \quad Le = \frac{\kappa}{\chi}$$

Il est utile lorsque l'on considère une convection doublement diffusive (avec un moteur thermique et un moteur solutal).

A.4.2 Définition

E	Nombre d'Ekman	$\frac{\nu}{2\Omega r_e^2}$	ou	$\frac{\nu}{\Omega r_e^2}$
Λ	Nombre d'Elsasser	$\frac{B^2}{2\Omega\rho\mu\eta}$		
M	Nombre d'Hartmann	$\frac{r_e B}{\sqrt{\mu\rho\nu\eta}}$	$(= \left(\frac{\Lambda}{E}\right)^{1/2})$	
Le	Nombre de Lewis	$\frac{\kappa}{\chi}$		
Pe	Nombre de Peclet	$\frac{ur_e}{\kappa}$	$(= Pr \cdot Re)$	
Pr	Nombre de Prandtl	$\frac{\nu}{\kappa}$		
Pm	Nombre de Prandtl magnétique	$\frac{\nu}{\eta}$		
R	Nombre de Rayleigh	$\frac{\alpha g \beta r_e^6}{\nu\kappa}$,	$\frac{\alpha g T_a r_e^3}{\nu\kappa}$
Re	Nombre de Reynolds	$\frac{ur_e}{\nu}$		
Rm	Nombre de Reynolds magnétique	$\frac{ur_e}{\eta}$	$(= Re \cdot Pm)$	
q	Nombre de Roberts	$\frac{\kappa}{\eta}$	$(= Pm/Pr)$	
Ro	Nombre de Rossby	$\frac{u}{\Omega r_e}$		
T	Nombre de Taylor	$\left(\frac{2\Omega r_e^2}{\nu}\right)^2$	$(= E^{-2})$	

A.5 Ordres de grandeur pour la terre

Dans le noyau :

r_i	1 222	Km	Rayon interne de la coquille,
r_e	3 480	Km	Rayon externe de la coquille,
r_T	6 371	Km	Rayon terrestre,
T_i	$\in [3\,000, 8\,000]$	K	Température interne,
Φ_e	10^{13}	W	Flux de chaleur sortant du noyau,
g_i	4,4	$m \cdot s^{-2}$	Gravité à $r = r_i$,
g_e	10,7	$m \cdot s^{-2}$	Gravité à $r = r_e$,
p_i	$3,3 \cdot 10^{11}$	Pa	Pression à $r = r_i$, ($= 3,3 \text{ MBar} = 3,3 \cdot 10^6 \text{ Atm}$)
p_e	$1,3 \cdot 10^{11}$	Pa	Pression à $r = r_e$, ($= 1,3 \text{ MBar} = 1,3 \cdot 10^6 \text{ Atm}$)
Ω	$7,3 \cdot 10^{-5}$	$rad \cdot s^{-1}$	Vitesse angulaire,
σ	$7 \cdot 10^5$	$\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$	Conductivité du noyau,
μ	$4\pi \cdot 10^{-7}$	$T \cdot m \cdot A^{-1}$	Perméabilité magnétique ($= \mu_0$),
κ	$8 \cdot 10^{-6}$	$m^2 \cdot s^{-1}$	Diffusivité thermique,
α	10^{-5}	K^{-1}	Dilatation thermique,
η	1,1	$m^2 \cdot s^{-1}$	Diffusivité magnétique,
ρ_i	$1,3 \cdot 10^4$	$Kg \cdot m^{-3}$	Masse volumique à $r = r_i$,
ρ_e	$1,0 \cdot 10^4$	$Kg \cdot m^{-3}$	Masse volumique à $r = r_e$,
ν	10^{-6}	$m^2 \cdot s^{-1}$	Viscosité cinématique (\simeq eau),
$\ \vec{u}\ $	10^{-4}	$m \cdot s^{-1}$	Vitesse du fluide,
E	10^{-15}		Nombre d'Ekman,
Λ	$\in [1, 10]$		Nombre d'Elsasser,
H	$\in [10^7, 10^{12}]$		Nombre d'Hartmann,
Pe	10^7		Nombre de Peclet,
Pr	0.14		Nombre de Prandtl,
Pm	10^{-6}		Nombre de Prandtl magnétique,
Re	10^8		Nombre de Reynolds,
Rm	$\in [10^2, 10^3]$		Nombre de Reynolds magnétique,
Le	10^3		Nombre de Lewis,
q	$\in [10^{-6}, 10^{-5}]$		Nombre de Roberts,
Ro	10^{-7}		Nombre de Rossby,
T	10^{30}		Nombre de Taylor.

Données générales :

r_T	6 400	Km	Rayon de la terre,
σ	0	$\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$	Conductivité du manteau,
κ	$5 \cdot 10^{-4}$	$m^2 \cdot s^{-1}$	Diffusivité thermique du manteau,
$\ \vec{u}\ $	10^{-11}	$m \cdot s^{-1}$	Vitesse des plaques, majorant la vitesse dans le manteau,
	$4,5 \cdot 10^9$	ans	Age de la terre (accrétion),
	100 000	ans	Durée caractéristique entre deux inversions,
	5 000	ans	Durée caractéristique d'une inversion,
	720 000	ans	Durée de la période normale actuelle,
$\ \vec{B}_{\text{Ext}}\ $	40 000	nT	Induction magnétique actuelle en surface,
$\ \vec{B}_{\text{CMB}}\ $	$5 \cdot 10^5$	nT	Induction magnétique actuelle estimée à la CMB (= 5 Gauss),
	2 000	$nT/\text{siècles}$	Variation séculaire,
	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$m^2 \cdot s^{-1}$	Viscosité cinématique de l'air (à T et P usuels),
	$1,013 \cdot 10^{-6}$	$m^2 \cdot s^{-1}$	Viscosité cinématique de l'eau (à T et P usuels),
	$6,8 \cdot 10^{-4}$	$m^2 \cdot s^{-1}$	Viscosité cinématique de la glycérine (à T et P usuels).