TD1 : Quelques rappels d'intégration

On dit qu'une famille $\mathscr{A}$ de variables aléatoires réelles est uniformément intégrale (u.i.) si

$$\lim_{a\to\infty} \sup_{X\in\mathscr{A}} \mathbb{E}[|X|\mathbf{1}_{|X|\geq a}] = 0.$$

1. Montrer que si $X \in L^1$ alors la famille $\{X\}$ est u.i.
2. Montrer qu'une famille u.i. est bornée dans $\mathbb{L}^1$.
   - Donner un contre-exemple à la réciproque.
3. Montrer que s'il existe $Y \in \mathbb{L}^1$ telle que pour tout $X \in \mathscr{A}$ on ait $|X| \leq Y$ alors la famille $\mathscr{A}$ est u.i. (on dit que $\mathscr{A}$ est dominée).
   - Donner un contre-exemple à la réciproque.
4. Montrer que $\mathscr{A}$ est u.i. si et seulement si $\mathscr{A}$ est bornée dans L^1 et
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \eta > 0)(\forall E \text{ mesurable avec } \mathbb{P}(E) \leq \eta), \qquad \sup_{X\in\mathscr{A}} \mathbb{E}[|X|\mathbf{1}_E] \leq \varepsilon.$$
5. Critère de Mr de La Vallée Poussin.
   (a) Montrer que s'il existe $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ croissante avec $\phi(t)/t \to \infty$ quand $t \to \infty$ et que $\sup_{X\in\mathscr{A}} \mathbb{E}[\phi(|X|)] < \infty$ alors $\mathscr{A}$ est u.i.
   (b) (*) Montrer la réciproque.
   (c) (***) Quel est le nom complet de Mr de La Vallée Poussin?

Exercice 1 (Le "super" théorème de convergence dominée)**.** Soit (X_n) et X des v.a. réelles définies sur un même espace de probabilité.

1. Montrer que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} X$, si et seulement si $\{X_n\}_{n\geq 0}$ est u.i. et $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{(P)} X$.
2. On ne suppose désormais plus que les X_n sont définies sur le même espace mais seulement que $X_n \to X$ en loi. Montrer que si $\{X_n\}_{n\geq 0}$ est u.i. (cela a toujours un sens) alors $\mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X]$.

Application : Soit X_i v.a.i.i.d. ayant un moment d'ordre 1 alors la loi forte des grands nombres dit que $(X_1 + ... + X_n)/n \to \mathbb{E}[X_1]$ presque sûrement. Montrer que la convergence a aussi lieu dans L^1.

Exercice 2 (Lemme de Scheffé)**.** Soit (X_n) des v.a. réelles positives qui converge presque sûrement vers X. On suppose que $\mathbb{E}[X_n] = 1$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que

$$\mathbb{E}[X] = 1 \quad \text{si et seulement si} \quad X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} X.$$

Application : Soit $(M_n)_{n\geq 0}$ une martingale positive (par rapport à une certaine filtration) qui converge p.s. vers sa limite M_∞. On suppose que $M_0 = 1$. Montrer que

$$\{M_n\}_{n\geq 0} \text{ u.i.} \iff M_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} M_\infty \iff \mathbb{E}[M_\infty] = 1.$$