TD6 : Processus de Lévy

Exercice 1. Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus temporel de Poisson standard (qui ne fait que des sauts de taille 1). Pour $t>0$ calculer la loi de $(t-X_{N_t}, X_{N_t+1}-t)$. Interpréter le paradoxe des autobus.

Exercice 2. Soit X un subordinateur d'exposant de Laplace $\phi(\lambda) = d\cdot\lambda + \int \mathrm{d}\mu(x)(1-e^{-\lambda x})$.

1. Calculer l'espérance de X_t pour $t \geq 0$.
2. Trouver un exemple où $\mathbb{E}[X_t] = \infty$ pour tout $t>0$.
3. Montrer que X_t/t converge en loi vers d quand $t\to 0$. Est-ce vrai quand $t\to\infty$?
4. À quelles conditions a-t-on $\mathbb{E}[e^{\lambda X_t}] < \infty$ pour $\lambda > 0$?

Exercice 3. Soit X et Y deux subordinateurs indépendants. Montrer que $X\circ Y$ est également un subordinateur et calculer son exposant de Laplace en fonction de ceux de X et Y.

Exercice 4 (Calculs)**.**

1. Pour $\alpha>0$. Soit γ_α la loi de densité $\gamma_\alpha(\mathrm{d}x) = x^{\alpha-1}e^{-x}/\Gamma(\alpha)$ sur $\mathbb{R}_+$.
   (a) Montrer que γ_α est infiniment divisible.
   (b) Montrer que le subordinateur associé a une dérive nulle et mesure de Lévy égale à $\mathrm{d}x\, e^{-x}/x$.
2. Soit X une variable aléatoire géométrique translatée de loi $\mathbb{P}(X=k) = (1-p)p^k$ pour tout $k\in\{0,1,2,3,\ldots\}$. On va montrer que X est infiniment divisible et on note $d\geq 0$ la dérive et μ la mesure du subordinateur associé.
   (a) Montrer que, sous réserve d'existence, $d=0$ et que μ est portée par les entiers.
   (b) Calculer la transformée de Laplace de X et identifier, s'il existe, le couple (d,μ).
   (c) Conclure.

Exercice 5. Un subordinateur X est stable d'exposant $\alpha>0$ si on a $(X_{ut})_{t\geq 0} = (u^{1/\alpha}X_t)_{t\geq 0}$ pour tout $u>0$. Trouver tous les subordinateurs stables et donner leurs couples (d,μ) caractéristiques.

Exercice 6. Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus de Lévy de d'exposant de Lévy-Khintchine $\mathbb{E}[e^{-iuX_t}] = e^{-t\psi(u)}$ donné par

$$\psi(u) = \mathrm{i}du + \frac{\sigma^2}{2}u^2 + \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\mu(x)(1-e^{-iux} - \mathrm{i}ux\mathbf{1}_{|x|<1}).$$

Caractériser les triplets (d,σ^2,μ) tel que

- X est p.s. continu,
- X est p.s. à valeurs dans $\mathbb{R}^+$,
- X est p.s. à variation bornée,

Exercice 7. Soit B un mouvement brownien standard et τ un variable de loi exponentielle de paramètre 1 indépendante de B. Montrer que B_τ est infiniment divisible et donner son triplet caractéristique.