# TD5 : Nuages poissonniens

**Exercice 1** (Méthode des moments et loi de Poisson)**.** Soit $X$ une variable aléatoire réelle. Pour $k \in \{0,1,2,...\}$ sous réserve que $\mathbb{E}[|X|^k] < \infty$ le $k$ième moment factoriel de $X$ est défini comme

$$\mathbb{E}[(X)_k] = \mathbb{E}[X(X-1)\cdots(X-k+1)].$$

1. Calculer les moments factoriels d'une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ et montrer que la loi de Poisson est déterminée par ses moments factoriels.

2. On suppose que $X = \sum_{i \in I} \mathbf{1}_{A_i}$ est une somme d'indicatrices. Montrer que

$$\mathbb{E}[(X)_k] = \sum_{\substack{i_1,...,i_k \in I \\ \text{2 à 2 distincts}}} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}).$$

   Indice : Conditionner par rapport à $A_{i_1}$ et utiliser une récurrence.

3. Applications : Utiliser les deux premières questions pour montrer

   (a) Convergence Binomiale-Poisson : $\mathrm{Bin}(n, \lambda/n) \to \mathscr{P}(\lambda)$ en loi quand $n \to \infty$,

   (b) Si $\sigma_n \in \mathfrak{S}_n$ est une permutation uniforme sur $\{1,2,\ldots,n\}$ alors le nombre de points fixes de $\sigma_n$ converge en loi vers $\mathscr{P}(1)$ quand $n \to \infty$.

   (c) On considère le graphe complet à $n$ sommets c'est-à-dire le graphe dont les sommets sont $\{\mathbf{1},\mathbf{2},...,\mathbf{n}\}$ et qui possède une arête entre chaque sommet (donc $n(n-1)/2$ arêtes au total). On se donne $p \in [0,1]$ et on note $G(n,p)$ le graphe obtenu après une percolation de paramètre $p$, c'est-à-dire en gardant chaque arête indépendamment avec probabilité $p$. On note $T(n,p)$ le nombre de triangles (i.e. sommets $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ reliés par des arêtes) dans $G(n,p)$. Montrer que $T(n,\lambda/n)$ converge en loi vers une loi de Poisson quand $n \to \infty$.

**Exercice 2.** Soit $\mathscr{N}$ un nuage poissonnien sur $\mathbb{R}_+$ d'intensité $\dfrac{t}{1+t}\mathrm{d}t$.

1. Expliquer pourquoi on peut écrire presque sûrement $\mathscr{N} = \{T_i : i \geq 1\}$ où $0 < T_1 < T_2 < \cdots$ sont les points de $\mathscr{N}$ numérotés dans l'ordre croissant.

2. Calculer la loi de $T_1$ et celle de $(T_1, T_2)$.

3. Montrer que presque sûrement

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{T_n^2} < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{T_n} = \infty.$$

4. Montrer que conditionnellement à $T_n$, le nuage de point $\mathscr{N}' = \{T_{n+i} - T_n : n \geq 1\}$ est un nuage poissonnien sur $\mathbb{R}_+$ d'intensité $\frac{t+T_n}{t+T_n+1}\mathrm{d}t$.

5. En déduire que $T_{n+1} - T_n$ converge en loi quand $n \to \infty$ et préciser la loi limite.

**Exercice 3.** Soit $(E,d)$ un espace polonais muni d'une mesure borélienne $\sigma$-finie sans atomes $\mu$. On considère $\mathscr{N}$ un nuage poissonnien sur $E$ d'intensité $\mu$.

1. Soit $A \subset E$ avec $\mu(A) < \infty$. Calculer la loi de $\mathcal{N}$ conditionné à $\#\mathcal{N} \cap A = 0$.

2. Soit $x$ dans le support de $\mu$. Pour $\varepsilon > 0$ calculer la loi de $\mathcal{N}_\varepsilon$ conditionné à $\#\mathcal{N} \cap B(x, \varepsilon) = 1$. Quel sens donneriez-vous à $\mathcal{N}$ conditionné à avoir un point en $x$?

3. (Formule de Palm) Avec les notations du cours on considère une fonction $F : \mathscr{P} \times E \to \mathbb{R}_+$ mesurable pour la tribu $\mathscr{B}_E \otimes \mathscr{T}$. Montrer que l'on a

$$\mathbb{E}\left[\sum_{x \in \mathcal{N}} F(\mathcal{N}, x)\right] = \int \mu(\mathrm{d}x) \mathbb{E}\big[F(\mathcal{N} \cup \{x\}, x)\big].$$

**Exercice 4.** Soit $\mathcal{N} = \{X_i : i \geq 1\}$ un nuage poissonnien sur $\mathbb{R}^2$ d'intensité $\lambda \mathrm{d}x \mathrm{d}y$ pour $\lambda > 0$ numéroté de façon mesurable.

1. Calculer la loi de $\inf_{i \geq 1} |X_i|$.

2. Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ des vaiid à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ indépendantes de $\mathcal{N}$. Montrer que $\{X_i + Y_i : i \geq 1\}$ a la même loi que $\mathcal{N}$.

3. Soit maintenant $(R_n)_{n \geq 1}$ des vaiid réelles positives indépendantes de $\mathcal{N}$. On considère l'ensemble aléatoire

$$A = \bigcup_{i \geq 1} B(X_i, R_i),$$

   où $B(x, r)$ est la boule de centre $x$ et de rayon $r$ dans $\mathbb{R}^2$.

   (a) Calculer la loi du nombre de boules de $A$ qui recouvrent un point donné $x \in \mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que si $\mathbb{E}[R_1^2] = \infty$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ on a presque sûrement $x \in A$.
   (c) En déduire que si $\mathbb{E}[R_1^2] = \infty$ alors $A = \mathbb{R}^2$.
   (d) Montrer que si $\mathbb{E}[R_1^2] < \infty$ alors $A \neq \mathbb{R}^2$ presque sûrement.

4. On suppose que $R_i = r > 0$. On note $\mathscr{C}(0)$ l'amas de l'origine, c'est-à-dire les points accessibles depuis l'origine par un chemin qui reste dans $A$.

   (a) On note $\mathbb{P}_{\lambda,r}$ la loi de $A$ avec intensité $\lambda > 0$ et rayon $r > 0$. Montrer que

$$\mathbb{P}_{\lambda,r}(\mathscr{C}(0) \text{ non borné}) = \mathbb{P}_{1,\sqrt{\lambda}r}(\mathscr{C}(0) \text{ non borné}) = \mathbb{P}_{\lambda r^2,1}(\mathscr{C}(0) \text{ non borné}).$$

   (b) Montrer que $\mathbb{P}_{\lambda,r}(\mathscr{C}(0) \text{ non borné})$ est croissante en $\lambda$ et en $r$.
   (c) (Pour ceux qui suivent le cours de percolation). En comparant le modèle avec une percolation sur $\mathbb{Z}^2$ montrer que sous $\mathbb{P}_{1,r}$
      i. Si $r$ est assez grand $\mathscr{C}(0)$ n'est pas borné avec probabilité positive.
      ii. (*) Montrer que si $\mathbb{P}(\mathscr{C}(0) \text{ est non borné}) > 0$ alors il existe un amas infini dans $A$ presque sûrement.
      iii. Si $r$ est assez petit alors $\mathscr{C}(0)$ est borné et il n'y a pas percolation.
      iv. En déduire l'existence d'un rayon critique $r_c$ en dessous duquel il n'y a pas percolation et au dessus duquel il y a percolation sous $\mathbb{P}_{1,r}$ presque sûrement.

**Exercice 5.** Soit $\rho_1$ et $\rho_2$ deux mesures finies sans atomes sur un espace polonais $(E, d)$. On note $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ deux nuages poissonniens d'intensités $\rho_1$ et $\rho_2$ respectivement.

1. Montrer que la loi de $\mathcal{N}$ est absolument continue par rapport à celle de $\mathcal{N}'$ si et seulement si $\rho_1$ est absolument continue par rapport à $\rho_2$ et donner la densité de $\mathcal{N}$ par rapport à $\mathcal{N}'$.

2. (*) Que pouvez-vous dire dans le cas de mesures infinies ?