TD3 : Convergence de variables aléatoires réelles

Exercice 1 (Restriction des fonctions tests). Soit (μ_n) une suite de $\mathscr{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mu \in \mathscr{M}_1(\mathbb{R})$. Montrer (sans utiliser la fonction caractéristique) que $\mu_n \Rightarrow \mu$ si et seulement si pour toute fonction f de classe $\mathscr{C}^\infty$ à support compact on a $\mu_n(f) \to \mu(f)$.

Exercice 2 (Transformée de Laplace). Si $\mu \in \mathscr{M}_1(\mathbb{R}_+)$ on note pour $\lambda \geq 0$ sa transformée de Laplace

$$\mathscr{L}_\mu(\lambda) = \int_0^\infty \mathrm{d}\mu(x)\, e^{-\lambda x}.$$

1. Montrer que $\mathscr{L}_\mu$ est bien définie, est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que $\mathscr{L}_\mu$ caractérise la loi de μ.
3. Soit μ_n une suite de $\mathscr{M}_1(\mathbb{R}_+)$ telles que $\mathscr{L}_\mu(t) \to \ell(t)$ pour tout $t \geq 0$ où ℓ est une fonction continue à droite en 0.
   (a) Montrer que (μ_n) est tendue.
   (b) Montrer alors que $\ell = \mathscr{L}_\mu$ pour une mesure de probabilité $\mu \in \mathscr{M}_1(\mathbb{R}_+)$.
   (c) En déduire que que $\mu_n \Rightarrow \mu$.

Exercice 3 (Méthode des moments, TCL).

1. Montrer que pour tout $k \in \{1, 2, 3, ...\}$ on a

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\mathrm{d}x}{x} e^{-\log^2(x)} \sin(2\pi \log(x)) x^k = 0.$$

   En déduire qu'il existe une variable aléatoire réelle qui n'est pas déterminée par ses moments.
2. Démontrer que la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ est déterminée par ses moments.
3. Soit $X_1, ..., X_n, ...$ une suite de v.a.i.i.d. telle que X_1 a tous ses moments, $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\mathrm{Var}(X_1) = 1$. Montrer que $(X_1 + ... + X_n)/\sqrt{n}$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite.