TD4 : Processus aléatoires continus

Exercice 1. On rappelle que l'on munit $\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$ de la tribu "produit" ou "cylindrique" $\mathscr{B}^{\mathbb{R}_+}$ (notée $\mathscr{B}_{\mathscr{C}}$ dans le cours) qui est engendrée par les ensembles $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+} : f(t_0) \in A_{t_0}\}$ pour $t_0 \geq 0$ et A_{t_0} borélien. Montrer que

$$\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+} : t \mapsto f(t) \text{ est continue}\} \notin \mathscr{B}^{\mathbb{R}_+}.$$

Exercice 2 (Loi forte des grands nombres fonctionnelle)**.** Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ des v.a.i.i.d. réelles ayant un moment d'ordre 1. Pour $n \geq 1$ on considère le processus aléatoire

$$S_t^{(n)} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_{[nt]} + (nt - [nt])X_{[nt]+1}}{n}, \quad t \geq 0.$$

Montrer que l'on a la convergence presque-sûre pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact

$$(S_t^{(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} (t \mapsto \mathbb{E}[X_1]t)_{t\geq 0}.$$

Exercice 3. Soit $X^{(n)}$ et X des processus aléatoires continus croissants de $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$. On suppose que $X^{(n)} \to X$ au sens des lois fini-dimensionnelles.

1. Montrer que $X^{(n)} \to X$ en loi pour la topologie uniforme sur $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$.
2. Donner un contre-exemple quand X n'est plus supposé continu.

Exercice 4. En appliquant le critère de tension de Kolmogorov, démontrer le théorème de Donsker (en dimension 1) dans le cas où les incréments X_i sont indépendants, centrés, de variance 1 et possèdent un moment d'ordre 4.

Exercice 5 (Pour faire des cauchemars)**.** Soit ℓ^∞ l'espace des suites réelles bornées. On munit ℓ^∞ de deux tribus: la tribu produit (trace de) $\mathscr{B}^{\mathbb{N}}$ engendrée par les ensembles $\{u \in \ell^\infty : u(n_0) \in A_{n_0}\}$ pour $n_0 \geq 0$ et A_{n_0} borélien, et la tribu borélienne $\mathscr{B}_{\|\|_\infty}$ induite par la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur ℓ^∞.

1. Montrer que $\mathscr{B}^{\mathbb{N}} \subset \mathscr{B}_{\|\|_\infty}$.

On considère une suite A_n d'intervalles de $[0,1]$ tels que $|A_n| \to 0$ quand $n \to \infty$ et tels que pour tout $t \in [0,1]$, l'ensemble $B_t = \{n \geq 0 : t \in A_n\}$ est infini. Finalement on définit l'application

$$\xi : t \in [0,1] \mapsto (\mathbf{1}_{t\in A_1}, \mathbf{1}_{t\in A_2}, \mathbf{1}_{t\in A_3}, \ldots).$$

2. Montrer que ξ est mesurable de $([0,1], \mathscr{B}_{[0,1]})$ dans $(\ell^\infty, \mathscr{B}^{\mathbb{N}})$.
3. Soit $A \subset [0,1]$ un ensemble quelconque. Montrez que $\xi(A)$ est fermé dans $(\ell^\infty, \|\|_\infty)$, et que $\xi^{-1}(\xi(A)) = A$.
4. On rappelle qu'il existe des ensembles inclus dans $[0,1]$ non mesurables. Conclure que ξ n'est pas mesurable de $([0,1], \mathscr{B}_{[0,1]})$ dans $(\ell^\infty, \mathscr{B}_{\|\|_\infty})$ et donc que $\mathscr{B}^{\mathbb{N}} \neq \mathscr{B}_{\|\|_\infty}$.