TD2 : Convergence de variables aléatoires

Exercice 1. Sur un espace métrique (E,d) on suppose que $\mu_n \in \mathscr{M}_1(E)$ converge étroitement vers $\mu \in \mathscr{M}_1(E)$. Soit $f : (E,d) \to (F,\delta)$ continue μ-presque partout. Montrer que $\mu_n \circ f^{-1}$ converge étroitement vers $\mu \circ f^{-1}$.

Exercice 2. On suppose que X_n et X sont des v.a. à valeurs dans un espace métrique (E,d). Montrer que si $X_n \to X$ presque sûrement ou en probabilité alors $X_n \to X$ en loi.

Exercice 3. Sur $\mathbb{R}$, on considère une famille de variables normales $\Gamma = (\mathcal{N}(m_i,\sigma_i))_{i\in I}$. À quelles conditions sur $m_i \in \mathbb{R}$ et $\sigma_i > 0$ la famille Γ est-elle tendue ? Même question avec une famille de variables binomiales $\mathbf{B} = (\mathrm{Bin}(n_i,p_i))_{i\in I}$.

Exercice 4. Soit $(\mu_n)_{n\geq 1}$ et μ des mesures de probabilités sur $\mathscr{M}_1(\mathbb{R}^k)$. On suppose que pour toute fonction f continue à support compact on a

$$\mu_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu(f).$$

Montrer que $(\mu_n)_{n\geq 1}$ est tendue puis que $\mu_n \to \mu$ étroitement quand $n \to \infty$.

Exercice 5. On note ℓ^∞ l'ensemble des suites bornées de $\mathbb{N}$ and $\mathbb{R}$.

1. Montrer que ℓ^∞ muni de la norme $\|\|\|_\infty$ définie par $\|(u_n)_{n\geq 0}\| = \sup_{n\geq 0}|u_n|$ est complet mais pas séparable.
2. Montrer que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ muni de la distance $d((u_n),(v_n)) = \sum_{n\geq 0} 2^{-n}\min(1,|u_n - v_n|)$ est polonais.

Exercice 6. Soit (X_n) une suite de v.a. réelles qui converge en loi vers X. On suppose que (X_n) est uniformément intégrable.

1. En utilisant le théorème de représentation de Skorokhod montrer que $\mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X]$.
2. Démontrer le même résultat sans utiliser le théorème de représentation de Skorokhod.

Exercice 7. Sur $\mathscr{M}_1(E)$ avec (E,d) métrique, montrer que la distance en variation totale

$$\mathrm{d}_{\mathrm{TV}}(\mu,\nu) = \sup_{A\in\mathscr{B}_E} |\mu(A) - \nu(A)|,$$

est une distance qui induit une topologie plus fine que celle de la convergence étroite. Montrer que quand E est discret alors la convergence en variation totale est équivalente à la convergence étroite.

Exercice 8. Soit (E,d) un espace polonais. On suppose que $\mathscr{M}_1(E)$ est compact pour la topologie de la convergence étroite. Montrer que (E,d) est compact.

Exercice 9. Soit μ une fonction positive sur $\mathscr{B}_E$ qui vérifie les mêmes axiomes qu'une mesure de probabilité sauf qu'elle n'est supposée que finiment additive i.e. $\mu(A \coprod B) = \mu(A) + \mu(B)$ pour tout $A, B \in \mathscr{B}_E$. On suppose de plus que pour tout borélien $A \in \mathscr{B}_E$ la quantité $\mu(A)$ est le supremum des $\mu(K)$ pour $K \subset A$ compact. Monter que μ est une vraie mesure de probabilité.