

École Doctorale Paris Centre

# THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Mathématiques

présentée par

Vivien RIPOLL

---

## Groupes de réflexion, géométrie du discriminant et partitions non-croisées

---

dirigée par David BESSIS.

Soutenue le 9 juillet 2010 devant le jury composé de :

M. David BESSIS	École Normale Supérieure	(Directeur)
M. Cédric BONNAFÉ	Université de Franche-Comté	
M. Frédéric CHAPOTON	Université Lyon 1	(Rapporteur)
M. Patrick DEHORNOY	Université de Caen	
M. Christian KRATTENTHALER	Universität Wien	(Rapporteur)
M. François LOESER	École Normale Supérieure	
M. Jean MICHEL	Université Paris 7	

Département de Mathématiques et Applications  
École Normale Supérieure  
45 rue d'Ulm  
75 005 Paris

Université Paris Diderot - Paris 7  
5 rue Thomas Mann  
75 205 Paris Cedex 13

École Doctorale de Sciences Mathématiques de Paris-Centre  
Case 188  
4 place Jussieu  
75 252 Paris Cedex 05

# Remerciements

Bien évidemment, c'est à David BESSIS que vont mes premiers remerciements. Il a été pour moi, depuis le début de mon M2, et tout au long de ma thèse, un mentor remarquable. Il m'a montré comment construire mon intuition mathématique, comment prendre du recul, comment rédiger de manière lisible... Mais au-delà de ses indéniables qualités mathématiques, c'est par ses qualités humaines qu'il a su rendre ces années agréables et enrichissantes. Il a toujours été très attentif à ce que je ressentais, et pas seulement aux maths qui nous liaient formellement. Il m'est parfois arrivé au cours de ma thèse d'être démotivé ; mais, invariablement, en sortant de son bureau, j'étais de nouveau confiant et prêt à attaquer avec le sourire des questions passionnantes. Je lui suis aussi reconnaissant d'avoir su rester très disponible jusqu'à la fin de ma thèse, malgré une vie professionnelle chargée. Bref, un énorme merci !

Christian KRATTENTHALER et Frédéric CHAPOTON ont accepté d'être rapporteurs de cette thèse. Je souhaite les remercier vivement ici pour le temps passé, pour leur enthousiasme, et pour avoir accepté de venir à Paris pour la soutenance.

Je remercie Cédric BONNAFÉ, Patrick DEHORNOY, François LOESER, et Jean MICHEL d'avoir bien voulu me faire l'honneur de faire partie du jury également. Un merci spécial à Jean MICHEL, pour avoir répondu patiemment à toutes mes questions sur le logiciel GAP, et à Patrick DEHORNOY pour ses conseils utiles lors de mes passages à Caen, notamment au sujet des exposés oraux.

Merci à toute l'équipe d'algèbre du DMA, qui a été ma maison mathématique pendant ces années de thèse ; en particulier, merci à mes cobureaux Emmanuel, Max, Zhi, Olivier B et Thomas, ainsi qu'à François C. Un grand merci aussi à Zaïna ELMIR et Bénédicte AUFRAY qui rendent la vie pratique accessible à des matheux.

Je remercie aussi toute l'équipe Groupes Finis de l'IMJ, qui m'a accueilli régulièrement : merci en particulier à Jean MICHEL déjà cité, Michel BROUÉ (pour son cours de M2 passionnant qui m'a introduit au monde des groupes de réflexion complexes, et pour avoir été tout au long de ces années un grand-père de thèse particulièrement enthousiasmant), François DIGNE (aussi pour tous les papiers administratifs !), Ivan MARIN, Sungsoon KIM, Marc CABANES, Vincent BECK (chargé de TD puis ami mathématique captivant), Nicolas LIBEDINSKY, Renaud RAMAGE... Toujours à Chevaleret, un grand merci à Michèle WASSE, pour sa compétence exceptionnelle, et pour avoir toujours eu les réponses à mes questions administratives ; merci aussi à Alice DUPOUY qui a pris la relève courageusement et efficacement ces derniers mois.

J'ai pu profiter d'un séjour mathématique au sein du Mathematical Institute à Oxford, grâce à une subvention du réseau Representation Theory Across the Channel. Merci à Meinolf GECK et Bernard LECLERC pour la gestion de ce réseau. Sur place, merci à tout le labo de maths d'Oxford, et en particulier à Raphaël ROUQUIER pour l'accueil chaleureux et les échanges mathématiques très instructifs ; une partie de cette thèse lui doit beaucoup.

J'ai eu la chance de rencontrer Kyoji SAITO, lors d'une conférence à Sapporo ; je le remercie pour son intérêt pour mon travail, pour les discussions enrichissantes et pour m'avoir fourni une version longue d'un de ses articles. Merci également à Vic REINER, pour ses idées et son soutien efficace. L'introduction de ce manuscrit doit beaucoup à la thèse de Drew ARMSTRONG sur les partitions non-croisées : c'est ici l'occasion de le remercier d'avoir écrit 150 pages qui se lisent presque comme un roman.

Merci à l'intelligence multicéphale qu'est le forum de maths de l'ENS, où les questions restent rarement sans réponses ; merci en particulier à David M et Joël B. Pour la partie informatique, particulièrement  $\text{\LaTeX}$ , merci aux tuteurs de l'ENS, et au Bureau des Doctorants de l'IMJ.

Je remercie tous mes amis matheux, qui m'ont aidé chacun à leur manière, dans un cadre mathématique ou non ; en particulier Mikael (trop de choses à dire pour une parenthèse!), Jérémy (relecteur rigoureux!), Olivier, Shona, Cyril, Laetitia, Gabriel, Damien, Valentin...

Je n'oublie pas de remercier mes amis non matheux — coloc, amis de Toulon, de Marseille, de Paris et d'ailleurs —, qui m'ont soutenu de près ou de loin ; je le ferai de vive voix, et ce n'est pas ici le cadre adapté pour détailler tout ce qu'ils ont été pour moi, mais il est certain que leur amitié a été déterminante pendant ces années de thèse. Merci !

Enfin, merci à ma famille pour leur amour et leur soutien constant.

# Résumé

## Résumé

Lorsque  $W$  est un groupe de réflexion complexe bien engendré, le *treillis*  $\text{NCP}_W$  des *partitions non-croisées de type*  $W$  est un objet combinatoire très riche, généralisant la notion de partitions non-croisées d'un  $n$ -gone, et intervenant dans divers contextes algébriques (monoïde de tresses dual, algèbres amassées...). De nombreuses propriétés combinatoires de  $\text{NCP}_W$  sont démontrées au cas par cas, à partir de la classification des groupes de réflexion. C'est le cas de la formule de Chapoton, qui exprime le nombre de chaînes de longueur donnée dans le treillis  $\text{NCP}_W$  en fonction des degrés invariants de  $W$ . Les travaux de cette thèse sont motivés par la recherche d'une explication géométrique de cette formule, qui permettrait une compréhension uniforme des liens entre la combinatoire de  $\text{NCP}_W$  et la théorie des invariants de  $W$ . Le point de départ est l'utilisation du *revêtement de Lyashko-Looijenga* (LL), défini à partir de la géométrie du discriminant de  $W$ .

Dans le chapitre 1, on raffine des constructions topologiques de Bessis, permettant de relier les fibres de LL aux factorisations d'un élément de Coxeter. On établit ensuite une propriété de transitivité de l'action d'Hurwitz du groupe de tresses  $B_n$  sur certaines factorisations. Le chapitre 2 porte sur certaines extensions finies d'anneaux de polynômes, et sur des propriétés concernant leurs jacobiens et leurs discriminants. Dans le chapitre 3, on applique ces résultats au cas des extensions définies par un revêtement LL. On en déduit — sans utiliser la classification — des formules donnant le nombre de factorisations sous-maximales d'un élément de Coxeter de  $W$  en fonction des degrés homogènes des composantes irréductibles du discriminant et du jacobien de LL.

## Mots-clefs

Groupes de réflexion complexes, partitions non-croisées, nombres de Fuss-Catalan, formule de Chapoton, revêtement de Lyashko-Looijenga, factorisations d'élément de Coxeter.

---

# Reflection groups, geometry of the discriminant and noncrossing partitions

## Abstract

When  $W$  is a well-generated complex reflection group, the *noncrossing partition lattice*  $\text{NCP}_W$  of type  $W$  is a very rich combinatorial object, extending the notion of noncrossing partitions of an  $n$ -gon. This structure appears in several algebraic setups (dual braid monoid, cluster algebras...). Many combinatorial properties of  $\text{NCP}_W$  are proved case-by-case, using the classification of reflection groups. It is the case for Chapoton's formula, expressing the number of multichains of a given length in the lattice  $\text{NCP}_W$ , in terms of the invariant degrees of  $W$ . This thesis work is motivated by the search for a geometric explanation of this formula, which could lead to a uniform understanding of the connections between the combinatorics of  $\text{NCP}_W$  and the invariant theory of  $W$ . The starting point is to use the *Lyashko-Looijenga covering* (LL), based on the geometry of the discriminant of  $W$ . In the first chapter, some topological constructions by Bessis are refined, allowing to relate the fibers of LL with block factorisations of a Coxeter element. Then we prove a transitivity property for the Hurwitz action of the braid group  $B_n$  on certain factorisations. Chapter 2 is devoted to certain finite polynomial extensions, and to properties about their Jacobians and discriminants. In Chapter 3, these results are applied to the extension defined by the covering LL. We deduce — with a case-free proof — formulas for the number of submaximal factorisations of a Coxeter element in  $W$ , in terms of the homogeneous degrees of the irreducible components of the discriminant and Jacobian for LL.

## Keywords

Complex reflection groups, noncrossing partitions, Fuss-Catalan numbers, Chapoton's formula, Lyashko-Looijenga covering, factorisations of a Coxeter element.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>9</b>
0.1 Le treillis des partitions non-croisées . . . . .	9
0.2 Motivations algébriques . . . . .	14
0.3 Combinatoire de Coxeter-Fuss-Catalan . . . . .	17
0.4 Géométrie du discriminant . . . . .	20
0.5 Principaux résultats de la thèse . . . . .	21
<b>1 Orbites d’Hurwitz des factorisations primitives d’un élément de Coxeter</b>	<b>27</b>
1.1 Ordre de divisibilité dans $NCP_W$ . . . . .	32
1.2 Action d’Hurwitz sur les factorisations primitives et conjugaison forte dans $NCP_W$	33
1.3 Le morphisme de Lyashko-Looijenga . . . . .	35
1.4 Factorisations géométriques . . . . .	38
1.5 Etude de LL sur les strates $E_\lambda$ . . . . .	41
1.6 Stratification de $\mathcal{H}$ et éléments de Coxeter paraboliques . . . . .	43
1.7 Composantes connexes par arcs de $Y_k^0$ . . . . .	47
1.8 Forte conjugaison, et cas des réflexions . . . . .	49
<b>2 Discriminants and Jacobians of virtual reflection groups</b>	<b>51</b>
2.1 Motivations and main theorem . . . . .	51
2.2 Jacobian and different of a finite graded polynomial extension . . . . .	53
2.3 Geometric properties . . . . .	57
2.4 Well-ramified extensions . . . . .	59
<b>3 Geometry of LL and submaximal factorisations</b>	<b>63</b>
3.1 Lyashko-Looijenga morphisms and factorisations of a Coxeter element . . . . .	63
3.2 Lyashko-Looijenga extensions . . . . .	65
3.3 The Lyashko-Looijenga extension as a virtual reflection group . . . . .	70
3.4 Combinatorics of the submaximal factorisations . . . . .	70
3.5 Chapoton’s formula and submaximal factorisations . . . . .	73
<b>A Numerical data for the factorisations</b>	<b>75</b>
A.1 Description . . . . .	75
A.2 Computations . . . . .	78
<b>B Chains, multichains and block factorisations</b>	<b>83</b>
B.1 Multichains and factorisations in an ordered group . . . . .	83
B.2 Formulas for block factorisations of a Coxeter element . . . . .	84

**Bibliographie**

**87**



# Introduction

Le point de départ des travaux de cette thèse était d'essayer de comprendre une formule qui exprime le nombre de chaînes de longueur donnée dans le treillis des partitions non-croisées associé à un groupe de réflexion  $W$ , en fonction des degrés invariants de  $W$ . J'ai ainsi été amené à étudier les relations entre la combinatoire du treillis et la géométrie de  $W$ , et plus précisément à faire le lien entre certaines factorisations d'un élément de Coxeter et le revêtement de Lyashko-Looijenga de  $W$ .

Ce chapitre introductif vise à présenter les principaux personnages :

- les groupes de réflexion complexes bien engendrés ;
- le treillis des partitions non-croisées de type  $W$ , pour  $W$  un tel groupe ;
- le revêtement de Lyashko-Looijenga associé à  $W$  ;
- les factorisations par blocs d'un élément de Coxeter de  $W$ .

La première partie introduit le treillis des partitions non-croisées de type  $W$ , un objet combinatoire très riche, qui étend la notion de partitions non-croisées d'un  $n$ -gone. Les parties 0.2, 0.3 et 0.4 donnent un aperçu des aspects combinatoires, algébriques, et géométriques de cet objet et des autres structures étudiées. On y expose l'état de l'art et le contexte historique dans lequel s'inscrit ce travail.

Dans la partie 0.5 on présente les principaux résultats de la thèse.

## 0.1 Le treillis des partitions non-croisées

### 0.1.1 Partitions non-croisées classiques

Soit  $n$  un entier non nul. Considérons  $n$  points du plan, disposés sur les sommets d'un  $n$ -gone régulier, et étiquetés  $1, \dots, n$  dans le sens des aiguilles d'une montre. Étant donnée une partition de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$ , on peut tracer dans le polygone les enveloppes convexes des parts de la partition. On dit que celle-ci est *non-croisée* si ces enveloppes convexes ne s'intersectent pas deux à deux (dans le cas contraire, elle est dite *croisée*).

Si l'on préfère une définition combinatoire, on a la caractérisation suivante : une partition de  $\{1, \dots, n\}$  est non-croisée si et seulement si pour  $1 \leq i < j < k < l \leq n$ , si  $i$  et  $k$  sont dans la même part  $P$ , alors  $j$  et  $l$  sont soit dans des parts distinctes, soit tous deux dans la part  $P$  également.

L'ensemble des partitions non-croisées d'un  $n$ -gone (que l'on notera  $NCP_n$ ) est un ensemble partiellement ordonné, par l'ordre de raffinement des partitions ( $\alpha \leq \beta$  si  $\alpha$  est une partition plus fine que  $\beta$ ). C'est de plus un treillis pour cet ordre, c'est-à-dire qu'il existe des inf et des sup (cf. définition 0.5).

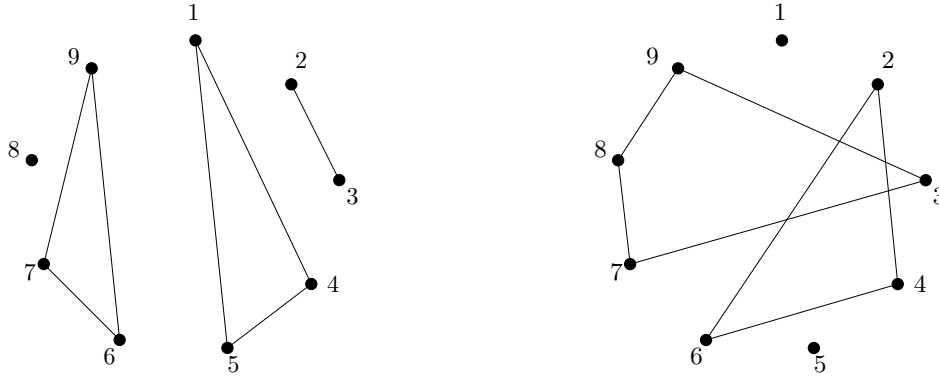


FIG. 1: La partition  $P_1 = \{\{1, 4, 5\}, \{2, 3\}, \{6, 7, 9\}, \{8\}\}$  est non-croisée ; la partition  $P_2 = \{\{1\}, \{2, 4, 6\}, \{5\}, \{3, 7, 8, 9\}\}$  est croisée.

Le treillis  $\text{NCP}_n$  est l'un des nombreux objets combinatoires comptés par le nombre de Catalan :

$$|\text{NCP}_n| = \text{Cat}(n) = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} .$$

La première étude détaillée des partitions non-croisées date de 1972, par Kreweras [Kre72] (pour plus de détails sur l'historique du problème, on renvoie à Stanley [Sta99, pp. 261–262] et Armstrong [Arm09, p. 5]). Le treillis est devenu depuis un objet classique en combinatoire algébrique (cf. l'article de synthèse de Simion [Sim00]).

Plus récemment, l'intérêt pour les partitions non-croisées s'est diversifié. Elles sont étudiées en lien avec la théorie des probabilités libres de Voiculescu (voir les synthèses de Speicher [Spe97] et Biane [Bia02]), et dans de nouveaux problèmes combinatoires (voir par exemple les fonctions parkings [Sta97b]). Surtout, elles interviennent dans de nombreuses situations algébriques (théorie des groupes, théorie des représentations) sur lesquelles nous reviendrons plus loin dans cette introduction. On renvoie à l'article [McC06] de McCammond pour un tour d'horizon des diverses incarnations des partitions non-croisées découvertes ces dernières années.

Depuis la fin des années 90, la structure combinatoire a été généralisée dans le contexte des groupes de réflexion finis (réels, puis complexes), le cas du  $n$ -gone correspondant au type  $W(A_{n-1})$ , *i.e.* au groupe de permutations  $\mathfrak{S}_n$ . Pour expliquer cette généralisation, commençons par donner une autre interprétation des partitions non-croisées.

A chaque partition  $P$  (croisée ou non) d'un  $n$ -gone, on peut associer une permutation  $\sigma$  de  $\mathfrak{S}_n$ , qui est le produit des cycles donnés par chaque part de  $P$ , ses éléments étant pris dans le sens des aiguilles d'une montre : voir les diagrammes de la figure 2.

On peut alors montrer que les partitions non-croisées correspondent exactement aux permutations qui se situent sur une géodésique entre la permutation identité et le  $n$ -cycle  $c = (1\ 2\ \dots\ n)$  dans le graphe de Cayley de  $(\mathfrak{S}_n, T)$ , où  $T$  est l'ensemble de toutes les transpositions de  $\mathfrak{S}_n$ . Ainsi, l'ensemble des partitions non-croisées est en bijection avec l'ensemble des permutations  $\sigma$  de  $\mathfrak{S}_n$  telles que

$$\ell_T(\sigma) + \ell_T(\sigma^{-1}c) = \ell_T(c) ,$$

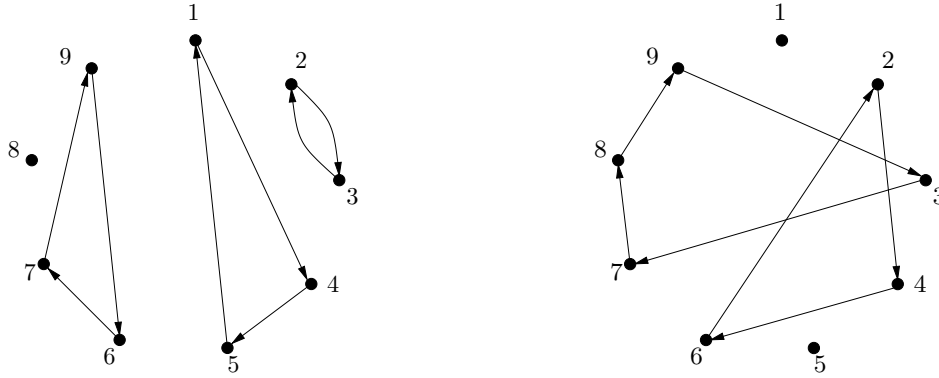


FIG. 2: Les permutations  $\sigma_1 = (1\ 4\ 5)(2\ 3)(6\ 7\ 9)$  et  $\sigma_2 = (2\ 4\ 6)(3\ 7\ 8\ 9)$ , correspondant aux partitions  $P_1$  et  $P_2$  de la figure 1.

où  $\ell_T(\sigma)$  désigne le nombre minimal de transpositions nécessaires pour écrire  $\sigma$  (on a  $\ell_T(\sigma) = n - \#\{\text{cycles de } \sigma\}$ ). Sous cette forme, en voyant le groupe  $\mathfrak{S}_n$  comme un groupe de Coxeter de type  $A$ , on peut généraliser la notion de partitions non-croisées à tous les groupes de Coxeter finis (et à certains groupes de réflexion complexes).

### 0.1.2 Généralisation aux groupes de réflexion

Dans la suite, sauf mention explicite du contraire, tous les groupes de réflexion seront supposés *finis*.

#### Groupes de Coxeter finis

Soit un groupe de réflexion réel fini  $W$ , c'est-à-dire un sous-groupe fini de  $GL(V)$  (où  $V$  est un espace vectoriel réel), engendré par des réflexions. La théorie de Coxeter permet d'étudier ce type de groupe de manière combinatoire, en fixant un ensemble de générateurs particuliers, noté  $S$ , tel que  $(W, S)$  ait une présentation très remarquable. On renvoie aux livres [Kan01], [Hum90], ou [Bou68] pour plus de détails sur les groupes de Coxeter et les groupes de réflexion finis.

Pour construire les partitions non-croisées de type  $W$ , on munit au contraire  $W$  d'une autre partie génératrice, notée  $\mathcal{R}$ , et constituée de *toutes* les réflexions de  $W$ . Dans le cas d'un groupe de type  $A$ , on retrouve l'ensemble de toutes les transpositions, noté  $T$  dans le paragraphe précédent<sup>1</sup>.

**Définition 0.1.** On note  $\ell_{\mathcal{R}}(w)$  la longueur d'un élément  $w$  de  $W$  en tant que mot sur l'alphabet  $\mathcal{R}$ , *i.e.*

$$\ell_{\mathcal{R}}(w) = \min\{p \in \mathbb{N} \mid \exists r_1, \dots, r_p \in \mathcal{R}, w = r_1 \dots r_p\}.$$

Si  $r_1 \dots r_p = w$ , avec  $p = \ell_{\mathcal{R}}(w)$ , on dit que  $(r_1, \dots, r_p)$  est une décomposition réduite de  $w$ . On définit un ordre partiel  $\preceq_{\mathcal{R}}$  sur  $W$ , en disant que  $u$  « divise »  $v$  si et seulement si  $u$  peut

1. L'ensemble de toutes les réflexions de  $W$  est d'ailleurs par extension noté  $T$  par plusieurs auteurs (cf. [Bes03] ou [Arm09]) ; on préfère ici la notation  $\mathcal{R}$  pour « réflexions ».

s'écrire en préfixe d'une décomposition réduite de  $v$ , *i.e.* :

$$u \preceq_{\mathcal{R}} v \text{ si et seulement si } \ell_{\mathcal{R}}(u) + \ell_{\mathcal{R}}(u^{-1}v) = \ell_{\mathcal{R}}(v) .$$

On notera simplement  $\ell$  et  $\preceq$ , plutôt que  $\ell_{\mathcal{R}}$  et  $\preceq_{\mathcal{R}}$ , s'il n'y a pas d'ambiguïté ; l'ordre  $\preceq$  est parfois appelé ordre absolu sur  $W$  (et  $\ell$  longueur absolue)<sup>2</sup>.

**Remarque 0.2.** Le diagramme de Hasse pour cet ordre partiel est donné par le graphe de Cayley de  $(W, \mathcal{R})$  (en effet, si  $w \in W$  et  $r \in \mathcal{R}$ , on a nécessairement  $\ell_{\mathcal{R}}(rw) = \ell_{\mathcal{R}}(w) \pm 1$ , car les réflexions ont pour déterminant  $-1$ ).

Le rôle du  $n$ -cycle dans le type  $A$  va être joué ici par un *élément de Coxeter* de  $W$ , c'est-à-dire un produit (dans n'importe quel ordre) de toutes les réflexions par rapport aux murs d'une chambre donnée de l'arrangement d'hyperplans de  $W$  (cf. par exemple [Kan01, 29.1]). L'ensemble des éléments de Coxeter de  $W$  forme une classe de conjugaison constituée d'éléments de longueur  $\ell_{\mathcal{R}}$  maximale dans  $W$  (en type  $A$  — mais pas dans le cas général — on obtient tous les éléments de longueur maximale, *i.e.* les cycles maximaux). Fixons un élément de Coxeter  $c$ . On définit ainsi l'ensemble des partitions non-croisées de type  $W$  :

$$\text{NCP}_W(c) = \{w \in W \mid w \preceq c\} .$$

Soient  $c$  et  $c'$  deux éléments de Coxeter. Comme la longueur  $\ell_{\mathcal{R}}$  est invariante par conjugaison, et que  $c$  et  $c'$  sont conjugués,  $\text{NCP}_W(c)$  et  $\text{NCP}_W(c')$  sont isomorphes en tant qu'ensembles ordonnés. Du coup, tant qu'on peut travailler à isomorphisme près, on notera simplement  $\text{NCP}_W$ .

On peut montrer (et ce n'est pas évident, voir paragraphe 0.3.1), que, comme pour le type  $A$ , l'ensemble partiellement ordonné  $(\text{NCP}_W, \preceq)$  est un treillis.

## Groupes de réflexion complexes

Dans [Bes07a], motivé par des questions géométriques sur les groupes de tresses généralisés (cf. partie 0.2), Bessis montre que la définition de  $\text{NCP}_W$  peut s'étendre au cas où  $W$  est un groupe de réflexion complexe bien engendré. Rappelons quelques définitions (plus de détails sont donnés au paragraphe 0.2.2).

Si  $V$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$ , une *réflexion*<sup>3</sup> est un élément  $r$  de  $\text{GL}(V)$ , d'ordre fini, et tel que  $\text{Ker}(r - 1)$  soit un hyperplan de  $V$ . Son unique valeur propre distincte de 1 est donc une racine de l'unité, qui n'est pas nécessairement  $-1$  comme dans le cas réel.

Un *groupe de réflexion complexe* (fini) est un sous-groupe fini de  $\text{GL}(V)$  engendré par des réflexions. Tout groupe de réflexion réel fini peut bien sûr se voir comme un groupe complexe, en complexifiant l'espace vectoriel sur lequel il agit. Cependant, on obtient avec cette définition de nombreux nouveaux groupes de réflexion non-réels (et ce même dans le cas où toutes les réflexions du groupe sont d'ordre 2). La théorie de Coxeter ne s'applique pas à ces groupes. Mais comme les définitions de l'ordre  $\preceq$  et de la longueur  $\ell$  vues plus haut sont relatives à

2. Il ne doit pas être confondu avec l'ordre plus classique  $\preceq_S$  sur les groupes de Coxeter, défini par la longueur  $\ell_S$  relative à un système de réflexions fondamentales, ou encore avec l'ordre de Bruhat.

3. Certains auteurs utilisent le terme *pseudo-réflexion* ; on préfère ici utiliser simplement *réflexion* quand le cadre est un espace vectoriel complexe.

l'ensemble  $\mathcal{R}$  de toutes les réflexions de  $W$ , on peut les étendre telles quelles aux groupes de réflexion complexes. On construit ainsi, comme dans le cas réel, un ensemble partiellement ordonné  $(W, \preceq)$ , dont la structure provient de la longueur de réflexion  $\ell$ .

Notons que la situation est plus subtile que dans le cas réel : comme les réflexions ne sont pas forcément de déterminant  $-1$ , on peut théoriquement avoir  $\ell_{\mathcal{R}}(wr) = \ell_{\mathcal{R}}(w)$  pour  $w \in W$  et  $r \in \mathcal{R}$  (et ceci se produit effectivement dans certains cas) ; la remarque 0.2 sur le lien entre le diagramme de Hasse de  $\preceq$  et le graphe de Cayley de  $(W, \mathcal{R})$  n'est donc plus valide. On verra cependant que, si l'on se restreint aux diviseurs d'un élément de Coxeter, ce problème ne se pose plus.

Si  $W$  est un groupe de réflexion complexe qui agit de façon essentielle<sup>4</sup> sur l'espace  $V$  de dimension  $n$ , on dit que  $W$  est *bien engendré* s'il peut être engendré par  $n$  réflexions (c'est le cas pour tous les groupes réels, mais pas pour tous les groupes complexes). Si  $W$  est bien engendré, il existe une généralisation naturelle de la notion d'élément de Coxeter (voir la définition 1.6 du chapitre 1). On peut ainsi donner la définition générale de l'ensemble des partitions non-croisées de type  $W$ .

**Définition 0.3.** Soit  $W$  un groupe de réflexion complexe bien engendré, et  $c$  un élément de Coxeter de  $W$ . On note  $\preceq$  l'ordre sur  $W$  défini par la  $\mathcal{R}$ -longueur (cf. Déf. 0.1). Le treillis des partitions non-croisées de type  $W$  est l'intervalle  $[1, c]$  pour l'ordre  $\preceq$  :

$$\text{NCP}_W(c) = \{w \in W \mid w \preceq c\} .$$

Il s'avère que la structure combinatoire de cet ensemble est alors très similaire au cas réel ; en particulier  $\text{NCP}_W$  est encore un treillis. Au paragraphe 0.2.2 on donnera une interprétation algébrique de ce treillis.

### Historique et références

Le treillis des partitions non-croisées de type  $W$  est un objet à la combinatoire très riche, et également très utile pour comprendre la structure et la géométrie des groupes de réflexion ; on développe ces questions en 0.2 et 0.3. Cette généralisation est apparue à la fin des années 90, de façon indépendante dans différents domaines mathématiques.

Travaillant en combinatoire algébrique, Reiner introduit des partitions non-croisées de types  $B$  et  $D$  dans [Rei97]. Du côté de la théorie des groupes, la construction du monoïde de Birman-Ko-Lee dans [BKL98] suscite deux axes de recherche indépendants donnant une définition algébrique de  $\text{NCP}_W$  : voir d'une part Bessis-Digne-Michel [BDM02] (suivi de l'article [Bes03]), d'autre part Brady-Watt [Bra01, BW02b, BW02a]. Toujours dans la même période, des problèmes en théorie des probabilités libres motivent également la construction de certaines généralisations (Biane-Goodman-Nica [BGN03]).

En janvier 2005 une rencontre est organisée à l'American Institute of Mathematics, rassemblant pour la première fois tous les chercheurs de domaines divers travaillant sur ce même objet : il en résulte une longue liste de problèmes ouverts (cf. [Arm05]).

Pour plus de détails historiques, on renvoie au chapitre 4.1. dans [Arm09]. Ici on va s'intéresser tout particulièrement aux motivations algébriques liées aux groupes de réflexion et monoïdes de tresses.

---

4. c'est-à-dire que  $V^W = \{0\}$  : en tant que  $W$ -module,  $V$  n'a pas de composante irréductible triviale.

## 0.2 Motivations algébriques

### 0.2.1 Groupes de tresses

Soit  $W \subseteq \mathrm{GL}(V)$  un groupe de réflexion complexe, et  $\mathcal{R}$  l'ensemble de toutes ses réflexions. On définit l'arrangement d'hyperplans de  $W$  :

$$\mathcal{A} := \{ \mathrm{Ker}(r - 1) \mid r \in \mathcal{R} \},$$

et l'espace des points réguliers :

$$V^{\mathrm{reg}} := V - \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H.$$

Le groupe  $W$  agit naturellement<sup>5</sup> sur  $V^{\mathrm{reg}}$ , et on définit :

$$B(W) := \pi_1(W \setminus V^{\mathrm{reg}}),$$

le groupe de tresses de  $W$ . Pour  $W = \mathfrak{S}_n$  (*i.e.* le groupe de Coxeter  $W(A_{n-1})$ ), on retrouve le groupe de tresses usuel à  $n$  brins.

Dans le cas où  $W$  est un groupe réel (complexifié), la théorie de Coxeter permet de comprendre la structure de  $B(W)$ . Si l'on choisit une chambre  $C$  de l'arrangement réel (*i.e.* une composante connexe de l'espace des points réguliers *réels*), alors l'ensemble  $S \subseteq \mathcal{R}$  formé des réflexions par rapport aux murs de  $C$  engendre  $W$ , et l'on a une *présentation de Coxeter* :

$$W \simeq \langle S \mid \forall s \in S, s^2 = 1; \forall s, t \in S (s \neq t), \underbrace{sts \dots}_{m_{s,t}} = \underbrace{tst \dots}_{m_{s,t}} \rangle_{\text{groupe}}, \quad (1)$$

où  $m_{s,t}$  est l'ordre du produit  $st$ . D'après un théorème de Brieskorn ([Bri71]), le groupe de tresses  $B(W)$  est isomorphe au groupe d'Artin-Tits de  $W$ , défini par la présentation suivante<sup>6</sup> :

$$A(W, S) := \langle S \mid \forall s, t \in S (s \neq t), \underbrace{sts \dots}_{m_{s,t}} = \underbrace{tst \dots}_{m_{s,t}} \rangle_{\text{groupe}}. \quad (2)$$

Deligne et Brieskorn-Saito, dans les deux articles fondateurs [Del72, BS72], ont étudié la structure de  $B(W)$ , notamment en construisant une forme normale dans  $A(W, S)$  (y résolvant ainsi le problème des mots), et en établissant que le *monoïde d'Artin-Tits*  $A_+(W, S)$  (défini par la présentation (2), mais en tant que monoïde) se plonge dans son groupe des fractions  $A(W, S)$ .

Cette méthode n'offre par contre aucune prise sur les groupes de réflexion complexes, puisqu'alors la théorie de Coxeter ne s'applique pas (on n'a plus de domaine fondamental naturel comme dans la géométrie réelle). Ce n'est qu'au début des années 2000 qu'a été contruit un substitut pour le monoïde d'Artin-Tits qui, lui, peut se généraliser.

5. On considèrera qu'il s'agit d'une action à gauche, et on notera les quotients à gauche.

6. dans laquelle l'ensemble des générateurs est plus exactement une copie formelle de  $S$ .

### 0.2.2 Groupes de réflexion complexes et monoïde de tresses dual

Lorsqu'on passe des groupes de Weyl finis (groupes de réflexion définis sur  $\mathbb{Q}$ ) aux groupes de Coxeter finis (définis sur  $\mathbb{R}$ ), peu de nouveaux exemples se présentent (dans la classification des groupes irréductibles, ce sont les types  $H_3$ ,  $H_4$ , et les groupes diédraux). Par contre, si l'on autorise les groupes de réflexion à être définis sur  $\mathbb{C}$ , la situation change drastiquement. La classification des groupes de réflexion complexes irréductibles a été établie en 1954 par Shephard-Todd ([ST54] ; voir aussi Cohen [Coh76]) ; elle contient :

- une série infinie à 3 paramètres :  $G(de, e, r)$  est le groupe des matrices monomiales<sup>7</sup> de  $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ , dont les coefficients non nuls sont dans  $\mu_{de}$ , avec un produit dans  $\mu_d$  (où  $\mu_n$  désigne l'ensemble des racines  $n$ -ièmes de l'unité). On y retrouve les séries infinies réelles :  $G(1, 1, n) \simeq W(A_{n-1})$ ,  $G(2, 1, n) \simeq W(B_n)$ ,  $G(2, 2, n) \simeq W(D_n)$ ,  $G(e, e, 2) \simeq W(I_2(e))$ .
- 34 groupes exceptionnels (numérotés historiquement  $G_4, \dots, G_{37}$ ), de petit rang : 19 sont de rang 2, et le rang maximal est 8 (atteint pour  $G_{37}$  qui n'est autre que le groupe  $W(E_8)$ ).

Contrairement au cas réel, cette classification n'apparaît pas comme la solution d'un problème combinatoire simple. Elle a été obtenue par des méthodes *ad hoc*, et reste encore aujourd'hui assez mal comprise. En particulier, on ne peut pas toujours trouver un système générateur minimal de réflexions qui soit « naturel », et trouver des présentations satisfaisantes pour ces groupes est un problème difficile (voir les travaux de Broué-Malle-Rouquier [BMR95, BMR98], où sont construits des diagrammes « à la Coxeter » pour les groupes complexes). Encore aujourd'hui, on ne dispose pas d'une vision globale satisfaisante sur ces groupes, et de nombreuses propriétés importantes sont démontrées au cas par cas (comme des coïncidences constatées sur tous les groupes de la classification), et non comprises en profondeur. Les travaux de cette thèse visent d'ailleurs à améliorer la compréhension conceptuelle de certaines de ces propriétés empiriques.

L'étude des groupes de réflexion complexes connaît depuis une quinzaine d'années un regain d'intérêt, motivé par de nouvelles questions en théorie des représentations. De la même façon que les groupes de Weyl sont les « squelettes » de la théorie de Lie, il semblerait en effet qu'on puisse construire des structures algébriques (appelées *Spetses*) associées aux groupes de réflexion complexes (travaux de Broué, Malle, Michel, Rouquier, présentés dans [Bro01]).

Pour une présentation exhaustive de la théorie des groupes de réflexion complexes, on renvoie au récent livre de Lehrer-Taylor [LT09].

En 1998, Birman-Ko-Lee [BKL98] donnent une nouvelle présentation pour le groupe de tresses usuel, qui est réinterprétée par Bessis-Digne-Michel [BDM02] dans le langage alors tout récent des *monoïdes de Garside* (voir partie suivante). Ceci est le point de départ de la construction dans [Bes03] d'un nouveau monoïde de tresses pour tous les groupes de Coxeter finis (voir aussi [BW02a]) : le *monoïde de tresses dual*. Celui-ci vérifie des propriétés structurelles analogues à celles du monoïde d'Artin-Tits (c'est un monoïde de Garside), mais il a l'avantage de ne pas utiliser la structure de Coxeter du groupe : il est en effet construit à partir de la paire  $(W, \mathcal{R})$ , où  $\mathcal{R}$  est l'ensemble de *toutes* les réflexions. Cela permet de définir également pour certains groupes de réflexion non réels (ceux qui sont bien engendrés), cf. [Bes07a].

---

7. Un seul coefficient non nul sur chaque ligne, ainsi que sur chaque colonne ; autrement dit, une matrice monomiale est le produit d'une matrice diagonale inversible et d'une matrice de permutation.

Pour une présentation synthétique du monoïde dual et de ses applications, on renvoie à l'introduction de [Bes07b]. Donnons ici simplement sa définition. Celle-ci s'inspire d'une présentation alternative du monoïde d'Artin-Tits (établie par Tits) :

$$A_+(W, S) \simeq \langle W \mid w.w' = ww' \text{ (produit dans } W) \text{ si } \ell_S(w) + \ell_S(w') = \ell_S(ww') \rangle_{\text{monoïde}}, \quad (3)$$

où  $\ell_S$  désigne la longueur relativement à l'ensemble  $S$  des réflexions fondamentales (définition analogue à Déf. 0.1). On définit alors le monoïde dual de tresses par :

$$M(W, c) := \langle \text{NCP}_W(c) \mid w.w' = ww' \text{ (produit dans } W) \text{ si } \ell_{\mathcal{R}}(w) + \ell_{\mathcal{R}}(w') = \ell_{\mathcal{R}}(ww') \rangle_{\text{monoïde}}, \quad (4)$$

où  $c$  est un élément de Coxeter et où  $\text{NCP}_W(c)$ , qui sert ici de système générateur, est l'ensemble des diviseurs de  $c$  pour l'ordre  $\preceq_{\mathcal{R}}$  (Déf. 0.3). On montre que le monoïde dual se plonge dans son groupe des fractions, qui est  $B(W)$ , mais qu'il n'est pas (dans le cas réel) isomorphe au monoïde d'Artin-Tits.

### 0.2.3 Structures de Garside

Le monoïde d'Artin-Tits et le monoïde dual sont deux exemples de *monoïdes de Garside*. Cette notion a été introduite à la fin des années 90 par Dehornoy et Paris [Deh02, DP99], dans le but d'axiomatiser les propriétés essentielles de  $A_+(W, S)$ , de sorte que les méthodes de preuve et les résultats de Deligne et Brieskorn-Saito s'appliquent dans un cadre plus général.

Il n'est pas utile de donner ici la définition précise d'un monoïde de Garside<sup>8</sup> — d'autant que celle-ci n'est pas tout à fait stabilisée —, mais signalons qu'un axiome fondamental est une propriété de treillis pour un système générateur du monoïde. Les générateurs de la présentation (3) de  $A_+(W, S)$  constituent l'ensemble ordonné  $(W, \preceq_S)$  (où  $\preceq_S$  est l'ordre de divisibilité associé à  $S$ ), dont on peut montrer géométriquement qu'il est un treillis. Pour le cas du monoïde dual (présentation (4)), il faut introduire un élément de Coxeter (l'ensemble  $(W, \preceq_{\mathcal{R}})$  entier n'est en général pas un treillis). Le système générateur est alors précisément  $\text{NCP}_W(c)$ , et on comprend l'importance algébrique de la propriété de treillis pour l'ensemble des partitions non-croisées de type  $W$  (voir paragraphe 0.3.1).

La construction du monoïde de tresses dual pour les groupes non réels a donc des applications importantes, puisqu'elle permet d'adapter les preuves de Deligne et Brieskorn-Saito et de démontrer des propriétés fondamentales de  $W$  et  $B(W)$  (problème des mots, problème de conjugaison...) dans des cas nouveaux. Une application importante est la démonstration de la propriété  $K(\pi, 1)$  pour les arrangements d'hyperplans des groupes de réflexion complexes [Bes07a].

**Remarque 0.4.** On ne traite dans cette thèse que de groupes de réflexion finis. Cependant, des monoïdes duaux ont également été construits pour les groupes d'Artin-Tits de type non sphérique : [CP03, Dig06, Bes06a, BCKM].

La théorie de Garside continue par ailleurs de se développer, et de nombreuses généralisations de structures de Garside ont été définies ces dernières années (groupoïdes, catégories) : voir par exemple [Bes06b], [Kra08], et l'article de synthèse [McC05].

---

8. Le nom donné à cette structure provient du premier cas historique, celui du monoïde de tresses classique de type  $A$ , étudié par Garside dans [Gar69].



### 0.3 Combinatoire de Coxeter-Fuss-Catalan

Fixons un groupe de réflexion complexe bien engendré  $W$ . L'ensemble ordonné  $\text{NCP}_W$  possède une combinatoire particulièrement riche, explorée depuis quelques années (au moins lorsque  $W$  est réel). Suivant une terminologie d'Armstrong, on pourra parler de *combinatoire de Coxeter-Fuss-Catalan*, car des généralisations des nombres de Fuss-Catalan interviennent.

On donne dans cette partie quelques exemples (non exhaustifs) des problèmes posés par cette combinatoire. Pour un exposé plus complet, et pour d'autres références, on pourra se reporter à la thèse d'Armstrong [Arm09], en particulier les chapitres 1 et 5.

#### 0.3.1 Propriété de treillis

Il est temps de rappeler la définition d'un treillis.

**Définition 0.5.** Soit  $(E, \leq)$  un ensemble partiellement ordonné. On dit que  $E$  est un treillis si :

- (i)  $E$  est borné :  $\exists a, b \in E, \forall x \in E, a \leq x \leq b$  ;
- (ii) pour tout  $x, y \in E$ ,  $x$  et  $y$  admettent un infimum  $x \wedge y$  ;
- (iii) pour tout  $x, y \in E$ ,  $x$  et  $y$  admettent un supremum  $x \vee y$ .

Lorsque  $E$  est fini, deux quelconques de ces propriétés entraînent la troisième.

Comme expliqué au paragraphe 0.2.3, la propriété de treillis pour  $\text{NCP}_W$  est essentielle pour montrer que le monoïde dual de tresses de  $W$  est un monoïde de Garside.

Pour l'ensemble  $\text{NCP}_n$  des partitions non-croisées d'un  $n$ -gone, on vérifie aisément (i) et (ii).

Par contre, dans le cas général, une méthode de preuve uniforme est difficile à trouver. Historiquement, la démonstration a dans un premier temps été faite au cas par cas, avant que Brady-Watt [BW08] donnent une preuve générale — mais seulement dans le cas où  $W$  est réel —, en construisant un complexe simplicial dont les simplexes représentent les éléments de  $\text{NCP}_W$  (pour un exposé détaillé, voir le mémoire [Rip06]). Depuis, d'autres démonstrations uniformes indépendantes, mais toujours dans le cas réel, ont été publiées (Ingalls-Thomas [IT08], Reading [Rea09]).

Dans le cas où  $W$  n'est pas réel, aucune démonstration sans cas par cas n'a été obtenue à l'heure actuelle. Les méthodes citées ci-dessus ne se généralisent pas facilement au cas complexe, car elles reposent de façon essentielle sur la théorie de Coxeter.

#### 0.3.2 Sur la terminologie « non-croisées »

Historiquement, l'ensemble  $\text{NCP}_W$  est une généralisation algébrique des partitions non-croisées d'un  $n$ -gone. On peut se demander s'il est possible de voir effectivement les éléments de  $\text{NCP}_W$  comme certains objets combinatoires sans croisement, ou plus généralement s'il existe une façon naturelle de représenter géométriquement les éléments de cette structure. C'est le cas pour les types  $B$  et  $D$  (Athanasiadis-Reiner [AR04]) et  $G(e, e, r)$  (Bessis-Corran [BC06]).

Un cas plus général (pour les séries réelles infinies et pour certains groupes exceptionnels) est traité par les récents travaux de Reading [Rea10], qui donne des représentations graphiques des sous-groupes non-croisés en utilisant le plan de Coxeter.

### 0.3.3 Nombres de Catalan associés

Le calcul du cardinal de  $\text{NCP}_W$  fait intervenir des généralisations des nombres de Catalan, s'exprimant à partir des degrés invariants de  $W$ . Rappelons la définition de ces degrés.

Soit  $W \subseteq \text{GL}(V)$  un groupe de réflexion (complexe ou réel) de rang  $n$  ; il agit naturellement sur l'algèbre symétrique  $S(V^*) \simeq \mathbb{C}[v_1, \dots, v_n]$  (où  $v_1, \dots, v_n$  est une base de  $V$ ). En vertu du théorème de Chevalley-Shephard-Todd, l'algèbre des invariants  $S(V^*)^W$  est une algèbre de polynômes ; de plus, elle admet un système de  $n$  générateurs homogènes  $f_1, \dots, f_n$ , et leurs degrés  $d_1 \leq \dots \leq d_n$  ne dépendent pas du choix des invariants  $f_i$ . Ce sont les *degrés invariants* de  $W$  ; le degré maximal  $d_n$  est appelé nombre de Coxeter (noté  $h$ ), et est aussi l'ordre d'un élément de Coxeter.

Ces degrés invariants interviennent dans la combinatoire du treillis  $\text{NCP}_W$ , avec des formules souvent étonnamment simples. Ainsi, pour tout groupe de réflexion complexe irréductible bien engendré  $W$ , on a l'égalité suivante :

$$|\text{NCP}_W| = \prod_{i=1}^n \frac{d_i + h}{d_i} . \quad (5)$$

Aussi simple soit-elle, cette formule n'a jusqu'ici pas été démontrée de manière uniforme : elle a simplement été vérifiée pour chaque groupe irréductible de la classification. Le seul progrès vers une meilleure explication est une formule de récurrence établie par Reading dans [Rea08] (valable dans le cas réel), et qui permet de vérifier l'égalité au cas par cas de façon simple.

Par extension du cas du type  $A$  (où  $|\text{NCP}_n|$  est le  $n$ -ième nombre de Catalan  $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ ), le membre de droite de l'égalité (5) est appelé *nombre de Catalan de type  $W$* , et noté  $\text{Cat}(W)$ .

Ce nombre apparaît dans de nombreux autres contextes. Dans le contexte des algèbres amassées (« cluster algebras »), introduites par Fomin-Zelevinsky dans [FZ03], il compte le nombre de sommets dans l'associaèdre généralisé de type  $W$ , pour  $W$  réel (voir Fomin-Reading [FR05]). Quand  $W$  est un groupe de Weyl, le nombre  $\text{Cat}(W)$  intervient aussi dans la combinatoire des « partitions non-emboîtées » (“nonnested partitions”), dans celle des antichaînes de racines, de l'arrangement de Shi étendu, des triangles de Chapoton [Ath04, Ath05, Ath98, Cha05, Cha06]... De nombreuses questions se posent en lien avec ces objets combinatoires, car l'on a souvent seulement une énumération au cas par cas, qui, de façon mystérieuse, donne  $\text{Cat}(W)$ , et très peu de preuves uniformes ou de bijections explicites entre les différents objets comptés par le même nombre.

La formule (5) n'est cependant qu'un cas particulier de la formule de Chapoton sur le nombre de chaînes dans  $\text{NCP}_W$ .

### 0.3.4 Nombres de chaînes, formule de Chapoton

**Définition 0.6.** Pour  $k \in \mathbb{N}$ , le  $k$ -ième *nombre de Fuss-Catalan de type  $W$*  est défini par la formule suivante :

$$\text{Cat}^{(k)}(W) := \prod_{i=1}^n \frac{d_i + kh}{d_i}$$

**Théorème 0.7** (Formule de Chapoton). *Soit  $W$  un groupe de réflexion complexe irréductible bien engendré. Alors le nombre de  $k$ -chaînes  $w_1 \preceq \dots w_k \preceq c$  dans  $\text{NCP}_W(c)$  est égal à  $\text{Cat}^{(k)}(W)$ .*

Cette formule apparaît pour la première fois (dans le cas  $W$  réel) dans l'article de Chapoton [Cha05]; mais elle se vérifie au cas par cas en utilisant de nombreux travaux (Edelman, Athanasiadis, Reiner, Bessis...). On renvoie à [Arm09, 3.5] pour les détails historiques.

La plupart des remarques de la partie précédente s'appliquent encore ici : les nombres de Fuss-Catalan de type  $W$  apparaissent dans d'autres contextes combinatoires, souvent sans qu'on en ait une explication satisfaisante.

La formule de Chapoton a pour conséquence deux formules « classiques » :

- (i)  $|\text{NCP}_W| = \prod \frac{d_i+h}{d_i}$ , comme décrit en 0.3.3;
- (ii)  $|\text{Red}_{\mathcal{R}}(c)| = n! h^n / |W|$ , où  $\text{Red}_{\mathcal{R}}(c)$  désigne l'ensemble des décompositions réduites de l'élément de Coxeter  $c$ .

Toutes deux avaient été observées avant la formule de Chapoton, également avec des preuves reposant sur la classification. Historiquement, la formule (ii) pour le cas réel a été conjecturée par Looijenga dans [Loo74], puis démontrée au cas par cas par Deligne [Del74]. A ma connaissance, aucune autre preuve n'est connue à ce jour.

La motivation initiale des travaux présentés ici était de progresser vers une explication conceptuelle de la formule de Chapoton. On verra qu'au-delà de cet enjeu qui pourrait sembler anecdotique, une compréhension profonde de cette formule exige d'élucider une structure algèbro-géométrico-combinatoire riche et subtile.

L'un des principaux résultats obtenus est le calcul du nombre de factorisations d'un élément de Coxeter (de longueur  $n$ ) en  $(n-1)$  blocs, où un seul facteur est de longueur 2, les autres étant des réflexions. La preuve est de nature géométrique, et ne demande pas de nouvelle analyse au cas par cas si l'on admet la formule (i) (cf. Remarque 0.16).

### 0.3.5 Raffinements divers

On peut munir l'ensemble des  $k$ -chaînes d'un ordre naturel, construit à partir de l'ordre produit sur  $(W, \preceq)$ . Il est alors appelé l'ensemble  $\text{NC}^{(k)}(W)$  des partitions non-croisées  $k$ -divisibles de type  $W$  — terminologie inspirée par le cas du type  $A$ , où  $\text{NC}^{(k)}(A_{n-1})$  est isomorphe à l'ensemble des partitions de  $\text{NCP}_{kn}$  dont toutes les parts sont de cardinal multiple de  $k$ . Sa combinatoire très riche fait l'objet des chapitres 3 et 4 de [Arm09]. En particulier, on peut obtenir des formules encore plus fines, où le rang du premier terme de la chaîne est spécifié (nombres de Fuss-Narayana).

Signalons un autre raffinement de ces nombres, à base de  $q$ -analogues : ainsi, Stump étudie dans [Stu10] des  $q, t$ -nombres de Fuss-Catalan, qui sont en rapport avec l'algèbre des coinvariants diagonaux (travaux de Gordon [Gor03], Gordon-Griffeth [GG09]).

Un autre problème combinatoire sur  $\text{NCP}_W$ , lié aux  $q$ -analogues, est le « phénomène de crible cyclique » (“cyclic sieving phenomenon” défini par Reiner-Stanton-White [RSW04]) : on renvoie aux travaux de Bessis-Reiner [BR09] et Krattenthaler-Müller [KM09].

### 0.3.6 Factorisations d'un élément de Coxeter

Si  $w_1 \preceq \cdots \preceq w_k$  est une chaîne de  $\text{NCP}_W$ , on peut construire une factorisation  $c = u_1 \dots u_{k+1}$  en posant  $u_i = w_{i-1}^{-1} w_i$  (avec  $w_0 = 1$  et  $w_{k+1} = c$ ) ; on a alors  $\ell(u_1) + \cdots + \ell(u_{k+1}) = \ell(c)$ . Inversement, à toute telle factorisation de  $c$  on peut associer une chaîne dans  $\text{NCP}_W$ . Ce type de factorisation est une extension naturelle de la notion de décompositions réduites de  $c$  ( $\text{Red}_{\mathcal{R}}(c)$ ).

Dans le chapitre 1 de cette thèse, on va construire géométriquement des factorisations de  $c$  (en passant par le groupe de tresses  $B(W)$ ), qui seront des factorisations strictes (aucun des facteurs n'est trivial). Mais il existe des formules de passage simples entre les factorisations strictes et les factorisations larges (ou entre les chaînes strictes et les chaînes larges) : dans l'annexe B on détaille ces relations.

La formule de Chapoton permet donc de calculer le nombre de factorisations d'un élément de Coxeter en un nombre donné de facteurs. La combinatoire de telles factorisations (qui, dans le cas du groupe symétrique, est déjà très riche) offre de nombreux problèmes intéressants (cf. les « nombres de décompositions » de Krattenthaler-Müller [KM10]).

## 0.4 Géométrie du discriminant

La plupart des travaux en combinatoire sur le treillis  $\text{NCP}_W$  concernent le cas des groupes réels. Très souvent, les méthodes utilisées reposent sur la théorie de Coxeter (par exemple sur l'existence d'un diagramme de Coxeter qui admet un 2-coloriage, ce qui permet de choisir un élément de Coxeter bien adapté), et ne sont donc pas transposables aux groupes non réels.

En fait, la notion même d'élément de Coxeter dans un groupe de réflexion complexe  $W$  (non réel) n'a pas encore de définition combinatoire satisfaisante. C'est plutôt une notion de nature géométrique (s'appliquant aux valeurs propres et vecteurs propres de l'élément, cf. Déf. 1.6), contrairement au cas où  $W$  est un groupe de Coxeter.

Pour ces raisons, si l'on veut comprendre de manière globale la structure combinatoire de  $\text{NCP}_W$  pour l'ensemble des groupes de réflexion complexes bien engendrés, on est amené à tenter une approche géométrique.

C'est l'approche qui a été menée dans ce travail de thèse.

### 0.4.1 Le revêtement de Lyashko-Looijenga

Le point de départ est l'utilisation d'un revêtement, construit à partir de la géométrie de l'hypersurface  $\mathcal{H}$  associée au discriminant de  $W$ . Le *revêtement de Lyashko-Looijenga* (LL) est introduit par Bessis dans [Bes07a], généralisant une définition de Looijenga et Lyashko (cf. partie 1.3). Décrivons grossièrement sa construction. On part de l'espace quotient  $W \backslash V$ , dont les fonctions coordonnées sont les invariants  $f_1, \dots, f_n$ . On considère l'hypersurface  $\mathcal{H}$ , image de l'union des hyperplans par la surjection  $V \twoheadrightarrow W \backslash V$ . Le revêtement LL permet d'étudier cette hypersurface via les fibres de la projection  $(f_1, \dots, f_n) \mapsto (f_1, \dots, f_{n-1})$ . Il associe à chaque  $(n-1)$ -uplet  $(f_1, \dots, f_{n-1})$  le multi-ensemble des intersections (avec multiplicités) de sa fibre avec  $\mathcal{H}$ .

Le point de départ des travaux de [Bes07a] est l'observation que le degré du revêtement LL est égal au nombre de décompositions réduites d'un élément de Coxeter. La relation entre la géométrie de LL et les factorisations d'un élément de Coxeter dont on a parlé plus haut

va en fait beaucoup plus loin : en quelque sorte, ces factorisations encodent naturellement les fibres de LL. Les travaux de cette thèse découlent d'un raffinement de ces observations.

### 0.4.2 Travaux de Saito

Signalons que ces questions sur la géométrie du discriminant sont liées aux travaux de Kyoji Saito sur la structure de variété de Frobenius ("flat structure") de  $W \setminus V$  [Sai93, Sai04b, Sai04a, Sai05]. Même si ceux-ci concernent les groupes réels, beaucoup de propriétés peuvent s'étendre sans difficultés aux groupes complexes bien engendrés.

## 0.5 Principaux résultats de la thèse

Comme on l'a dit plus haut, les travaux présentés ici étaient initialement motivés par la recherche d'une explication conceptuelle de la formule de Chapoton. Le point de départ a été l'utilisation des résultats récents de Bessis [Bes07a] : ses constructions topologiques (les « tunnels ») permettent en effet de caractériser les fibres du revêtement LL à l'aide de certaines factorisations d'un élément de Coxeter  $c$ . La combinatoire de ces factorisations est à son tour liée aux nombres de chaînes dans  $NCP_W$  : on explique ces relations dans l'annexe B.

### 0.5.1 Morphisme de Lyashko-Looijenga, factorisations primitives, action d'Hurwitz

Soit  $W$  un groupe de réflexion complexe bien engendré, irréductible, de rang  $n$ . Notons  $\Delta_W$  le discriminant de  $W$  (cf. paragraphe 1.3.1) ; c'est un polynôme invariant, donc dans  $\mathbb{C}[f_1, \dots, f_n]$  (où  $f_1, \dots, f_n$  est un système d'invariants fondamentaux de degrés  $d_1 \leq \dots \leq d_n$ ). On pose  $Y := \text{Spec } \mathbb{C}[f_1, \dots, f_{n-1}]$ , de sorte que le quotient  $W \setminus V$  s'identifie à  $Y \times \mathbb{C}$ . Le morphisme de Lyashko-Looijenga associe à  $y \in Y$  l'ensemble des points d'intersection (avec multiplicité) de la droite (complexe)  $\{(y, x) \mid x \in \mathbb{C}\}$  avec l'hypersurface  $\mathcal{H} = \{\Delta_W = 0\}$  ; autrement dit,  $\text{LL}(y)$  est le multi-ensemble des racines de  $\Delta_W(y, x)$  vu comme polynôme en  $x$  (cf. Déf. 1.18). Si l'on préfère le voir comme un morphisme algébrique explicite,  $\text{LL}$  envoie  $y$  sur les coefficients en  $x$  du polynôme  $\Delta_W(y, x)$ .

Dans le chapitre 1 (qui est une reproduction de l'article [Rip10]), on commence par raffiner les constructions de [Bes07a]. On définit, en passant par le groupe de tresses  $B(W)$ , une application

$$\underline{\text{fact}} : Y \rightarrow \text{FACT}(c) ,$$

où  $\text{FACT}(c)$  est l'ensemble des *factorisations par blocs* d'un élément de Coxeter  $c$  :

$$\text{FACT}(c) := \{(w_1, \dots, w_p) \in (W - \{1\})^p \mid w_1 \dots w_p = c, \text{ et } \ell(w_1) + \dots + \ell(w_p) = \ell(c)\} .$$

On obtient alors une reformulation d'un théorème fondamental de Bessis :

$$\begin{array}{ccc} \text{L'application} & Y & \xrightarrow{\text{LL} \times \underline{\text{fact}}} E_n \times_{\text{cp}(n)} \text{FACT}(c) \\ & y & \mapsto (\text{LL}(y) , \underline{\text{fact}}(y)) \end{array} \quad \text{est bijective}$$

(où  $E_n \times_{\text{cp}(n)} \text{FACT}(c)$  est un produit fibré au-dessus de l'ensemble des compositions — partitions ordonnées — de  $n$ ).

Les conséquences de ce théorème sont étudiées dans [Bes07a], mais essentiellement sur la partie non ramifiée  $Y'$  de  $Y$  (*i.e.* les  $y$  tels que le multi-ensemble  $\text{LL}(y)$  n'ait que des points simples) : la restriction à cette partie est un revêtement non ramifié. En particulier, le théorème implique que le degré de ce revêtement est égal au cardinal de l'ensemble  $\text{Red}_{\mathcal{R}}(c)$  des *décompositions réduites* de  $c$  (qui sont les factorisations par blocs en  $n$  réflexions). De plus, on peut construire deux actions du groupe de tresses usuel  $B_n$  :

- l'action de Galois (ou de monodromie) sur  $Y'$ , définie par le revêtement  $\text{LL}$  ;
- l'action d'Hurwitz sur  $\text{Red}_{\mathcal{R}}(c)$  (celle-ci conjugue les facteurs les uns avec les autres, cf. Déf. 1.2).

Via l'application  $\underline{\text{fact}}$ , ces deux actions sont compatibles.

Dans le chapitre 1, on se demande ce qu'il se passe lorsqu'on n'est plus sur la partie non ramifiée. On traite particulièrement le cas où le multi-ensemble  $\text{LL}(y)$  n'a qu'un seul point multiple (de multiplicité quelconque) ; c'est aussi le cas où  $\underline{\text{fact}}(y)$  contient un seul facteur de longueur quelconque, tous les autres étant des réflexions. On parle alors de *factorisation primitive* de  $c$ .

On montre que le morphisme  $\text{LL}$  peut être vu comme un « revêtement ramifié stratifié » (Thm. 1.28). Ensuite, on étudie les orbites des factorisations primitives sous l'action d'Hurwitz : le groupe  $B_k$  agit naturellement sur l'ensemble des factorisations de  $c$  en  $k$  blocs, en conjuguant les facteurs les uns avec les autres. Il était déjà connu que sur l'ensemble des décompositions réduites de  $c$ , l'action d'Hurwitz est transitive. Le résultat principal du chapitre est le suivant :

**Théorème 0.8** (Thm. 1.4). *Soit  $W$  un groupe de réflexion complexe fini, bien engendré. Soit  $c$  un élément de Coxeter de  $W$ , et  $F_u = (u, r_{p+1}, \dots, r_n)$ ,  $F_v = (v, r'_{p+1}, \dots, r'_n)$  deux factorisations primitives de  $c$  (où les  $r_i, r'_i$  sont des réflexions). Alors  $F_u$  et  $F_v$  sont dans la même orbite d'Hurwitz sous  $B_n$  si et seulement si  $u$  et  $v$  sont conjugués dans  $W$ .*

La démonstration nécessite l'étude de la connexité de certaines strates de l'hypersurface  $\mathcal{H}$  du discriminant.

Au passage, on approfondit la notion d'*élément de Coxeter parabolique* dans les groupes bien engendrés, en montrant que les propriétés classiques du cas réel s'étendent (Prop. 1.34 et 1.36) :

- un élément de Coxeter parabolique peut être défini soit comme un élément de Coxeter d'un sous-groupe parabolique, soit comme un diviseur (pour  $\preceq$ ) d'un élément de Coxeter de  $W$  ;
- le sous-groupe associé à un élément de Coxeter parabolique  $w$  est engendré par toute factorisation de  $w$ .

## 0.5.2 Extension d'anneaux de polynômes, Jacobiens, discriminants, groupes de réflexion virtuels

Dans le chapitre 2, on se place dans un cadre plus général, où l'on étudie des questions d'algèbre commutative. Celles-ci ont au départ été motivées par des constatations empiriques sur le morphisme de Lyashko-Looijenga. En effet, pour pouvoir obtenir des formules explicites sur la combinatoire des factorisations par blocs (voir partie suivante), j'ai eu besoin d'examiner les degrés homogènes des composantes irréductibles du lieu ramifié de  $\text{LL}$ . Ce lieu ramifié est défini par le *discriminant de Lyashko-Looijenga* :

$$D_{\text{LL}} = \text{Disc}(\Delta_W(f_1, \dots, f_n) ; f_n) \quad (\text{polynôme de } \mathbb{C}[f_1, \dots, f_{n-1}]).$$

Or, en calculant dans quelques exemples le polynôme  $D_{LL}$  ainsi que le Jacobien  $J_{LL}$  (détérminant de la matrice jacobienne de  $LL$ , en tant que morphisme algébrique), j'ai observé qu'ils avaient une forme remarquable :

$$D_{LL} = \prod Q^{e_Q} \quad ; \quad J_{LL} = \prod Q^{e_Q-1} ,$$

où les facteurs irréductibles  $Q$  sont les mêmes. J'ai cherché à établir ces formules en toute généralité.

Ces propriétés évoquent le couple discriminant-Jacobien  $(\Delta_W, J_W)$  issu de la théorie des invariants d'un groupe de réflexion complexe  $W$ , qui est de la forme

$$\Delta_W = \prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H^{e_H} \quad ; \quad J_W = \prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H^{e_H-1} .$$

Mais la démonstration de ces propriétés n'est pas du tout transposable au cas de  $LL$ , car elle repose sur l'utilisation de l'action du groupe  $W$ .

Une question naturelle est donc de comprendre dans quelle mesure ce type de situation est général. On se place dans ce chapitre le cadre d'une *extension polynomiale finie graduée* (cf. Déf. 2.4) :

$$A = \mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_n] \subseteq \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] = B ,$$

où les variables  $X_i, Y_j$  sont homogènes pondérées, et où  $B$  est fini sur  $A$  en tant qu'anneau. Ainsi, les résultats obtenus s'appliquent à la fois :

- à une extension galoisienne, de la forme  $\mathbb{C}[V]^W \subseteq \mathbb{C}[V]$  ; dans ce cas, d'après le théorème de Chevalley-Shephard-Todd,  $W$  est un groupe de réflexion complexe ;
- à l'extension définie par un morphisme de Lyashko-Looijenga.

Pour une telle extension, on commence par donner la factorisation en irréductibles du Jacobien, en fonction des idéaux ramifiés de l'extension et de leurs indices de ramification. Pour pouvoir définir un « discriminant » de l'extension, qui se comporte comme  $\Delta_W$  ou  $D_{LL}$  dans les cas précités, on introduit la notion d'*extension bien ramifiée*. C'est une notion plus faible que celle d'extension galoisienne, où pour chaque idéal premier  $\mathfrak{p}$  de hauteur 1 de  $A$ , les idéaux de  $B$  au-dessus de  $\mathfrak{p}$  sont soit tous ramifiés, soit tous non ramifiés (cf. Déf. 2.16). On peut donner de nombreuses caractérisations de cette propriété (Prop. 2.17).

Le résultat principal du chapitre 2 est le théorème suivant :

**Théorème 0.9** (Thm. 2.1). *Soit  $A \subseteq B$  une extension polynomiale finie graduée. Alors :*

- le Jacobien  $J_{B/A}$  de l'extension vérifie :

$$J = \prod_{Q \in \text{Spec}_1^{\text{ram}}(B)} Q^{e_Q-1} \quad (\text{à un scalaire multiplicatif près}),$$

où  $\text{Spec}_1^{\text{ram}}(B)$  désigne l'ensemble des polynômes ramifiés de  $B$  (à association près), et  $e_Q$  l'indice de ramification de  $Q$  ;

- si l'extension est bien ramifiée, alors :

$$(J) \cap A = \left( \prod_{Q \in \text{Spec}_1^{\text{ram}}(B)} Q^{e_Q} \right) \quad (\text{en tant qu'idéal de } A) .$$

Ainsi, dans le cas où l'extension est bien ramifiée, le polynôme  $\prod Q^{e_Q}$  peut être appelé « discriminant » de l'extension, par analogie avec la situation galoisienne, où il s'agit du discriminant du groupe de réflexion associé.

**Remarque 0.10.** Les résultats de ce chapitre sont des conséquences assez élémentaires de propriétés d'algèbre commutative, mais je n'ai pas trouvé de références satisfaisantes dans la littérature. Souvent, le point de vue est soit beaucoup trop général (algèbre commutative des extensions d'anneaux) soit trop spécifique (extensions galoisiennes). Ici, on se place dans un cadre intermédiaire, où les preuves utilisant une action de groupe (c'est-à-dire toute la théorie des invariants des groupes de réflexion) ne s'appliquent pas, et où les résultats généraux concernant les extensions d'anneaux se simplifient drastiquement.

**Remarque 0.11.** Le vocabulaire et les propriétés énoncés dans ce chapitre sont utilisés dans le cas des extensions de Lyashko-Looijenga dans le chapitre suivant. Cependant, dans une optique plus générale, la situation décrite semble prometteuse, car elle offre une généralisation intrigante de la théorie des invariants d'un groupe de réflexion. Même s'il n'y a pas d'action de groupe, on a ainsi un Jacobien et un discriminant, qui se comportent de la même manière que dans le cas galoisien. Une telle extension peut ainsi être appelée *groupe de réflexion virtuel*<sup>9</sup>; il serait intéressant de voir dans quelle mesure les analogies peuvent se poursuivre.

### 0.5.3 Le morphisme de Lyashko-Looijenga vu comme groupe de réflexion virtuel ; factorisations sous-maximales

Dans le chapitre 3, on applique les propriétés données au chapitre précédent, et on montre que les extensions de Lyashko-Looijenga sont bien ramifiées.

En utilisant les résultats du chapitre 1, on peut décrire les facteurs irréductibles du discriminant  $D_{LL} = \text{Disc}(\Delta_W(f_1, \dots, f_n) ; f_n)$  : il y en a un par classe de conjugaison de sous-groupes paraboliques de rang 2 de  $W$  (ou d'éléments de Coxeter paraboliques de longueur 2). On peut ainsi écrire

$$D_{LL} = \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_{\Lambda}^{r_{\Lambda}},$$

où  $\bar{\mathcal{L}}_2$  désigne l'ensemble des classes de conjugaison de paraboliques de rang 2.

On obtient le théorème suivant :

**Théorème 0.12** (Thm. 3.3). *Soit  $A \subseteq B$  l'extension associée au morphisme de Lyashko-Looijenga LL d'un groupe de réflexion complexe, bien engendré, irréductible. Pour  $\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2$ , soit  $w$  un élément de Coxeter parabolique de  $W$ , qui correspond à  $\Lambda$ .*

*Alors,  $r_{\Lambda}$  est le nombre de décompositions réduites de  $w$  en deux réflexions. De plus :*

- (a) *les polynômes ramifiés de l'extension sont les  $D_{\Lambda}$  ;*
- (b) *le Jacobien  $J_{LL}$  de l'extension est égal (à un scalaire près) à :*

$$\prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_{\Lambda}^{r_{\Lambda}-1} ;$$

- (c) *le polynôme  $D_{LL}$  engendre l'idéal  $(J_{LL}) \cap A$ .*

---

9. terminologie proposée par David Bessis.



**Remarque 0.13.** La formule (b) pour le Jacobien avait déjà été observée (dans le cas  $W$  réel) par K. Saito (formule 2.2.3 dans [Sai04a]); mais sa démonstration était au cas par cas. Ici on donne une preuve géométrique générale, qui repose sur les liens entre LL et l'application fact.

D'autre part, en raffinant des propriétés du chapitre 1, on parvient à calculer le nombre de factorisations sous-maximales d'un élément de Coxeter de type  $\Lambda$  — *i.e.* , constituées de  $(n - 2)$  réflexions et un facteur de longueur 2, ce dernier étant dans la classe de conjugaison  $\Lambda$  :

**Théorème 0.14** (Thm. 3.6). *Soit  $\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2$ , et  $c$  un élément de Coxeter de  $W$ . Alors le nombre de factorisations sous-maximales de  $c$  de type  $\Lambda$  est :*

$$|\text{FACT}_{n-1}^\Lambda(c)| = \frac{(n-1)! h^{n-1}}{|W|} \deg D_\Lambda .$$

Ce théorème fait donc le lien entre la combinatoire des factorisations par blocs d'un élément de Coxeter, et la géométrie de  $W \setminus V$  : les  $\deg D_\Lambda$  sont en fait les degrés des projetés sur  $\text{Spec } \mathbb{C}[f_1, \dots, f_{n-1}]$  des orbites de plats de codimension 2 de  $V$ .

Dans l'annexe A, on calcule explicitement les valeurs associées à cette formule pour tous les groupes irréductibles bien engendrés. On retrouve ainsi des formules de [KM10] pour les cas réels ; dans les autres cas, les résultats sont nouveaux.

Les deux théorèmes précédents permettent de calculer le nombre total de factorisations sous-maximales :

**Théorème 0.15** (3.11). *Soit  $W$  un groupe de réflexion complexe, bien engendré, irréductible, et  $d_1 \leq \dots \leq d_n = h$  ses degrés invariants. Alors, le nombre de factorisations d'un élément de Coxeter en  $(n - 1)$  blocs est :*

$$|\text{FACT}_{n-1}(c)| = \frac{(n-1)! h^{n-1}}{|W|} \left( \frac{(n-1)(n-2)}{2} h + \sum_{i=1}^{n-1} d_i \right) .$$

**Remarque 0.16.** Cette égalité est en réalité une conséquence logique de la formule de Chapoton. En effet, comme expliqué au paragraphe 0.3.6, on peut passer des nombres de chaînes aux nombres de factorisations par blocs (voir Annexe B).

Cependant, on en donne ici une preuve directe, alors que la formule de Chapoton n'est connue qu'au cas par cas. En fait, dans toute la thèse (exceptée l'annexe A sur les calculs explicites de discriminant), on n'utilise jamais la classification des groupes de réflexion. On se repose tout de même sur des propriétés pour lesquelles il n'y a pas encore de démonstrations générales (en particulier les premières propriétés de LL données dans [Bes07a]) ; mais, au final, on parvient ici à passer, à l'aide d'une preuve géométrique sans cas par cas, de la connaissance de  $|\text{Red}_{\mathcal{R}}(c)|$  à celle de  $|\text{FACT}_{n-1}(c)|$ .



## Chapitre 1

# Orbites d'Hurwitz des factorisations primitives d'un élément de Coxeter<sup>1</sup>

RÉSUMÉ. On considère l'action d'Hurwitz du groupe de tresses usuel sur les factorisations d'un élément de Coxeter  $c$  d'un groupe de réflexions complexe bien engendré  $W$ . Il est bien connu que l'action d'Hurwitz est transitive sur l'ensemble des décompositions réduites de  $c$  en réflexions. On démontre ici une propriété similaire pour les factorisations primitives de  $c$ , *i.e.* celles dont tous les facteurs sauf un sont des réflexions. Cette étude est motivée par la recherche d'une explication géométrique de la formule de Chapoton sur le nombre de chaînes de longueur donnée dans le treillis des partitions non croisées  $NCP_W$ . La démonstration présentée repose sur les propriétés du revêtement de Lyashko-Looijenga et sur la géométrie du discriminant de  $W$ .

**Mots-clés :** action d'Hurwitz, groupe de réflexions complexe, élément de Coxeter, treillis des partitions non croisées, revêtement de Lyashko-Looijenga.

ABSTRACT. We study the Hurwitz action of the classical braid group on factorisations of a Coxeter element  $c$  in a well-generated complex reflection group  $W$ . It is well known that the Hurwitz action is transitive on the set of reduced decompositions of  $c$  in reflections. Our main result is a similar property for the primitive factorisations of  $c$ , *i.e.* factorisations with only one factor which is not a reflection. The motivation is the search for a geometric proof of Chapoton's formula for the number of chains of given length in the non-crossing partitions lattice  $NCP_W$ . Our proof uses the properties of the Lyashko-Looijenga covering and the geometry of the discriminant of  $W$ .

**Keywords:** Hurwitz action, complex reflection group, Coxeter element, non-crossing partitions lattice, Lyashko-Looijenga covering.

---

1. Ce chapitre reproduit intégralement le texte d'un article publié dans *Journal of Algebra*, **323** (5), mars 2010.

## Introduction

Soit  $V$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie, et  $W \subseteq \mathrm{GL}(V)$  un groupe de réflexions complexe fini bien engendré (définition en partie 1.1.1). On note  $\mathcal{R}$  l'ensemble de toutes les réflexions de  $W$ . On définit la longueur d'un élément  $w$  de  $W$  :

$$\ell(w) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid \exists r_1, \dots, r_k \in \mathcal{R}, w = r_1 \dots r_k\}.$$

On note  $\mathrm{Red}(w)$  l'ensemble des décompositions réduites de  $w$ , *i.e.* des mots de longueur  $\ell(w)$  représentant  $w$ . Ce sont donc des factorisations minimales de  $w$  en réflexions. Plus généralement, on peut définir des *factorisations par blocs* de  $w$  :

**Définition 1.1.** Soit  $w \in W$ , de longueur  $n \geq 1$ . Soit  $1 \leq p \leq n$ . Une *factorisation en  $p$  blocs* de  $w$  est un  $p$ -uplet  $(u_1, \dots, u_p)$  d'éléments de  $W - \{1\}$  tels que  $w = u_1 \dots u_p$ , avec  $\ell(w) = \ell(u_1) + \dots + \ell(u_p)$ . On note  $\mathrm{FACT}_p(w)$  l'ensemble de ces factorisations.

Si  $w$  est de longueur  $n$ , on a donc  $\mathrm{FACT}_n(w) = \mathrm{Red}(w)$ .

Ci-dessous on définit l'action d'Hurwitz du groupe de tresses  $B_p$  sur les factorisations en  $p$  blocs d'un élément de  $W$ . Une factorisation est dite *primitive* lorsqu'elle ne comporte qu'un seul facteur qui n'est pas une réflexion (définition 1.3). Dans cet article on détermine les orbites sous l'action d'Hurwitz des factorisations primitives d'un élément de Coxeter de  $W$  (définition 1.6).

## Action d'Hurwitz

Considérons un groupe  $G$ , et un entier  $n \geq 1$ . On fait agir le groupe de tresses à  $n$  brins, noté  $B_n$ , sur le produit cartésien  $G^n$  :

**Définition 1.2** (Action d'Hurwitz). Soient  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$  les générateurs standards de  $B_n$ . L'action d'Hurwitz (à droite) de  $B_n$  sur  $G^n$  est définie par :

$$(g_1, \dots, g_n) \cdot \sigma_i := (g_1, \dots, g_{i-1}, g_{i+1}, g_{i+1}^{-1} g_i g_{i+1}, g_{i+2}, \dots, g_n)$$

pour tout  $(g_1, \dots, g_n) \in G^n$  et tout  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ .

On vérifie aisément que cette définition donne bien une action du groupe de tresses. Cela vient essentiellement du fait que la conjugaison fait partie de la classe des opérations auto-distributives :  $f * (g * h) = (f * g) * (f * h)$  (ici  $f * g = f^{-1} g f$ ). L'intérêt de ces opérations a été décrit par Brieskorn (ensembles automorphes [Bri88]) et plus récemment par Dehornoy (LD-systèmes [Deh00]).

## Factorisations primitives

L'action d'Hurwitz préserve les fibres de l'application produit  $(g_1, \dots, g_n) \mapsto g_1 \dots g_n$ . Ainsi, si l'on revient au cadre décrit plus haut, où  $W$  est un groupe de réflexions complexe muni de sa partie génératrice naturelle  $\mathcal{R}$ , on obtient une action d'Hurwitz du groupe de tresses  $B_p$  sur l'ensemble des factorisations en  $p$  blocs de  $w$  (définition 1.1), pour tout  $w \in W$  et  $1 \leq p \leq \ell(w)$ .

Considérons  $(u_1, \dots, u_p) \in \text{FACT}_p(w)$ . Le  $p$ -uplet  $(\ell(u_1), \dots, \ell(u_p))$  définit donc une composition (*i.e.* une partition ordonnée) de l'entier  $n = \ell(w)$ . Si  $\mu$  est une composition de  $n$  en  $p$  termes, on note  $\text{FACT}_\mu(w)$  l'ensemble des factorisations dont les longueurs des facteurs forment la composition  $\mu$ .

Si l'on fait agir  $B_p$  sur un élément de  $\text{FACT}_\mu(w)$ , la composition de  $n$  associée peut être modifiée, mais pas la partition de  $n$  (non ordonnée) sous-jacente. En effet, l'ensemble  $\mathcal{R}$  des réflexions étant invariant par conjugaison, la longueur  $\ell$  est également invariante par conjugaison.

On dit qu'une factorisation en  $p$  blocs est de forme  $\lambda$ , pour  $\lambda$  partition de  $n$  (notation :  $\lambda \vdash n$ ), si le  $p$ -uplet non ordonné des longueurs des facteurs constitue la partition  $\lambda$ . On note  $\text{FACT}_\lambda(w)$  l'ensemble des factorisations de forme  $\lambda$ . Ainsi, l'action d'Hurwitz de  $B_p$  sur  $\text{FACT}_p(w)$  stabilise les ensembles  $\text{FACT}_\lambda(w)$ , pour  $\lambda \vdash n$  et  $\#\lambda = p$  ( $\#\lambda$  désignant le nombre de parts de la partition  $\lambda$ ).

Pour  $\lambda \vdash n$ , on note classiquement  $\lambda = k_1^{p_1} \dots k_r^{p_r}$  (où  $k_1 > \dots > k_r \geq 1$  et  $p_i \geq 1$ ), si la partition est constituée de  $p_1$  fois l'entier  $k_1$ ,  $\dots$ ,  $p_r$  fois l'entier  $k_r$ .

**Définition 1.3.** Une *factorisation primitive* de  $w$  est une factorisation par blocs de  $w$ , de forme  $k^1 1^{n-k} \vdash n$ , pour  $k \geq 2$  : tous les blocs sauf un doivent être des réflexions. L'unique facteur de longueur strictement supérieure à 1 est appelé *facteur long* de la factorisation primitive.

On étudie ici les factorisations d'un *élément de Coxeter*, au sens de [Bes07a] (voir définition 1.6). Dans le cas réel, on retrouve la notion classique d'élément de Coxeter. Dans la suite de l'introduction, on précisera l'intérêt fondamental des éléments de Coxeter dans certaines constructions algébriques relatives à un groupe de réflexions complexe bien engendré.

Considérons un élément de Coxeter  $c$  de  $W$ , et notons  $n$  sa longueur. Le cas le plus élémentaire des factorisations de forme  $1^n \vdash n$ , *i.e.* des décompositions réduites de  $c$ , est connu : on sait que l'action d'Hurwitz sur  $\text{Red}(c) = \text{FACT}_{1^n}(c)$  est transitive. Dans un premier temps cette propriété a été prouvée pour les groupes réels ([Del74], puis [Bes03, Prop. 1.6.1]), avec une preuve générale, puis vérifiée au cas par cas pour le reste des groupes complexes [Bes07a, Prop. 7.5].

Le cas que nous traitons ici peut se voir comme l'étape suivante, c'est-à-dire la détermination des orbites d'Hurwitz des factorisations primitives de  $c$ . Le résultat principal de cet article est le suivant :

**Théorème 1.4** (Orbites d'Hurwitz primitives). *Soit  $W$  un groupe de réflexions complexe fini, bien engendré. Soit  $c$  un élément de Coxeter de  $W$ . Alors, deux factorisations primitives de  $c$  sont dans la même orbite d'Hurwitz si et seulement si leurs facteurs longs sont conjugués.*

L'idée de la preuve est d'utiliser certaines constructions de Bessis [Bes07a] pour obtenir les factorisations de  $c$  à partir de la géométrie du discriminant de  $W$  dans l'espace-quotient  $W \backslash V$  (qui s'identifie à  $\mathbb{C}^n$  si on a choisi des invariants fondamentaux  $f_1, \dots, f_n$ ). On interprète ensuite l'action d'Hurwitz en termes géométriques.

Dans une première partie on rappelle les définitions classiques et les propriétés de l'ordre de divisibilité dans le treillis des partitions non croisées généralisées, noté  $\text{NCP}_W(c)$ . La partie 1.2 présente une notion de forte conjugaison pour les éléments de  $\text{NCP}_W(c)$ , qui permet de formuler une version plus forte du théorème principal 1.4.

Par la suite, on considère l'hypersurface  $\mathcal{H}$  de  $\mathbb{C}^n$ , d'équation le discriminant de  $W$ , qui admet une stratification naturelle (par les orbites de plats). On projette cette hypersurface

sur  $\mathbb{C}^{n-1}$  (en oubliant la coordonnée correspondant à l'invariant de plus haut degré  $f_n$ ), et on en déduit une stratification du lieu de bifurcation  $\mathcal{K}$  de  $\mathcal{H}$ . En partie 1.3 on rappelle les propriétés du revêtement de Lyashko-Looijenga LL, puis dans la partie suivante on modifie légèrement les constructions de [Bes07a], en définissant une application `fact` qui produit des factorisations associées à la géométrie de  $\mathcal{H}$ . Dans la partie 1.5, on démontre des propriétés plus fines du morphisme LL, qui apparaît alors comme un revêtement ramifié « stratifié ». On en déduit que l'ensemble des orbites d'Hurwitz des factorisations primitives est en bijection avec l'ensemble des composantes connexes par arcs de certains ouverts des strates de  $\mathcal{K}$ . La démonstration du théorème revient ainsi à un problème de connexité dans  $\mathcal{K}$  (traité en parties 1.6 et 1.7), et est achevée en partie 1.8 par l'étude du cas particulier des réflexions.

Dans la partie 1.6, on détaille les propriétés de la stratification de  $\mathcal{H}$ . À cette occasion, des conséquences remarquables de certaines propriétés énoncées dans [Bes07a] sont exposées, en particulier concernant les sous-groupes paraboliques de  $W$ , leurs classes de conjugaison et leurs éléments de Coxeter.

La suite de cette introduction présente les motivations du problème.

## Treillis des partitions non croisées, monoïde de tresses dual

Fixons un élément de Coxeter  $c$  dans  $W$ . On note  $\preceq$  l'ordre partiel sur  $W$  associé à la  $R$ -longueur  $\ell$  (voir définition 1.7) :

$$u \preceq v \text{ si et seulement si } \ell(u) + \ell(u^{-1}v) = \ell(v).$$

On considère l'ensemble des diviseurs de  $c$  :  $\text{NCP}_W(c) := \{w \in W \mid w \preceq c\}$  (la notation NCP signifie « non-crossing partitions », cf. interprétation ci-dessous).

L'ensemble partiellement ordonné  $(\text{NCP}_W(c), \preceq)$  permet de construire les générateurs (appelés les *simples*) du *monoïde de tresses dual* de  $W$  (cf. [BKL98] pour le type  $A$ , [Bes03] et [BW02a] pour les groupes réels, puis [Bes07a] pour le cas général).

L'étude de la combinatoire de  $\text{NCP}_W(c)$  est au départ motivée par les conséquences sur les propriétés algébriques du monoïde dual. Ainsi, une des propriétés remarquables de  $\text{NCP}_W(c)$  est qu'il forme un treillis pour l'ordre  $\preceq$  : preuve générale dans le cas réel par Brady et Watt [BW08] (voir aussi [IT08]), le reste au cas par cas, cf. [Bes07a, Lemme 8.9]. C'est essentiellement cette propriété de treillis qui donne au monoïde de tresses dual sa structure de monoïde de Garside (comme défini dans [Deh02]).

Mais la richesse de la structure combinatoire de  $\text{NCP}_W(c)$  en a fait plus récemment un objet d'étude en soi (voir par exemple [Arm09]). Dans le cas du groupe  $W(A_{n-1})$ , ce treillis correspond à l'ensemble des partitions non croisées d'un  $n$ -gone, et est à la base de la construction du monoïde de Birman-Ko-Lee [BKL98, BDM02]. Pour les groupes de type  $G(e, e, r)$ , on peut également interpréter l'ensemble des diviseurs de  $c$  comme certains types de partitions non croisées [BC06]. Par extension, l'ensemble  $\text{NCP}_W(c)$  des diviseurs d'un élément de Coxeter dans un groupe bien engendré est appelé le *treillis des partitions non croisées généralisées* (d'où la notation NCP).

## Formule de Chapoton pour les chaînes de $\text{NCP}_W(c)$ et factorisations de $c$

Si  $W$  n'est pas irréductible et s'écrit  $W_1 \times W_2$ , alors le treillis  $\text{NCP}_W(c)$  est le produit des treillis  $\text{NCP}_{W_1}(c_1)$  et  $\text{NCP}_{W_2}(c_2)$  (où  $c_i$  désigne la composante de  $c$  sur  $W_i$ ), muni de l'ordre produit. Dans cette partie on supposera que  $W$  est irréductible.

Notons  $d_1 \leq \dots \leq d_n = h$  les degrés invariants de  $W$ . Une formule, énoncée initialement par Chapoton, exprime le nombre de chaînes de longueur donnée dans le treillis  $\text{NCP}_W(c)$  en fonction de ces degrés. Notons  $Z_W$  le polynôme *Zêta* de  $\text{NCP}_W(c)$  : c'est la fonction sur  $\mathbb{N}$  telle que pour tout  $N$ ,  $Z_W(N)$  est le nombre de chaînes larges (ou multi-chaînes)  $w_1 \preceq \dots \preceq w_{N-1}$  dans  $(\text{NCP}_W(c), \preceq)$  (de façon générale  $Z_W$  est toujours un polynôme : voir par exemple Stanley [Sta97a, Chap. 3.11]).

**Proposition 1.5.** *Soit  $W$  un groupe de réflexions complexe bien engendré, irréductible. Alors, avec les notations ci-dessus, on a :*

$$Z_W(N) = \prod_{i=1}^n \frac{d_i + (N-1)h}{d_i}.$$

Dans le cas des groupes réels, cette formule a été observée par Chapoton [Cha05, Prop. 9], utilisant des calculs de Reiner et Athanasiadis [Rei97, AR04]. La généralisation aux groupes complexes est énoncée par Bessis [Bes07a, Prop. 13.1] et utilise des résultats de Bessis et Corran [BC06]. La preuve est au cas par cas : méthodes *ad hoc* pour les séries infinies, et logiciel GAP pour les types exceptionnels. Pour le cas réel, une démonstration plus directe (utilisant une formule de récurrence générale qui permet de faire la vérification au cas par cas plus simplement) a été récemment publiée par Reading [Rea08]. L'apparente simplicité de la formule de Chapoton motive toujours la recherche d'une explication complètement générale.

En posant  $N = 2$  dans l'expression de  $Z_W(N)$  on obtient naturellement le cardinal de  $\text{NCP}_W(c)$  :

$$|\text{NCP}_W(c)| = \prod_{i=1}^n \frac{d_i + h}{d_i}.$$

Même pour cette formule, la seule preuve connue à l'heure actuelle est au cas par cas. L'entier  $|\text{NCP}_W(c)|$ , parfois noté  $\text{Cat}(W)$ , est appelé *nombre de Catalan de type  $W$*  : pour  $W = A_{n-1}$  on obtient en effet le nombre de Catalan classique  $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ .

Les factorisations de  $c$  sont bien évidemment reliées aux chaînes de  $\text{NCP}_W(c)$ . Partant d'une chaîne  $w_1 \preceq \dots \preceq w_p \preceq c$ , on peut obtenir une factorisation par blocs  $c = u_1 \dots u_{p+1}$  en posant  $u_1 = w_1$ ,  $u_i = w_{i-1}^{-1} w_i$  pour  $2 \leq i \leq p$ , et  $u_{p+1} = w_p^{-1} c$ . Inversement, à partir d'une telle factorisation de  $c$  on peut obtenir une chaîne de  $\text{NCP}_W(c)$ . Ainsi, dénombrer les chaînes dans  $\text{NCP}_W(c)$  revient à compter le nombre de *factorisations par blocs* de  $c$  de tailles fixées.

Toutefois, on a choisi ici de travailler sur des factorisations « strictes » (pas de facteurs triviaux), alors que la formule de Chapoton concerne les chaînes larges. Ce choix est motivé par le fait que ce sont des factorisations strictes qui apparaissent géométriquement via l'application « *fact* » (construite en partie 1.4). Les nombres de factorisations strictes et les nombres de chaînes larges sont alors liés par la formule suivante (on utilise les formules de passage entre nombres de chaînes strictes et nombres de chaînes larges, données par exemple dans [Sta97a, Chap. 3.11]) :

$$Z_W(N) = \sum_{k \geq 1} |\text{FACT}_k(c)| \binom{N}{k}.$$

Une piste pour une démonstration générale de la formule de Chapoton est donc l'étude de la combinatoire des factorisations par blocs.

## Remerciements.

Je tiens à remercier vivement David Bessis pour ses conseils et son aide sur de nombreux points de cet article. Merci également à Emmanuel Lepage dont une remarque judicieuse a permis de simplifier la partie 1.7.2.

## 1.1 Ordre de divisibilité dans $NCP_W$

### 1.1.1 Éléments de Coxeter

Soit  $V$  un espace vectoriel complexe de dimension  $n \geq 1$ , et  $W \subseteq GL(V)$  un groupe de réflexions complexe. On suppose que  $W$  est essentiel, *i.e.* que  $V^W = \{0\}$ . Dans ce cas, on dit que  $W$  est un groupe de réflexions *bien engendré* si un ensemble de  $n$  réflexions suffit à l'engendrer. Désormais on supposera toujours que  $W$  est un groupe de réflexions complexe bien engendré.

Soit  $\alpha$  une racine de l'unité. On dit qu'un élément de  $W$  est  $\alpha$ -régulier (au sens de Springer [Spr74]) s'il possède un vecteur propre régulier (*i.e.* n'appartenant à aucun des hyperplans de réflexions) pour la valeur propre  $\alpha$ . Si  $W$  est irréductible, notons  $d_1 \leq \dots \leq d_n$  les degrés invariants de  $W$ . On note  $h$  et on appelle *nombre de Coxeter* le plus grand degré  $d_n$ . D'après la théorie de Springer ([Spr74], résumé dans [Bes07a, Thm. 1.9]), il existe dans  $W$  des éléments  $e^{2i\pi/h}$ -réguliers. Dans ce cadre, en généralisant le cas réel, on pose la définition suivante.

**Définition 1.6.** Soit  $W$  un groupe de réflexions complexe fini bien engendré. Si  $W$  est irréductible, un *élément de Coxeter* de  $W$  est un élément  $e^{2i\pi/h}$ -régulier. Dans le cas général, on appelle *élément de Coxeter* un produit d'éléments de Coxeter des composantes irréductibles de  $W$ .

### 1.1.2 Ordre de divisibilité dans $W$

On définit ci-dessous l'ordre de divisibilité à gauche dans  $W$  (parfois appelé ordre absolu). Rappelons que pour  $w \in W$ ,  $\ell(w)$  désigne la longueur d'une décomposition réduite de  $w$  en réflexions de  $W$ .

**Définition 1.7.** Soient  $u, v \in W$ . On pose :

$$u \preceq v \text{ si et seulement si } \ell(u) + \ell(u^{-1}v) = \ell(v) .$$

La relation  $\preceq$  munit  $W$  d'une structure d'ensemble partiellement ordonné :  $u$  divise  $v$  si et seulement si  $u$  peut s'écrire comme un préfixe d'une décomposition réduite de  $v$ . Comme  $\mathcal{R}$  est invariant par conjugaison, on a aussi  $u \preceq v$  si et seulement si  $u$  est un suffixe (ou même un sous-facteur) d'une décomposition réduite de  $v$ . Ainsi, l'ordre  $\preceq$  coïncide avec l'ordre de divisibilité à droite dans  $W$ .

Considérons un élément de Coxeter  $c$  de  $W$ . On note  $NCP_W(c)$  l'ensemble des diviseurs de  $c$  dans  $W$ . D'après la théorie de Springer, tous les éléments de Coxeter de  $W$  sont conjugués.



D'autre part, l'ordre  $\preceq$  est invariant par conjugaison, donc si  $c' = aca^{-1}$ , alors  $NCP_W(c') = a NCP_W(c) a^{-1}$ . Ainsi, la structure de  $NCP_W(c)$  ne dépend pas du choix de l'élément de Coxeter  $c$ ; on notera souvent simplement  $NCP_W$ .

Dans  $NCP_W$ , la longueur correspond toujours à la codimension de l'espace des points fixes :

**Proposition 1.8.** *Soit  $w \in NCP_W$ . Alors :*

$$\ell(w) = \text{codim Ker}(w - 1).$$

**Remarque 1.9.** Cela revient à dire que pour les éléments de  $NCP_W$ , la longueur relativement à  $\mathcal{R}$  est la même que la longueur relativement à l'ensemble de toutes les réflexions du groupe unitaire  $U(V)$ . Dans le cas des groupes réels, cette propriété est vraie pour tout élément de  $W$  (cf. [Car72, Lemme 2.8], ou [BW02a, Prop. 2.2]).

*Démonstration :* On a toujours  $\ell(w) \geq \text{codim Ker}(w - 1)$ . En effet, si  $w = r_1 \dots r_k$  alors  $\text{Ker}(w - 1) \supseteq \bigcap_i \text{Ker}(r_i - 1)$ . Donc pour conclure il suffit de montrer que  $\ell(c) = n$  (considérer  $w$  et  $w^{-1}c$ ). L'inégalité  $\ell(c) \geq n$  est évidente car  $\text{Ker}(c - 1) = \{0\}$  d'après la théorie de Springer. On conclut en notant qu'on peut construire géométriquement des factorisations de  $c$  en  $n$  réflexions ([Bes07a, Lemme 7.2] ou partie 1.4 de cet article).  $\square$

### 1.1.3 Théorème de Brady-Watt

Une conséquence de la proposition 1.8 est que l'ordre  $\preceq$  dans  $NCP_W$  est la restriction de l'ordre partiel sur  $U(V)$  étudié par Brady et Watt dans [BW02b] :  $u \preceq v$  si et seulement si  $\text{Im}(u - 1) \oplus \text{Im}(u^{-1}v - 1) = \text{Im}(v)$ . On en déduit en particulier :

**Proposition 1.10.** *Soit  $w \in NCP_W$ . Si  $(r_1, \dots, r_p)$  est une décomposition réduite de  $w$ , alors  $\text{Ker}(w - 1) = \text{Ker}(r_1 - 1) \cap \dots \cap \text{Ker}(r_k - 1)$ .*

Les résultats de [BW02b] sont donnés dans le cadre de  $O(V)$  pour  $V$  espace euclidien, mais restent valables sans modifications dans  $U(V)$  avec  $V$  hermitien complexe. On pourra donc appliquer le théorème suivant :

**Théorème 1.11** (Brady-Watt). *Pour tout  $g \in U(V)$ , l'application*

$$\begin{aligned} (\{f \in U(V) \mid f \preceq g\}, \preceq) &\rightarrow (\{\text{s.e.v. de } V \text{ contenant } \text{Ker}(g - 1)\}, \supseteq) \\ f &\mapsto \text{Ker}(f - 1) \end{aligned}$$

*est un isomorphisme d'ensembles partiellement ordonnés.*

Par conséquent, l'application  $w \mapsto \text{Ker}(w - 1)$  est injective sur  $NCP_W$ .

## 1.2 Action d'Hurwitz sur les factorisations primitives et conjugaison forte dans $NCP_W$

Soit  $p \in \{1, \dots, n\}$ . Le groupe de tresses classique  $B_p$  agit par action d'Hurwitz sur l'ensemble  $\text{FACT}_p(c)$  des factorisations en  $p$  blocs de  $c$ , selon la définition 1.2. Dans le cas où  $p = n$ , l'action de  $B_n$  est transitive sur  $\text{FACT}_n(c) = \text{Red}(c)$ . Ce n'est pas vrai dans le cas général, puisque des invariants évidents apparaissent :

- la partition de  $n$  associée au  $p$ -uplet des longueurs des facteurs ;
- le multi-ensemble des classes de conjugaison des facteurs (car l'action d'Hurwitz conjugue les facteurs).

Plus précisément, l'action d'Hurwitz conjugue les facteurs par d'autres facteurs « dont les longueurs s'ajoutent ». Cela motive l'introduction d'une notion plus forte de conjugaison.

**Définition 1.12.** Pour  $w, w' \in \text{NCP}_W(c)$ , on définit la relation «  $w$  et  $w'$  sont fortement conjugués dans  $\text{NCP}_W(c)$  » (notée  $w \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} w'$ ) comme la clôture transitive et symétrique de la relation suivante :

$$w \stackrel{1}{\sim} w' \text{ s'il existe } x \in W \text{ tel que } xw = w'x, \text{ avec } xw \in \text{NCP}_W(c) \text{ et } \ell(xw) = \ell(x) + \ell(w).$$

**Remarque 1.13.** Bien sûr la relation  $\stackrel{1}{\sim}$  reflète l'incidence, sur un facteur, de l'action d'Hurwitz d'une tresse élémentaire  $\sigma_i$  sur une factorisation de  $c$ . Par transitivité, si une tresse  $\beta$  transforme une factorisation  $\xi$  en une factorisation  $\xi'$ , et envoie le numéro d'un facteur  $w$  de  $\xi$  sur celui d'un facteur  $w'$  de  $\xi'$ , alors  $w$  et  $w'$  sont fortement conjugués.

On voit facilement qu'on obtient la même relation d'équivalence si on impose que les conjugués  $x$  de la définition soient toujours des réflexions de  $\text{NCP}_W$ . En effet, si  $w$  et  $w'$  sont tels que  $w \stackrel{1}{\sim} w'$ , notons  $x$  un élément de  $W$  tel que  $xw = w'x \in \text{NCP}_W$ , avec  $\ell(xw) = \ell(x) + \ell(w)$ . Si l'on décompose  $x$  en produit minimal de réflexions ( $x = r_1 \dots r_k$ ), et si l'on note  $u \stackrel{\text{ref}}{\sim} v$  la relation «  $u$  est élémentairement conjugué à  $v$  par une réflexion », alors on a :  $w \stackrel{\text{ref}}{\sim} r_k w r_k^{-1} \stackrel{\text{ref}}{\sim} r_{k-1} r_k w r_k^{-1} r_{k-1}^{-1} \stackrel{\text{ref}}{\sim} \dots \stackrel{\text{ref}}{\sim} x w x^{-1} = w'$ . Cette remarque permet de faire le lien avec les orbites d'Hurwitz de *factorisations primitives* de  $c$ , où tous les facteurs sauf un sont des réflexions (cf. définition 1.3).

**Proposition 1.14.** Soient  $u, v \in \text{NCP}_W$ , de longueurs strictement supérieures à 1. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $u$  et  $v$  sont fortement conjugués dans  $\text{NCP}_W$  ;
- (ii) il existe  $\xi = (u, r_2, \dots, r_k)$  et  $\xi' = (v, r'_2, \dots, r'_k)$  deux factorisations primitives de  $c$ , avec  $u$  (resp.  $v$ ) facteur long de  $\xi$  (resp.  $\xi'$ ), telles que  $\xi$  et  $\xi'$  soient dans la même orbite d'Hurwitz sous  $B_k$ .

**Remarque 1.15.** Dans le cas des réflexions, on a une proposition similaire, mais il faut s'assurer que la (permutation associée à la) tresse qui transforme  $\xi$  en  $\xi'$  envoie le numéro de la position de  $u$  sur celui de la position de  $v$ .

*Démonstration :* (ii)  $\Rightarrow$  (i) est clair par définition, puisque, étant donnée l'invariance de la longueur par conjugaison,  $v$  est nécessairement obtenu à partir de  $u$  par forte conjugaison (cf. remarque 1.13). Pour le sens direct, montrons d'abord (ii) lorsque  $u$  et  $v$  sont tels que  $ur = rv \preceq c$ , avec  $r \in \mathcal{R}$  et  $\ell(ur) = \ell(u) + 1$ . Il suffit dans ce cas de prendre une factorisation quelconque de  $c$  qui commence par  $(u, r)$ , et de faire agir la tresse  $\sigma_1^2$ . On conclut par transitivité.  $\square$

Ainsi le théorème 1.4 se déduit du théorème suivant, qui donne également des propriétés supplémentaires de l'action d'Hurwitz sur  $\text{Red}(c)$  :

**Théorème 1.16.** Soit  $u, v \in \text{NCP}_W$ . Alors  $u$  et  $v$  sont fortement conjugués dans  $\text{NCP}_W$  si et seulement si  $u$  et  $v$  sont conjugués dans  $W$ .

On aura ainsi déterminé les orbites d'Hurwitz de factorisations primitives. Toutefois, cela ne suffit pas pour comprendre complètement l'action d'Hurwitz sur les factorisations de forme quelconque. En effet, pour toute factorisation, le multi-ensemble des classes de conjugaison forte des facteurs est naturellement invariant par l'action d'Hurwitz. Cependant, pour les factorisations non primitives, la condition n'est en général pas suffisante pour que deux factorisations soient dans la même orbite. Par exemple, dans le cas où  $p = 2$ , l'orbite d'Hurwitz de  $(u_1, u_2) \in \text{FACT}_2(c)$  est  $\{(u_1^{c^k}, u_2^{c^k}), (u_2^{c^{k+1}}, u_1^{c^k}), k \in \mathbb{Z}\}$  (où la notation  $u^v$  désigne le conjugué  $v^{-1}uv$ ). Donc dans le type  $A$ , cela revient à agir par rotation sur le diagramme des partitions non-croisées. On peut ainsi facilement trouver un contre-exemple dans  $\mathfrak{S}_6$ . Posons  $u_1 = (2\ 3)(1\ 5\ 6)$ ,  $u_2 = (1\ 3\ 4)$ , et  $v_1 = (3\ 4)(1\ 5\ 6)$ ,  $v_2 = (1\ 2\ 4)$  : alors les factorisations  $(u_1, u_2)$  et  $(v_1, v_2)$  de  $\text{FACT}_2((1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6))$  ne sont pas dans la même orbite d'Hurwitz sous  $B_2$ , alors que  $u_1$  et  $v_1$ , resp.  $u_2$  et  $v_2$ , sont conjugués. Le problème vient du fait que lorsqu'on fait agir  $B_p$  par action d'Hurwitz, les conjugateurs qui s'appliquent ne sont pas quelconques, mais doivent être des éléments qui sont aussi des facteurs (en particulier pas nécessairement des réflexions).

Désormais on supposera toujours que  $W$  est irréductible (et bien engendré). Si  $W$  n'est pas irréductible, le théorème 1.16 pour  $W$  se déduit du cas irréductible : on vérifie aisément qu'il suffit d'appliquer le résultat à chacune des composantes irréductibles de  $W$ .

### 1.3 Le morphisme de Lyashko-Looijenga

Dans cette partie on rappelle la construction du morphisme de Lyashko-Looijenga de [Bes07a, Part. 5], et on fixe des notations et conventions concernant l'espace de configuration de  $n$  points.

Le morphisme de Lyashko-Looijenga a été introduit par Lyashko en 1973 (selon Arnold [Arn74]) et indépendamment par Looijenga dans [Loo74] : voir [LZ04, Chap.5.1] et [LZ99] pour un historique détaillé. Bessis, dans [Bes07a], a généralisé la définition de LL à tous les groupes de réflexions complexes bien engendrés, le cas initial correspondant aux groupes de Weyl.

#### 1.3.1 Discriminant d'un groupe bien engendré

Soit  $W \subseteq \text{GL}(V)$  un groupe de réflexions complexe bien engendré, irréductible. Fixons une base  $v_1, \dots, v_n$  de  $V^*$ , et  $f_1, \dots, f_n$  dans  $S(V^*) = \mathbb{C}[v_1, \dots, v_n]$  un système d'invariants fondamentaux, polynômes homogènes de degrés uniquement déterminés  $d_1 \leq \dots \leq d_n = h$ , tels que  $\mathbb{C}[v_1, \dots, v_n]^W = \mathbb{C}[f_1, \dots, f_n]$  (théorème de Shephard-Todd-Chevalley). On a l'isomorphisme

$$\begin{aligned} W \backslash V &\xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^n \\ \bar{v} &\mapsto (f_1(v), \dots, f_n(v)). \end{aligned}$$

Notons  $\mathcal{A}$  l'ensemble des hyperplans de réflexions de  $W$ . L'équation de  $\bigcup_{H \in \mathcal{A}} H$  peut s'écrire comme un polynôme invariant, noté  $\Delta$ , le discriminant de  $W$  :

$$\Delta = \prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H^{e_H} \in \mathbb{C}[f_1, \dots, f_n],$$

où  $\alpha_H$  est une forme linéaire de noyau  $H$  et  $e_H$  est l'ordre du sous-groupe parabolique cyclique  $W_H$ .

Lorsque  $W$  est bien engendré, il existe un système d'invariants  $f_1, \dots, f_n$  tel que le discriminant  $\Delta$  de  $W$  s'écrive :

$$\Delta = f_n^n + a_2 f_n^{n-2} + \dots + a_n,$$

où les  $a_i$  sont des polynômes en  $f_1, \dots, f_{n-1}$  [Bes07a, Thm. 2.4]. La propriété fondamentale est que  $\Delta$  est un polynôme monique de degré  $n$  en  $f_n$  (le coefficient de  $f_n^{n-1}$  est rendu nul par simple translation de la variable  $f_n$ ).

On note :

$$\mathcal{H} := \{\bar{v} \in W \setminus V \mid \Delta(\bar{v}) = 0\} = p \left( \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H \right),$$

où  $p$  est le morphisme quotient  $V \twoheadrightarrow W \setminus V$ . Désormais, lorsqu'on se placera dans l'espace quotient, on considèrera  $(f_1, \dots, f_n)$  comme les coefficients des points de  $W \setminus V \simeq \mathbb{C}^n$ .

Le morphisme de Lyashko-Looijenga LL, que l'on définira précisément en partie 1.3.3, permet d'étudier l'hypersurface  $\mathcal{H}$  à travers les fibres de la projection  $(f_1, \dots, f_n) \mapsto (f_1, \dots, f_{n-1})$ . Ensemblistement, LL associe à  $(f_1, \dots, f_{n-1})$  le multi-ensemble des racines de  $\Delta(f_1, \dots, f_n)$  vu comme polynôme en  $f_n$ . Dans la partie suivante on fixe les notations et définitions concernant l'espace d'arrivée de LL.

### 1.3.2 L'espace des configurations de $n$ points

On note  $E_n$  l'ensemble des configurations centrées de  $n$  points, avec multiplicités, *i.e.*

$$E_n := H_0 / \mathfrak{S}_n$$

où  $H_0$  est l'hyperplan de  $\mathbb{C}^n$  d'équation  $\sum x_i = 0$ .

Considérons le morphisme quotient  $f : H_0 \rightarrow E_n$ . C'est un morphisme fini (donc fermé), correspondant à l'inclusion  $\mathbb{C}[e_1, \dots, e_n] / (e_1) \hookrightarrow \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] / (\sum x_i)$ , où  $e_1, \dots, e_n$  désignent les fonctions symétriques élémentaires en les  $x_i$ . L'espace  $E_n$  est une variété algébrique, son anneau des fonctions régulières sera noté  $\mathbb{C}[e_2, \dots, e_n]$ .

On peut stratifier naturellement  $E_n$  par les partitions de l'entier  $n$ . Pour  $\lambda \vdash n$ , on note  $E_\lambda^0$  l'ensemble des configurations  $X \in E_n$  dont les multiplicités sont distribuées selon  $\lambda$ . Ainsi,  $E_n$  est l'union disjointe des  $E_\lambda^0$ .

Une partie  $E_\lambda^0$  n'est pas fermée ; des points peuvent fusionner et on obtiendra une configuration correspondant à une partition moins fine :

**Définition 1.17.** Soient  $\lambda, \mu$  deux partitions de  $n$ . On note  $\mu \leq \lambda$  la relation «  $\mu$  est moins fine que  $\lambda$  », *i.e.*  $\mu$  est obtenue à partir de  $\lambda$  après un ou plusieurs regroupements de parts.

On pose  $E_\lambda := \bigsqcup_{\mu \leq \lambda} E_\mu^0$  (le symbole  $\bigsqcup$  désigne une union disjointe).

Ainsi, pour  $\varepsilon := 1^n \vdash n$ ,  $E_\varepsilon$  est l'espace  $E_n$  entier, et  $E_\varepsilon^0$  est l'ensemble des points réguliers de  $E_n$ , que l'on notera  $E_n^{\text{reg}}$ . On a  $E_n^{\text{reg}} = H_0^{\text{reg}} / \mathfrak{S}_n$ , où  $H_0^{\text{reg}} = \{(x_1, \dots, x_n) \in H_0 \mid \forall i \neq j, x_i \neq x_j\}$ . Pour  $\alpha := 2^1 1^{n-2} \vdash n$ , on a  $E_\alpha = E_n - E_n^{\text{reg}}$ .

Pour la topologie classique, comme pour la topologie de Zariski,  $E_\lambda$  est un fermé qui est l'adhérence de  $E_\lambda^0$ .

Fixons une configuration de référence  $X^\circ$  dans  $E_n^{\text{reg}}$ , par exemple sur la droite réelle. On note  $B_n := \pi_1(E_n^{\text{reg}}, X^\circ)$  le groupe de tresses à  $n$  brins. On a la présentation classique :

$$B_n \simeq \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ pour } |i - j| > 1 \rangle,$$

où par convention  $\sigma_i$  est représenté par le chemin suivant dans le plan complexe :



Tout chemin dans  $E_n^{\text{reg}}$  peut être vu comme un élément du groupe de tresses  $B_n$ . Précisons la construction, qui sera importante par la suite. On définit l'ordre lexicographique sur  $\mathbb{C}$  :  $z \leq_{\text{lex}} z' \Leftrightarrow [\text{re}(z) \leq \text{re}(z')] \text{ et } [\text{re}(z) = \text{re}(z') \Rightarrow \text{im}(z) \leq \text{im}(z')]$ .

Soit  $X$  une configuration quelconque de  $E_n^{\text{reg}}$ , et posons  $\tilde{X} = (x_1, \dots, x_n)$  son support ordonné pour  $\leq_{\text{lex}}$ . Considérons un chemin  $t \mapsto (x_1(t), \dots, x_n(t))$  dans  $H_0^{\text{reg}}$  de  $\tilde{X}$  vers  $\tilde{X}^\circ$  (le support ordonné de  $X^\circ$ ), tel que pour tout  $t$ ,  $x_1(t) \leq_{\text{lex}} \dots \leq_{\text{lex}} x_n(t)$ . Il détermine une unique classe d'homotopie de chemin de  $X$  vers  $X^\circ$ , que l'on note  $\gamma_X$ . Si  $X, X' \in E_n^{\text{reg}}$ , on fixe ainsi une bijection entre le groupe  $\pi_1(E_n^{\text{reg}}, X^\circ)$  et l'ensemble des classes d'homotopie de chemin de  $X$  vers  $X'$  par :  $\tau \mapsto \gamma_X \cdot \tau \cdot \gamma_{X'}^{-1}$ .

Via ces conventions, on pourra désormais considérer tout chemin dans  $E_n^{\text{reg}}$  comme un élément de  $B_n$ . De la même façon, si  $\lambda$  est une partition de  $n$ , on peut associer à tout chemin de  $E_\lambda^0$  un élément de  $B_r$ , où  $r = \#\lambda$  est le nombre de parts de  $\lambda$  : on considère simplement le mouvement du support de la configuration. On utilisera ces conventions dans la proposition 1.26 et le lemme 1.30.

### 1.3.3 Définitions et propriétés du morphisme LL

On pose  $Y := \text{Spec } \mathbb{C}[f_1, \dots, f_{n-1}] \simeq \mathbb{C}^{n-1}$ . D'autre part,  $E_n = \text{Spec } \mathbb{C}[e_2, \dots, e_n]$ . Rappelons que  $a_2, \dots, a_n$ , éléments de  $\mathbb{C}[f_1, \dots, f_{n-1}]$ , désignent les coefficients du discriminant  $\Delta$  en tant que polynôme en  $f_n$ .

**Définition 1.18** ([Bes07a, Def.5.1]). Le morphisme de Lyashko-Looijenga (généralisé) est le morphisme de  $Y$  dans  $E_n$  défini algébriquement par :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[e_2, \dots, e_n] &\rightarrow \mathbb{C}[f_1, \dots, f_{n-1}] \\ e_i &\mapsto (-1)^i a_i \end{aligned}$$

Ensemblistement, LL envoie  $y = (f_1, \dots, f_{n-1}) \in Y$  sur le multi-ensemble (élément de  $E_n$ ) des racines du polynôme  $\Delta = f_n^n + a_2(y)f_n^{n-2} + \dots + a_n(y)$ , *i.e.* les intersections, avec multiplicité, de  $\mathcal{H}$  avec la droite  $L_y := \{(y, f_n) \mid f_n \in \mathbb{C}\}$ . On peut voir aussi LL comme le morphisme algébrique qui envoie  $y \in Y$  sur  $(a_2, \dots, a_n)$  : il est alors quasi-homogène pour les poids :  $\deg f_i = d_i$ ,  $\deg a_i = ih$ .

On pose  $\mathcal{K} := \{y \in Y \mid \text{Disc}(\Delta(y, f_n); f_n) = 0\}$ , appelé lieu de bifurcation de  $\Delta$ . C'est le lieu où  $\Delta$  a des racines multiples en tant que polynôme en  $f_n$ . Ainsi  $\mathcal{K} = \text{LL}^{-1}(E_\alpha)$  et  $Y - \mathcal{K} = \text{LL}^{-1}(E_n^{\text{reg}})$ , avec les notations de la partie 1.3.2. Les propriétés fondamentales de LL sont données par le théorème suivant :

**Théorème 1.19** ([Bes07a, Thm. 5.3]). *Les polynômes  $a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}[f_1, \dots, f_{n-1}]$  sont algébriquement indépendants, et  $\mathbb{C}[f_1, \dots, f_{n-1}]$  est un  $\mathbb{C}[a_2, \dots, a_n]$ -module libre gradué de rang  $\frac{nh^n}{|W|}$ . Par conséquent,  $LL$  est un morphisme fini. De plus, sa restriction  $Y - \mathcal{K} \rightarrow E_n^{\text{reg}}$  est un revêtement non ramifié de degré  $\frac{nh^n}{|W|}$ .*

La dernière propriété permet de définir, pour chaque  $y \in Y - \mathcal{K}$ , une action de Galois (ou action de monodromie) de  $\pi_1(E_n^{\text{reg}}, LL(y))$  sur la fibre de  $LL(y)$ . D'après les conventions de la partie 1.3.2, cela détermine une action du groupe de tresses  $B_n$  sur l'espace  $Y - \mathcal{K}$  : les orbites sont exactement les fibres de  $LL$  (car  $Y - \mathcal{K}$  est connexe par arcs). Pour  $\beta \in B_n$ , on note  $y \cdot \beta$  l'image de  $y$  par l'action de  $\beta$ .

Dans la partie suivante, on va construire pour chaque  $y \in Y$  une factorisation de  $c$  ; on verra plus loin que l'action d'Hurwitz sur les factorisations (définition 1.2) est compatible avec l'action de Galois définie ici.

## 1.4 Factorisations géométriques

En adaptant [Bes07a, Part.6], on construit pour chaque  $y \in Y$  une factorisation par blocs de  $c$ , dont la partition associée correspond à la distribution des multiplicités de la configuration  $LL(y)$ .

### 1.4.1 Tunnels

Soit  $y \in Y$ . Rappelons que  $L_y$  désigne la droite complexe  $\{(y, x) \mid x \in \mathbb{C}\}$ . Notons  $U_y$  le complémentaire dans  $L_y$  des demi-droites verticales situées au-dessous des points de  $LL(y)$ , *i.e.* :

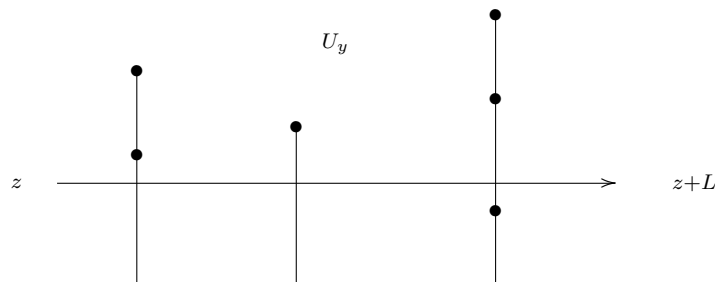
$$U_y := \{(y, z) \in L_y \mid \forall x \in LL(y), \operatorname{re}(z) = \operatorname{re}(x) \Rightarrow \operatorname{im}(z) > \operatorname{im}(x)\}$$

La partie  $\mathcal{U} := \bigcup_{y \in Y} U_y$  est un ouvert dense et contractile de  $W \setminus V^{\text{reg}}$  [Bes07a, Lemme 6.2]. On peut donc utiliser  $\mathcal{U}$  comme « point-base » pour le groupe fondamental de  $W \setminus V^{\text{reg}}$ . On définit ainsi le groupe de tresses de  $W$  :

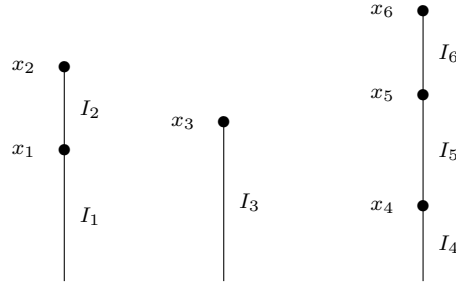
$$B(W) := \pi_1(W \setminus V^{\text{reg}}, \mathcal{U})$$

On rappelle ci-dessous [Bes07a, Def.6.5] :

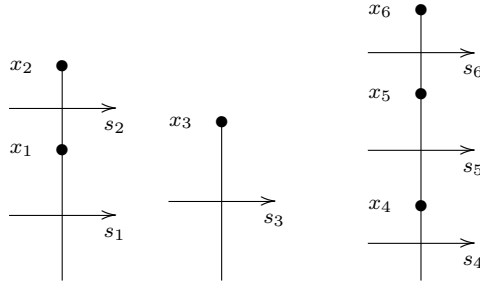
**Définition 1.20.** Un *tunnel* est un triplet  $T = (y, z, L)$  tel que  $(y, z) \in \mathcal{U}$ ,  $(y, z + L) \in \mathcal{U}$ , et le segment  $[(y, z), (y, z + L)]$  est contenu dans  $W \setminus V^{\text{reg}}$ . On associe à  $T$  l'élément  $b_T$  du groupe de tresses  $\pi_1(W \setminus V^{\text{reg}}, \mathcal{U})$ , représenté par le chemin horizontal  $t \mapsto (y, z + tL)$ .



Soit  $y \in Y$ , et  $(x_1, \dots, x_k)$  le support du multi-ensemble  $\text{LL}(y)$ , ordonné selon l'ordre lexicographique  $\leq_{\text{lex}}$ . Notons  $\text{pr}_{\mathbb{C}}$  la projection de  $W \setminus V \simeq Y \times \mathbb{C}$  sur la dernière coordonnée. Considérons l'espace  $\text{pr}_{\mathbb{C}}(L_y - U_y) - \{x_1, \dots, x_k\}$ . C'est une union disjointe d'intervalles ouverts, bornés ou non. Pour  $j \in \{1, \dots, k\}$ , on note  $I_j$  l'intervalle situé sous  $x_j$ .



Pour chaque  $x_j$ , on choisit un tunnel  $T_j$  qui traverse  $I_j$  et pas les autres intervalles. On note  $s_j := b_{T_j}$  l'élément de  $B(W)$  associé.



Dans [Bes07a, Def.6.7], le  $k$ -uplet  $(s_1, \dots, s_k)$  est appelé *label* de  $y$  et noté  $\text{lbl}(y)$ . Ici on va associer à  $y$  un  $k$ -uplet légèrement différent, mieux adapté au problème.

## 1.4.2 Factorisations géométriques

**Définition 1.21.** Soit  $y \in Y$ ,  $x_1, \dots, x_k$  et  $s_1, \dots, s_k$  définis comme ci-dessus. On note  $\text{fact}_B(y)$  le  $k$ -uplet  $(s'_1, \dots, s'_k)$  d'éléments de  $B(W)$  où :

$$s'_i = \begin{cases} s_i s_{i+1}^{-1} & \text{si } \text{re}(x_{i+1}) = \text{re}(x_i) \\ s_i & \text{sinon.} \end{cases}$$

On appelle *factorisation associée* à  $y$ , et on note  $\text{fact}(y)$ , le  $k$ -uplet  $(\pi(s'_1), \dots, \pi(s'_k))$  d'éléments de  $W$  où  $\pi : B(W) \rightarrow W$ .

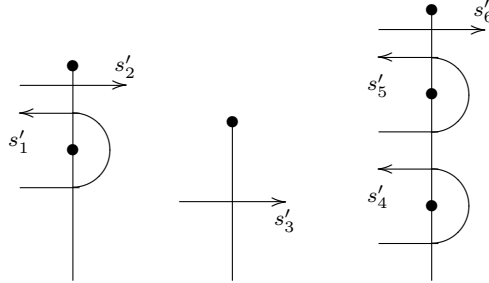
La raison de l'utilisation du terme « factorisation » sera clarifiée plus loin.

**Remarque 1.22.** L'application  $\pi$  est une projection naturelle  $B(W) \xrightarrow{\pi} W$ . Le revêtement  $V^{\text{reg}} \rightarrow W \setminus V^{\text{reg}}$  permet en effet d'obtenir la suite exacte

$$1 \rightarrow P(W) = \pi_1(V^{\text{reg}}) \rightarrow B(W) = \pi_1(W \setminus V^{\text{reg}}) \xrightarrow{\pi} W \rightarrow 1.$$

Pour définir précisément  $\pi$ , on doit choisir une section  $\tilde{\mathcal{U}}$  du point-base  $\mathcal{U}$  dans  $V^{\text{reg}}$ . Il y a  $|W|$  choix possibles, qui donnent des morphismes conjugués (cf. [Bes07a, Rq.6.4]).

Géométriquement,  $s'_i$  est représenté par un chemin qui, vu depuis  $\mathcal{U}$ , passe sous  $x_i$  mais pas sous  $x_j$  pour  $j \neq i$  :



**Remarque 1.23.** Si  $y \in Y - \mathcal{K}$ ,  $\underline{\text{fact}}_B(y)$  est un  $n$ -uplet de « réflexions tressées » (terminologie de Broué, cf. [BMR98]), et détermine des générateurs de la monodromie de  $W \setminus V^{\text{reg}} = \mathbb{C}^n - \mathcal{H}$ . Plus précisément, par  $\pi_1$ -surjectivité de l'inclusion  $L_y - L_y \cap \mathcal{H} \hookrightarrow \mathbb{C}^n - \mathcal{H}$  (cf. [Bes01, Thm. 2.5]), les facteurs de  $\underline{\text{fact}}_B(y)$  engendrent le groupe de tresses  $B(W)$ .

Dans le cas où le support de  $\text{LL}(y)$  est « générique » (parties réelles distinctes), les  $k$ -uplets  $\underline{\text{fact}}_B(y)$  et  $\text{lbl}(y)$  coïncident. Dans le cas général, on peut toujours perturber  $y$  en un  $y'$  tel que  $\text{LL}(y') = e^{-i\theta} \text{LL}(y)$ , avec  $\theta > 0$  assez petit pour que le support de  $\text{LL}(y')$  soit générique et que  $\underline{\text{fact}}_B(y) = \underline{\text{fact}}_B(y') = \text{lbl}(y')$ . Les propriétés de  $\text{lbl}$  énoncées dans [Bes07a] s'adaptent ainsi aisément à l'application  $\underline{\text{fact}}$ ; par la suite (1.25, 1.26, 1.27), on rappelle ces propriétés, en les reformulant dans ce nouveau cadre, et on ne démontre que ce qui change de façon non triviale.

Si  $\text{LL}(y) = \{0\}$  (avec multiplicité  $n$ ), alors  $y = 0$  (d'après le théorème 1.19). On note alors  $\delta$  l'élément de  $B(W)$  tel que  $\underline{\text{fact}}_B(0) = (\delta)$ . Il est représenté par l'image dans  $W \setminus V^{\text{reg}}$  du chemin dans  $V^{\text{reg}}$  :

$$\begin{aligned} [0, 1] &\longrightarrow V^{\text{reg}} \\ t &\longmapsto v \exp(2i\pi t/h). \end{aligned}$$

où  $v$  est tel que pour  $i = 1, \dots, n-1$ ,  $f_i(v) = 0$  (i.e.  $v \in L_0$ ). Notons que  $\delta$  est une racine  $h$ -ième du « tour complet » de  $P(W)$  (« full-twist » noté  $\pi$  dans [BMR98, Not.2.3]).

On pose  $c = \pi(\delta)$ , image de  $\delta$  dans  $W$ . Par construction,  $c$  est  $e^{2i\pi/h}$ -régulier, donc est un élément de Coxeter. Les autres éléments de Coxeter de  $W$  (conjugués) sont obtenus pour d'autres choix du morphisme  $\pi$  (cf. remarque 1.22).

Le lemme 6.14 dans [Bes07a] permet de comparer les tunnels lorsqu'on change de fibre  $L_y$  :

**Lemme 1.24** (« Règle d'Hurwitz »). *Soit  $T = (y, z, L)$  un tunnel, qui représente un élément  $s \in B(W)$ . Soit  $\Omega$  un voisinage connexe par arcs de  $y$ , tel que pour tout  $y' \in \Omega$ ,  $(y', z, L)$  soit encore un tunnel. Alors, pour tout  $y' \in \Omega$ ,  $(y', z, L)$  représente  $s$ .*

On rassemble dans la proposition suivante quelques conséquences utiles de ce lemme, adaptées de [Bes07a, Lemmes 6.16, 6.17] :

**Proposition 1.25.** *Soit  $y \in Y$ ,  $(x_1, \dots, x_k)$  le support ordonné de  $\text{LL}(y)$ , et  $(s_1, \dots, s_k) = \underline{\text{fact}}_B(y)$ . Alors :*



(i)  $s_1 \dots s_k = \delta$  et  $\pi(s_1) \dots \pi(s_k) = c$  ;

(ii) pour tout  $i$ , la longueur de  $\pi(s_i) \in W$  est la multiplicité de  $x_i$  dans  $\text{LL}(y)$ .

Par conséquent,  $\underline{\text{fact}}(y) \in \text{FACT}(c)$ , et si  $y \in \text{LL}^{-1}(E_\lambda^0)$ ,  $\underline{\text{fact}}(y) \in \text{FACT}_\lambda(c)$ .

Une autre conséquence est la compatibilité des actions d'Hurwitz et de Galois :

**Proposition 1.26** (d'après [Bes07a, Cor. 6.18]). *Soit  $y \in Y - \mathcal{K}$ , et  $\beta \in B_n$ . Alors :*

$$\underline{\text{fact}}(y \cdot \beta) = \underline{\text{fact}}(y) \cdot \beta$$

où la première action est l'action de Galois définie en 1.3.3, et la seconde est l'action d'Hurwitz (cf. définition 1.2).

*Démonstration :* La preuve de [Bes07a, Cor. 6.18] s'adapte au cas non générique (parties réelles non distinctes) sans difficultés. On verra plus loin (lemme 1.30) une généralisation de cette propriété de compatibilité à tous les éléments de  $Y$ .  $\square$

## 1.5 Etude de LL sur les strates $E_\lambda$

Ci-dessous on reformule [Bes07a, Thm. 7.9] en utilisant le produit fibré  $E_n \times_{\text{cp}(n)} \text{FACT}(c)$ , où  $\text{cp}(n)$  désigne l'ensemble des compositions de  $n$ . A toute configuration  $X$  de  $E_n$  on peut associer une composition de  $n$ , constituée des multiplicités des points du support de  $X$  pris dans l'ordre  $\leq_{\text{lex}}$  sur  $\mathbb{C}$ . D'autre part, toute factorisation de  $\text{FACT}(c)$  détermine une composition de  $n$ , en considérant les longueurs des facteurs dans l'ordre. Ces constructions définissent deux applications :  $\text{comp}_1 : E_n \rightarrow \text{cp}(n)$  et  $\text{comp}_2 : \text{FACT}(c) \rightarrow \text{cp}(n)$ . On pose :

$$E_n \times_{\text{cp}(n)} \text{FACT}(c) := \{(X, \xi) \in E_n \times \text{FACT}(c) \mid \text{comp}_1(X) = \text{comp}_2(\xi)\}$$

**Théorème 1.27** (d'après [Bes07a, Thm. 7.9]). *L'application  $\text{LL} \times \underline{\text{fact}}$  :*

$$\begin{aligned} Y &\rightarrow E_n \times_{\text{cp}(n)} \text{FACT}(c) \\ y &\mapsto (\text{LL}(y), \underline{\text{fact}}(y)) \end{aligned}$$

est bijective.

Donnons ici les grandes lignes de la démonstration (détails dans [Bes07a, Part.7]). L'essentiel est de montrer la bijectivité de  $\text{LL} \times \underline{\text{fact}} : Y - \mathcal{K} \rightarrow \text{Red}(c)$  (le reste se fait en dégénéralisant les points réguliers). Cela revient à prouver que, pour  $y \in Y - \mathcal{K}$ , le morphisme de  $B_n$ -ensembles

$$y \cdot B_n \xrightarrow{\underline{\text{fact}}} \underline{\text{fact}}(y) \cdot B_n$$

est un isomorphisme [Bes07a, Thm. 7.4]. Pour cela, on montre que  $|\underline{\text{fact}}(y) \cdot B_n| = |y \cdot B_n| = \frac{n!h^n}{|W|}$  en utilisant les deux propriétés suivantes, prouvées au cas par cas [Bes07a, Prop. 7.5] :

(i) l'action d'Hurwitz sur  $\text{Red}(c)$  est transitive ;

(ii)  $|\text{Red}(c)| = \frac{n!h^n}{|W|}$ .

Posons maintenant  $Y_\lambda := \text{LL}^{-1}(E_\lambda)$ , et  $Y_\lambda^0 := \text{LL}^{-1}(E_\lambda^0)$ . Ainsi,  $Y_\lambda$  est un fermé de Zariski dans  $Y \simeq \mathbb{C}^{n-1}$ , et est l'adhérence de  $Y_\lambda^0$ . Pour tout  $\lambda \vdash n$ ,  $Y_\lambda = \bigsqcup_{\mu \leq \lambda} Y_\mu^0$ . En particulier,  $Y = \bigsqcup_{\mu \vdash n} Y_\mu^0$ .

**Théorème 1.28.** *Pour tout  $\lambda \vdash n$ , la restriction de LL :*

$$\text{LL}_\lambda : Y_\lambda^0 \rightarrow E_\lambda^0$$

*est un revêtement non ramifié.*

**Remarque 1.29.** La définition de « revêtement » est bien sûr à prendre ici au sens large : comme  $Y_\lambda^0$  n'est pas nécessairement connexe par arcs, le théorème signifie que l'application  $\text{LL}_\lambda$  est un revêtement connexe par arcs sur chacune des composantes connexes par arcs de  $Y_\lambda^0$ .

*Démonstration :* Soit  $X_0 \in E_\lambda^0$ . Supposons dans un premier temps que les parties réelles des éléments du support de  $X_0$  sont distinctes (on dira que  $X_0$  est relativement générique). Soit  $\Omega$  un ouvert connexe par arcs de  $E_\lambda^0$ , contenant  $X_0$ , et de diamètre assez petit pour que tous les éléments de  $X_0$  soient relativement génériques.

Soit  $\mu = \text{comp}_1(X_0)$  la composition de  $n$  associée à  $X_0$ . Il est clair que pour tout  $X \in \Omega$ , la composition associée à  $X$  est encore  $\mu$ . Posons  $F_\mu := \text{FACT}_\mu(c) = \{\xi \in \text{FACT}(c) \mid \text{comp}_2(\xi) = \mu\}$ . Le théorème 1.27 implique que l'application

$$\text{LL}_\lambda^{-1}(\Omega) \xrightarrow{\text{LL}_\lambda \times \text{fact}} \Omega \times F_\mu$$

est une bijection.

Si  $X_0$  n'est pas relativement générique, on peut refaire toutes les constructions précédentes en tournant légèrement la direction de la verticale dans le sens trigonométrique direct. On doit modifier alors la définition de l'application fact (sauf pour les  $y$  de la fibre de  $X_0$ ), mais les factorisations construites restent toujours dans  $\text{FACT}_\mu(c)$  pour  $\mu = \text{comp}_1(X_0)$ .

Pour conclure, il suffit de remarquer que toutes les fibres  $F_\mu$  construites sont en bijection. En effet, les compositions  $\mu$  associées aux éléments de  $Y_\lambda^0$  correspondent nécessairement à la partition  $\lambda$ , et si deux compositions  $\mu$  et  $\mu'$  sont égales à permutation des parts près, alors  $\text{FACT}_\mu(c)$  et  $\text{FACT}_{\mu'}(c)$  sont en bijection (utiliser l'action d'Hurwitz par une tresse adaptée).  $\square$

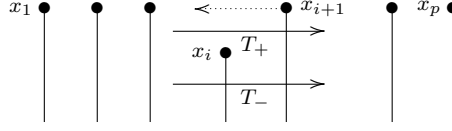
Soit  $\lambda$  une partition de  $n$ , et  $X, X' \in E_\lambda^0$ . On a vu en partie 1.3.2 que toute classe d'homotopie de chemin de  $X$  vers  $X'$  dans  $E_\lambda^0$  définit un élément de  $B_p$  où  $p = \#\lambda$ . On en déduit en particulier une action de Galois de  $B_p$  sur chacune des fibres de LL au-dessus de  $E_\lambda^0$ , et on a une propriété de compatibilité des actions plus générale :

**Lemme 1.30** (Compatibilité des actions de Galois et d'Hurwitz sur les strates). *Soit  $\lambda \vdash n$ , avec  $p = \#\lambda$ .*

- (i) *Soient  $y, y' \in Y_\lambda^0$ , reliés par un chemin  $\gamma$  dans  $Y_\lambda^0$ . Notons  $X = \text{LL}(y)$ ,  $X' = \text{LL}(y')$ , et  $\beta$  la tresse de  $B_p$  représentée par l'image de  $\gamma$  par LL. Alors :  $\text{fact}(y') = \text{fact}(y) \cdot \beta$ .*
- (ii) *Soient  $\beta \in B_p$ , et  $y, y' \in Y_\lambda^0$  tels que  $\text{fact}(y') = \text{fact}(y) \cdot \beta$ . Notons  $X = \text{LL}(y)$ ,  $X' = \text{LL}(y')$  et  $\tilde{\beta}$  l'unique relevé (par LL) d'origine  $y$  de la tresse  $\beta$  vue comme classe de chemin (dans  $E_\lambda^0$ ) de  $X$  vers  $X'$ . Alors  $y'$  est le point d'arrivée de  $\tilde{\beta}$ .*

*Démonstration :* (i) C'est essentiellement la même preuve que pour [Bes07a, Cor.6.18]. Il suffit de considérer le cas  $\beta = \sigma_i$  ( $i$ -ème tresse élémentaire de  $B_p$ ), pour  $i \in \{1, \dots, p-1\}$ . En vertu du théorème 1.28, on peut déplacer  $X, X'$  (sans changer l'ordre des points des

configurations), et  $y, y'$  (sans modifier  $\underline{\text{fact}}(y)$  et  $\underline{\text{fact}}(y')$ ), de sorte que la tresse  $\sigma_i$  soit représentée par le chemin suivant (en pointillés) :



Considérons les tunnels  $T_+$  et  $T_-$  représentés sur le schéma. Notons  $(w_1, \dots, w_p) = \underline{\text{fact}}(y)$  et  $(w'_1, \dots, w'_p) = \underline{\text{fact}}(y')$ . Alors  $T_+$  représente  $w_{i+1}$  dans  $L_y$ , et  $w'_i$  dans  $L_{y'}$ . D'où, d'après le lemme 1.24,  $w'_i = w_{i+1}$ . De même, avec  $T_-$ , on obtient  $w'_i w'_{i+1} = w_i w_{i+1}$ , et on a vérifié que  $\underline{\text{fact}}(y') = \underline{\text{fact}}(y) \cdot \sigma_i$ .

- (ii) On reprend les notations de l'énoncé. Notons  $y''$  le point d'arrivée de  $\beta$ . Alors, d'une part on a  $\text{LL}(y'') = X' = \text{LL}(y)$ . D'autre part, en appliquant le point (i) à  $y, y'$ , et  $\tilde{\beta}$ , on obtient :  $\underline{\text{fact}}(y'') = \underline{\text{fact}}(y) \cdot \beta = \underline{\text{fact}}(y')$ . D'où, par le théorème 1.27,  $y'' = y'$ .  $\square$

Le théorème suivant est une conséquence directe du lemme :

**Théorème 1.31.** *Soit  $\lambda \vdash n$ , et  $p = \#\lambda$ . L'application  $Y_\lambda^0 \xrightarrow{\text{fact}} \text{FACT}_\lambda(c)$  induit une bijection entre l'ensemble des composantes connexes par arcs de  $Y_\lambda^0$  et l'ensemble des orbites d'Hurwitz de  $\text{FACT}_\lambda(c)$  sous  $B_p$ .*

*Autrement dit, si  $Y_\lambda^0 = \bigsqcup_i Y_{\lambda,i}^0$  est la décomposition de  $Y_\lambda^0$  en ses composantes connexes par arcs, alors*

$$\text{FACT}_\lambda(c) = \underline{\text{fact}}(Y_\lambda^0) = \bigsqcup_i \underline{\text{fact}}(Y_{\lambda,i}^0)$$

*est la décomposition de  $\text{FACT}_\lambda(c)$  en orbites d'Hurwitz sous  $B_p$ .*

## 1.6 Stratification de $\mathcal{H}$ et éléments de Coxeter paraboliques

Dans cette partie on étudie la géométrie de  $\mathcal{H}$ , afin de pouvoir déterminer en partie 1.7 les composantes connexes par arcs de  $Y_\lambda^0$  lorsque  $\lambda$  est une partition primitive, en appliquant le théorème 1.31 ci-dessus.

On rappelle qu'on a fixé un élément de Coxeter  $c = \pi(\delta)$ .

### 1.6.1 Stratification de $V$

L'arrangement d'hyperplans associé à  $W$  est noté  $\mathcal{A}$ . On considère la stratification de  $W$  par les *plats*, *i.e.* le treillis d'intersection :

$$\mathcal{L} := \mathcal{L}(\mathcal{A}) = \left\{ \bigcap_{H \in \mathcal{B}} H \mid \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \right\}.$$

Pour  $L \in \mathcal{L}$ , on pose

$$L^0 := L - \bigcup_{L' \in \mathcal{L}, L' \subsetneq L} L'.$$

On obtient la stratification ouverte de  $V$  associée à  $\mathcal{L}$ . Pour tout  $L \in \mathcal{L}$ ,  $L$  est l'adhérence de  $L^0$ .

La stratification de  $V$  par les plats correspond à la stratification du groupe  $W$  par ses sous-groupes paraboliques : on rappelle le théorème de Steinberg [Ste64, Thm. 1.5] et ses conséquences.

**Théorème 1.32** (Steinberg). *Si  $L$  est un plat, le groupe*

$$W_L := \{w \in W \mid \forall x \in L, wx = x\}$$

*est encore un groupe de réflexions, appelé sous-groupe parabolique associé à  $L$ . De plus :*

(i) *L'application  $L \mapsto W_L$  est une bijection de  $\mathcal{L}$  vers l'ensemble des sous-groupes paraboliques ; sa réciproque est*

$$G \mapsto V^G = \{x \in V \mid \forall w \in G, wx = x\} = \bigcap_{r \in \mathcal{R} \cap G} H_r .$$

(ii) *Le rang de  $W_L$  est égal à la codimension de  $L$ .*

(iii) *Soit  $v \in V$ . Notons  $V_v := \bigcap_{H \in \mathcal{A}, v \in H} H$  et  $W_v := \{w \in W \mid wv = v\}$ .*

*Alors, pour  $L \in \mathcal{L}$  :*

$$v \in L^0 \Leftrightarrow V_v = L \Leftrightarrow W_v = W_L.$$

## 1.6.2 Éléments de Coxeter paraboliques

Notons  $f : \mathcal{H} \rightarrow \text{NCP}_W(c)$  l'application qui à  $(y, x) \in \mathcal{H}$  associe le facteur de  $\underline{\text{fact}}(y)$  correspondant à  $x$  (*i.e.* défini par un tunnel élémentaire passant sous le point  $x$  de  $\text{LL}(y)$ ). Ainsi,  $(f(y, x_1), \dots, f(y, x_p)) = \underline{\text{fact}}(y)$  lorsque le support ordonné de  $\text{LL}(y)$  est  $(x_1, \dots, x_p)$ .

On reformule ci-dessous un lemme fondamental de [Bes07a] :

**Lemme 1.33** (d'après [Bes07a, Lemme 7.3]). *Soit  $y \in Y$ . Soient  $x \in \text{LL}(y)$ , de multiplicité  $p$ , et  $w = f(y, x)$ .*

*Alors il existe une préimage  $v \in V$  de  $(y, x) \in W \setminus V$  telle que  $w$  soit un élément de Coxeter dans le sous-groupe parabolique  $W_v$ . De plus :*

$$p = \ell(w) = \text{rg } W_v = \dim V/V_v = \text{codim Ker}(w - 1).$$

Par conséquent, en utilisant la surjectivité de l'application  $\underline{\text{fact}}$ , on peut déduire de ce lemme que tout diviseur  $w$  de  $c$  est un élément de Coxeter d'un sous-groupe parabolique, groupe que l'on peut déterminer à l'aide d'une factorisation qui contient  $w$ . D'où la proposition-définition suivante :

**Proposition 1.34.** *Soit  $W$  un groupe de réflexions complexe bien engendré, et  $w \in W$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i)  *$w$  est un élément de Coxeter d'un sous-groupe parabolique de  $W$  ;*
- (ii) *il existe un élément de Coxeter  $c_w$  de  $W$ , tel que  $w \preceq c_w$  ;*
- (iii)  *$w$  est conjugué à un élément de  $\text{NCP}_W(c)$ .*

On dit alors que  $w$  est un élément de Coxeter parabolique.

**Remarque 1.35.** Dans le cas d'un groupe de Coxeter fini, cette propriété est bien connue et démontrée de manière uniforme, cf. [Bes03, Lemme 1.4.3].

*Démonstration :* (ii)  $\Leftrightarrow$  (iii) provient directement de la théorie de Springer (les éléments de Coxeter de  $W$  forment une seule classe de conjugaison) et de la propriété  $\text{NCP}_W(aca^{-1}) = a \text{NCP}_W(c)a^{-1}$ .

(i)  $\Rightarrow$  (ii) : soit  $G$  un sous-groupe parabolique (non trivial), et  $w$  un élément de Coxeter de  $G$ . Soit  $L = V^G$  et  $v \in L^0$ , de sorte que  $W_v = G$ . Notons  $(y, x) = \bar{v}$  et  $w_0 = f(y, x) \in \text{NCP}_W(c)$ . D'après le lemme 1.33, il existe  $v_0 \in V$  tel que  $(y, x) = \bar{v}_0$  et que  $w_0$  soit un élément de Coxeter de  $W_{v_0}$ . Comme  $v_0$  et  $v$  sont dans la même orbite sous  $W$ ,  $G = W_v$  est conjugué à  $W_{v_0}$ , donc tous leurs éléments de Coxeter sont conjugués dans  $W$ . En particulier  $w$  est conjugué à  $w_0$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (i) : il suffit de montrer l'implication pour  $w \in \text{NCP}_W(c)$ , puisque la propriété (i) est invariante par conjugaison. Si  $w \preceq c$ , la surjectivité de fact (théorème 1.27) donne l'existence de  $(y, x) \in W \setminus V$  tel que  $f(y, x) = w$ . Le lemme 1.33 permet alors de conclure.  $\square$

Comme dans le cas d'un groupe de Coxeter [Bes03, Cor.1.6.2], on peut retrouver, à partir d'un élément de Coxeter parabolique, le sous-groupe parabolique associé :

**Proposition 1.36.** Soit  $w$  un élément de Coxeter parabolique, et  $W_w$  le sous-groupe parabolique fixateur du plat  $\text{Ker}(w - 1)$ . Alors :

- (i) le groupe  $W_w$  est l'unique sous-groupe parabolique duquel  $w$  est un élément de Coxeter ;
- (ii) si  $(r_1, \dots, r_k) \in \text{Red}(w)$ , alors  $\langle r_1, \dots, r_k \rangle = W_w$ .

*Démonstration :* (i) Soit  $G$  un sous-groupe parabolique tel que  $w$  soit un élément de Coxeter de  $G$ . Soit  $L$  le plat associé à  $G$ , i.e.  $L = V^G$ . Alors comme  $w \in G$ , on a  $L \subseteq \text{Ker}(w - 1)$ . Or  $\text{codim } L = \text{rg } G$  par théorème 1.32, et  $\text{rg } G = \ell_G(w)$  (où  $\ell_G$  désigne la longueur relativement aux réflexions de  $G$ ) car  $w$  est un élément de Coxeter. D'autre part  $\ell(w) = \text{codim } \text{Ker}(w - 1)$  par la proposition 1.8. Donc pour conclure il suffit d'utiliser le résultat suivant :

Si  $G$  est un sous-groupe parabolique, alors :  $\forall g \in \text{NCP}_W, g \in G \Rightarrow \ell_G(g) = \ell(g)$ .

Pour cela, on va vérifier que pour  $r \in \mathcal{R}$ , si  $r \preceq g$ , alors  $r \in G$ . Si  $G = W_L$ , cela revient à montrer que  $L \subseteq \text{Ker}(r - 1)$ . Or, comme  $g \in G$ , on a  $L \subseteq \text{Ker}(g - 1)$ , et d'après la proposition 1.10,  $\text{Ker}(g - 1) \subseteq \text{Ker}(r - 1)$ .

(ii) Il suffit de le démontrer dans le cas où  $w$  est un élément de Coxeter  $c$  d'un groupe de réflexions (bien engendré) irréductible  $W$ . D'après le théorème 1.27, toute décomposition réduite  $(r_1, \dots, r_n)$  de  $c$  provient d'une factorisation de  $\delta$  en générateurs de la monodromie, i.e. de fact $_B(y) = (s_1, \dots, s_n)$ , avec  $y \in Y - \mathcal{K}$  et  $\pi(s_i) = r_i$ . Or on sait qu'alors  $s_1, \dots, s_n$  engendrent  $B(W)$  (cf. remarque 1.23), donc  $r_1, \dots, r_n$  engendrent  $W$ .  $\square$

Dans le cas présent, on a fixé un élément de Coxeter  $c$  de  $W$ , et on ne va considérer que les éléments paraboliques qui sont dans  $\text{NCP}_W$ . On n'obtient donc pas tous les sous-groupes paraboliques, mais seulement les *sous-groupes paraboliques « non croisés »*, i.e. ceux qui possèdent un élément de Coxeter qui divise  $c$ . Cependant d'après les propositions 1.34 et 1.36, quitte à les conjuguer, on obtient tous les sous-groupes paraboliques :

**Proposition 1.37.** *Soit  $W$  un groupe de réflexions complexe bien engendré, et  $c$  un élément de Coxeter fixé de  $W$ . Soit  $W_0$  un sous-groupe parabolique de  $W$ .*

*Alors  $W_0$  est conjugué à un sous-groupe parabolique « non croisé » de  $W$ , i.e. un sous-groupe de la forme  $W_L$  où  $L = \text{Ker}(w - 1)$  et  $w \preceq c$ .*

Ce un résultat non trivial utilise ainsi de façon essentielle le lemme 1.33. On peut dire que les sous-groupes paraboliques non croisés jouent ici le rôle des sous-diagrammes (ou des paraboliques standards) de la théorie de Coxeter (voir aussi [BMR95, p.3] sur les diagrammes et sous-diagrammes pour les groupes complexes).

**Remarque 1.38.** Dans un sous-groupe parabolique non croisé, il y a unicité de l'élément de Coxeter divisant  $c$ . En effet, il faut trouver un diviseur de  $c$  dont le plat associé est donné, et la solution est unique par le théorème de Brady-Watt (1.11). L'ensemble des sous-groupes paraboliques non croisés, ordonné par inclusion, est donc isomorphe au treillis  $(\text{NCP}_W(c), \preceq)$ .

### 1.6.3 Stratification de $W \setminus V$

Le groupe  $W$  agit sur  $\mathcal{A}$ , donc sur  $\mathcal{L}$ . On peut ainsi définir des orbites de plats, qui forment une stratification notée  $\bar{\mathcal{L}}$  de  $W \setminus V$ .

Soit  $p$  la projection  $V \rightarrow W \setminus V$ ,  $v \mapsto \bar{v} = W \cdot v$ . On a :  $\bar{\mathcal{L}} = W \setminus \mathcal{L} = (p(L))_{L \in \mathcal{L}} = (W \cdot L)_{L \in \mathcal{L}}$ .

On notera par la suite les strates de  $\bar{\mathcal{L}}$  par la lettre  $\Lambda$ . Pour  $\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}$ , posons :

$$\Lambda^0 := \Lambda - \bigcup_{\Lambda' \in \bar{\mathcal{L}}, \Lambda' \subsetneq \Lambda} \Lambda' .$$

Si  $\Lambda = W \cdot L$ , alors  $\Lambda^0 = W \cdot L^0$ . Les ouverts  $\Lambda^0$ , pour  $\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}$ , forment la stratification ouverte de  $W \setminus V$  associée à  $\bar{\mathcal{L}}$ , appelée *stratification discriminante*. Notons que  $(W \setminus V)^0 = W \setminus V - \mathcal{H} = W \setminus V^{\text{reg}}$ .

Les strates de  $\bar{\mathcal{L}}$  correspondent aux classes de conjugaison de sous-groupes paraboliques, puisque  $W_{w \cdot L} = wW_Lw^{-1}$ . On peut également les associer aux classes de conjugaison d'éléments de Coxeter paraboliques. En effet, considérons l'application  $F : W \rightarrow \mathcal{L}$ ,  $w \mapsto \text{Ker}(w - 1)$ . Si  $w$  et  $w'$  sont conjugués, alors  $F(w)$  et  $F(w')$  sont dans la même orbite sous  $W$ , donc  $F$  induit une application  $\bar{F}$  de l'ensemble des classes de conjugaison de  $W$  vers  $\bar{\mathcal{L}}$ .

**Proposition 1.39.** *L'application  $\bar{F}$  définie ci-dessus induit une bijection entre l'ensemble  $\bar{\mathcal{L}}$  des strates de  $W \setminus V$  et :*

- l'ensemble des classes de conjugaison d'éléments de Coxeter paraboliques ;
- l'ensemble des classes de conjugaison d'éléments de  $\text{NCP}_W$ .

*Démonstration :* En utilisant les propositions 1.34 et 1.36, le premier point est clair : deux éléments de Coxeter d'un même sous-groupe parabolique sont conjugués d'après la théorie de Springer, donc deux éléments de Coxeter paraboliques  $w_1$  et  $w_2$ , associés à deux sous-groupes paraboliques  $W_1$  et  $W_2$ , sont conjugués si et seulement si les groupes  $W_1$  et  $W_2$  sont conjugués.

Le second point est direct en utilisant la proposition 1.34. □

**Définition 1.40.** Soit  $\Lambda$  une strate de  $\bar{\mathcal{L}}$ ,  $w \in \text{NCP}_W$ , et  $\bar{v} \in W \setminus V$ . On dit que :

- «  $w$  est de *type*  $\Lambda$  » si la classe de conjugaison de  $w$  correspond à  $\Lambda$  par la bijection ci-dessus, *i.e.* si  $\Lambda = W \cdot \text{Ker}(w - 1)$ .
- « la *strate* de  $\bar{v}$  est  $\Lambda$  » si  $\Lambda$  est la strate *minimale* de  $\bar{\mathcal{L}}$  contenant  $\bar{v}$ , *i.e.* si  $\bar{v} \in \Lambda^0$ , ou encore  $\Lambda = W \cdot V_v$ .

On peut ainsi reformuler le lemme 1.33 :

**Lemme 1.41.** *Soit  $(y, x) \in \mathcal{H}$ . Alors le type de l'élément de Coxeter parabolique  $f(y, x)$  est la strate du point  $(y, x)$ .*

Une conséquence du lemme est que si  $(y, x)$  est dans une strate ouverte de dimension  $n - k$ , alors  $\ell(f(y, x)) = k$  et la multiplicité de  $x$  dans  $\text{LL}(y)$  est  $k$ . Soit  $\bar{\mathcal{L}}_k$  l'ensemble des strates fermées de dimension exactement  $n - k$ , et posons :

$$\mathcal{H}_k := \bigcup_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_k} \Lambda .$$

$$\text{Ainsi } W \setminus V = \mathcal{H}_0 \supsetneq \mathcal{H}_1 = \mathcal{H} \supsetneq \mathcal{H}_2 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathcal{H}_n = \{0\}.$$

Désormais on suppose  $k \geq 1$ . Soit la projection  $\varphi : \mathcal{H} \rightarrow Y$ ,  $(y, x) \mapsto y$ . Notons  $Y_k := \varphi(\mathcal{H}_k)$ , et  $\alpha_k := k^1 1^{n-k} \vdash n$ . D'après le lemme 1.33, pour  $(y, x) \in \mathcal{H}$ , la longueur du facteur  $f(y, x)$  est donnée par la codimension de la strate de  $(y, x)$ , d'où la propriété suivante :

**Lemme 1.42.** *Soit  $(y, x) \in W \setminus V$ . Alors  $(y, x)$  est dans  $\mathcal{H}_k$  si et seulement si la multiplicité de  $x$  dans  $\text{LL}(y)$  est supérieure ou égale à  $k$ .*

*Par conséquent :  $Y_k = \text{LL}^{-1}(E_{\alpha_k})$ .*

La partie  $Y_k$  est donc ce que l'on avait noté  $Y_\lambda$  dans la partie 5, dans le cas où  $\lambda$  est la partition primitive  $\alpha_k$ . En particulier, comme  $\mathcal{K} = \text{LL}^{-1}(E_{\alpha_2})$ , on obtient  $Y_2 = \mathcal{K}$ .

## 1.7 Composantes connexes par arcs de $Y_k^0$

D'après le théorème 1.31, pour étudier les orbites d'Hurwitz primitives, il est intéressant d'identifier les composantes connexes par arcs de  $Y_k^0$ . Pour cela, on commence par déterminer les composantes irréductibles de  $Y_k$ .

### 1.7.1 Composantes irréductibles de $\mathcal{H}_k$ et de $Y_k$

On va d'abord montrer que les strates de  $\bar{\mathcal{L}}_k$  sont les composantes irréductibles de  $\mathcal{H}_k$ .

**Lemme 1.43.** *Les morphismes  $p : V \twoheadrightarrow W \setminus V$  et  $\varphi : \mathcal{H} \rightarrow Y$  sont finis. Par conséquent ils sont fermés, pour la topologie de Zariski.*

*Démonstration :* Pour  $p$ , c'est le théorème de Chevalley :  $\mathcal{O}_V \simeq \mathbb{C}[v_1, \dots, v_n]$ ,  $\mathcal{O}_{W \setminus V} \simeq \mathbb{C}[f_1, \dots, f_n]$ , et  $\mathcal{O}_V$  est un  $\mathcal{O}_{W \setminus V}$ -module libre de rang  $|W|$ .

Pour  $\varphi$ , on a  $\mathcal{O}_Y = \mathbb{C}[f_1, \dots, f_n]$  et  $\mathcal{O}_{\mathcal{H}} = \mathbb{C}[f_1, \dots, f_n]/(\Delta)$ , avec  $\Delta = f_n^n + a_2 f_n^{n-2} + \cdots + a_n$  et  $a_i \in \mathbb{C}[f_1, \dots, f_{n-1}]$ . En particulier,  $f_n$  est entier sur  $\varphi^*(\mathcal{O}_Y)$ . Donc  $\varphi^*$  fait de  $\mathcal{O}_{\mathcal{H}}$  un  $\mathcal{O}_Y$ -module libre de rang  $n$ .  $\square$

Par conséquent, les strates de  $\bar{\mathcal{L}}$ , images par  $p$  des plats dans  $V$ , sont fermées, et irréductibles (car l'image d'un irréductible par un morphisme algébrique est irréductible). D'où :

**Corollaire 1.44.** *Pour tout  $k \geq 1$ , les composantes irréductibles du fermé  $\mathcal{H}_k$  sont les strates  $\Lambda$  de  $\bar{\mathcal{L}}_k$ .*

Par  $\varphi$ , continue et fermée, on peut envoyer ces strates dans  $Y_k = \varphi(\mathcal{H}_k)$ . On a ainsi  $Y_k = \bigcup_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_k} \varphi(\Lambda)$ , avec les  $\varphi(\Lambda)$  fermés irréductibles dans  $Y$ .

Commençons par le cas  $k = 1$ , qui correspond aux classes de conjugaison de réflexions de  $\text{NCP}_W$ . En utilisant le théorème 1.27, on obtient le résultat suivant.

**Proposition 1.45.** *Soit  $\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_1$ . Alors, pour tout  $y \in Y - \mathcal{K}$ , au moins un des facteurs de  $\underline{\text{fact}}(y)$  a pour classe de conjugaison  $\Lambda$ .*

*Par conséquent, pour tout  $\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_1$ , on a :  $\varphi(\Lambda) = Y$ .*

*Démonstration :* D'après la surjectivité de l'application  $\underline{\text{fact}}$ , toute réflexion de  $\text{NCP}_W$  apparaît dans une factorisation  $\underline{\text{fact}}(y)$ . Donc, par transitivité de l'action d'Hurwitz sur  $\text{Red}(c)$ , si  $\xi \in \underline{\text{fact}}(Y - \mathcal{K})$ , alors toutes les classes de conjugaison de réflexions de  $\text{NCP}_W$  apparaissent dans  $\xi$ . En effet, l'ensemble des classes de conjugaison de réflexions faisant partie d'une décomposition réduite est invariant par l'action d'Hurwitz.

Soit  $y \in Y$ . Quitte à désingulariser, on peut trouver  $y' \in Y - \mathcal{K}$  tel que  $\underline{\text{fact}}(y')$  soit un raffinement de  $\underline{\text{fact}}(y)$ . Soit  $\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_1$ , alors  $\underline{\text{fact}}(y')$  contient un facteur de type  $\Lambda$ , donc il existe  $x$  dans  $\text{LL}(y)$  tel que  $f(y, x)$  soit multiple (pour  $\preceq$ ) d'une réflexion de type  $\Lambda$ , d'où  $(y, x) \in \Lambda$ , et  $y \in \varphi(\Lambda)$ .  $\square$

Désormais on suppose  $k \geq 2$ .

**Proposition 1.46.** *Les  $\varphi(\Lambda)$ , pour  $\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_k$ , sont distincts deux à deux, et sont les composantes irréductibles de  $Y_k$ .*

*Démonstration :* D'après la discussion précédente, il suffit de montrer que si  $\Lambda, \Lambda' \in \bar{\mathcal{L}}_k$ , avec  $\Lambda \neq \Lambda'$ , alors  $\varphi(\Lambda) \not\subseteq \varphi(\Lambda')$ .

La strate ouverte  $\Lambda^0$  correspond à une classe de conjugaison de sous-groupe parabolique de rang  $k$ . Soit  $c_\Lambda$  un élément de Coxeter parabolique, divisant  $c$ , de type  $\Lambda$ . Complétons avec  $n - k$  réflexions pour obtenir une factorisation complète :  $\xi = (c_\Lambda, s_{k+1}, \dots, s_n)$ . Alors, par 1.27, il existe  $y$  dans  $Y$ , tel que  $\underline{\text{fact}}(y) = \xi$ , et que  $\text{LL}(y)$  ait  $n - k + 1$  points distincts. Soit  $x$  le point multiple dans  $\text{LL}(y)$ ; alors  $(y, x) \in \Lambda^0$  puisque l'élément de Coxeter parabolique associé à  $x$  est de type  $\Lambda$ . D'où :  $y \in \varphi(\Lambda)$ .

Supposons que  $y \in \varphi(\Lambda')$ ; alors il existe  $x'$  tel que  $(y, x') \in \Lambda'$ . Donc, dans  $\underline{\text{fact}}(y) = \xi$ , on doit trouver un élément de type  $\Lambda'' \subseteq \Lambda'$ , de longueur supérieure ou égale à  $k$ ; or, dans  $\underline{\text{fact}}(y)$ , seul  $c_\Lambda$  convient, et il est de type  $\Lambda \not\subseteq \Lambda'$ . D'où  $y \notin \varphi(\Lambda')$ , ce qui conclut la preuve.  $\square$

## 1.7.2 Connexité par arcs

Notons comme plus haut  $Y_k^0 := \text{LL}^{-1}(E_{\alpha_k}^0)$ , et pour  $\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_k$ ,  $\varphi(\Lambda)^0 := \varphi(\Lambda) \cap Y_k^0$ .

Pour  $\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_k$ , notons  $\text{FACT}_{\alpha_k}^\Lambda(c)$  les factorisations primitives de  $c$ , de forme  $\alpha_k$ , et dont l'élément long est de type  $\Lambda$ . Alors, en vertu du lemme 1.41, on a :

$$\varphi(\Lambda)^0 = \underline{\text{fact}}^{-1}(\text{FACT}_{\alpha_k}^\Lambda(c)).$$

Ainsi  $Y_k^0 = \bigsqcup_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_k} \varphi(\Lambda)^0$ . D'après la surjectivité de  $\underline{\text{fact}}$ ,  $\varphi(\Lambda)^0$  est un ouvert (de Zariski) non vide de  $\varphi(\Lambda)$ .



**Proposition 1.47.** *Pour tout  $\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_k$ ,  $\varphi(\Lambda)^0$  est connexe par arcs.*

*Démonstration :* C'est un fait général, mais non trivial, que tout ouvert de Zariski d'une variété algébrique complexe irréductible est connexe par arcs. Dans le cas présent on peut cependant donner une démonstration explicite. Soit  $\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_k$ , et soit  $L \in \mathcal{L}$  tel que  $p(L) = \Lambda$ . Notons  $\Omega = L \cap (\varphi \circ p)^{-1}(\varphi(\Lambda)^0)$ . Comme  $p : V \rightarrow W \setminus V$  et  $\varphi : W \setminus V \rightarrow Y$  sont des morphismes algébriques,  $\Omega$  est un ouvert de Zariski de  $L$ . Comme  $L$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$ , la connexité par arcs de  $\Omega$  est alors évidente. D'autre part,  $\varphi(\Lambda)^0 = \varphi \circ p(\Omega)$ , avec  $\varphi \circ p$  continue, donc  $\varphi(\Lambda)^0$  est connexe par arcs.  $\square$

En utilisant le théorème 1.31, on va en déduire aisément que les  $\varphi(\Lambda)^0$ , pour  $\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_k$ , sont bien les composantes connexes par arcs de  $Y_k^0$ .

## 1.8 Forte conjugaison, et cas des réflexions

**Théorème 1.48.** *Soit  $k \in \{2, \dots, n\}$ . Alors :*

- les parties  $\varphi(\Lambda)^0$ , pour  $\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_k$ , sont les composantes connexes par arcs de  $Y_k^0$  ;
- les ensembles  $\underline{\text{fact}}(\varphi(\Lambda)^0) = \text{FACT}_{\alpha_k}^\Lambda(c)$  sont les orbites d'Hurwitz de  $\underline{\text{fact}}(Y_k^0) = \text{FACT}_{\alpha_k}(c)$  sous  $B_{n-k+1}$ .

*Par conséquent, deux éléments de  $\text{NCP}_W$  de longueur  $k$  sont fortement conjugués si et seulement s'ils sont conjugués.*

*Démonstration :* Soient  $y \in \varphi(\Lambda)^0$  et  $y' \in \varphi(\Lambda')^0$ , avec  $\Lambda, \Lambda' \in \bar{\mathcal{L}}_k$ . Si  $y$  et  $y'$  sont reliés par un chemin dans  $Y_k^0$ , alors, par le théorème 1.31,  $\underline{\text{fact}}(y)$  et  $\underline{\text{fact}}(y')$  sont dans la même orbite d'Hurwitz, donc leurs éléments longs sont conjugués, *i.e.*  $\Lambda = \Lambda'$  (par lemme 1.41). Donc la proposition 1.47 implique que les  $\varphi(\Lambda)^0$  sont les composantes connexes par arcs de  $Y_k^0$ . Les orbites d'Hurwitz de  $\underline{\text{fact}}(Y_k^0)$  sont alors directement données par le théorème 1.31.

Enfin, la propriété de forte conjugaison vient du fait qu'une factorisation de forme  $\alpha_k$  est dans  $\underline{\text{fact}}(\varphi(\Lambda)^0)$  si et seulement si son facteur long est de type  $\Lambda$ .  $\square$

Pour conclure la preuve du théorème 1.16, il reste à déterminer les classes de conjugaison forte de réflexions :

**Théorème 1.49.** *Soient  $r, r'$  deux réflexions de  $\text{NCP}_W$ . Si  $r$  et  $r'$  sont conjuguées, alors  $r$  et  $r'$  sont fortement conjuguées dans  $\text{NCP}_W$ .*

**Remarque 1.50.** Cette propriété apporte une précision intéressante concernant l'action d'Hurwitz de  $B_n$  sur  $\text{Red}(c)$  : si  $(r_1, r_2, \dots, r_n)$  et  $(r'_1, r'_2, \dots, r'_n)$  sont deux décompositions réduites de  $c$ , avec  $r_1, r'_1 \in \text{NCP}_W$  deux réflexions conjuguées, alors il existe une tresse de  $B_n$ , *pure par rapport au premier brin*, qui transforme l'une en l'autre (cf. remarque 1.15 sur le lien entre forte conjugaison et action d'Hurwitz).

*Démonstration :* Considérons  $\varphi : \mathcal{H} \rightarrow Y$ ,  $(y, x) \mapsto y$ . Notons  $\mathcal{H}' := \varphi^{-1}(Y - \mathcal{K})$ . Alors la restriction  $\varphi' : \mathcal{H}' \rightarrow Y - \mathcal{K}$  est un revêtement non ramifié à  $n$  feuillets (continuité des racines d'un polynôme à racines simples).

Soient  $r, r'$  deux réflexions de  $\text{NCP}_W$  conjuguées. Par surjectivité de  $\underline{\text{fact}}$ , il existe  $y, y' \in Y - \mathcal{K}$ , tels que  $\underline{\text{fact}}(y) = (r, r_2, \dots, r_n)$  et  $\underline{\text{fact}}(y') = (r', r'_2, \dots, r'_n)$ . On peut supposer que  $\text{LL}(y) = \text{LL}(y')$  ; soit  $x$  leur élément minimal pour  $\leq_{\text{lex}}$  (correspondant à  $r$  et  $r'$ ). Soit  $\Lambda$  la strate de  $\bar{\mathcal{L}}_1$  correspondant à la classe de conjugaison de  $r$  et  $r'$ . D'après le lemme 1.41,  $(y, x)$

et  $(y', x)$  sont dans  $\Lambda^0$ . Plus précisément,  $(y, x)$  et  $(y', x)$  sont dans  $\Lambda \cap \mathcal{H}'$ , que l'on va noter  $\Lambda'$ .

Notons que  $\Lambda'$  est un ouvert de Zariski de  $\Lambda$ , donc est connexe par arcs, par le même argument que pour la proposition 1.47. Par conséquent, on peut relier  $(y, x)$  et  $(y', x)$  par un chemin  $\gamma$  dans  $\mathcal{H}'$ . Celui-ci se projette en un chemin dans  $Y - \mathcal{K}$ , et détermine via LL un lacet dans  $E_n^{\text{reg}}$ . Ce lacet représente une tresse  $\beta$  qui, par construction, stabilise le premier brin  $(x)$ . Ainsi  $y' = y \cdot \beta$  par l'action de monodromie, et  $\underline{\text{fact}}(y') = \underline{\text{fact}}(y) \cdot \beta$  par l'action d'Hurwitz. Comme  $\beta$  stabilise le brin  $(x)$ , on en déduit que  $r$  et  $r'$  sont fortement conjugués, en vertu de la remarque 1.15. □

## Chapter 2

# Discriminants and Jacobians of virtual reflection groups

### Introduction

This chapter is a non-Galois version of the first few steps of the classical invariant theory of reflection groups. We will deal with questions of commutative algebra, that were at first motivated by empirical observations on the extensions defined by Lyashko-Looijenga morphisms.

We consider a finite polynomial ring extension  $A \subseteq B$ , where  $A$  is not necessarily the ring of invariants of  $B$  under a group action. Thus, we cannot simply imitate the classical proofs of invariant theory, as they really make use of the group action. However, in our setting, many properties seem to work the same way as for Galois extensions, particularly for Jacobian and “discriminant” of the extension.

Note that we use only elementary commutative algebra, and that the properties derived here are presumably folklore. The situation that we describe is in fact surprisingly basic and universal, yet apparently written nowhere from this perspective. The extensions usually studied in the literature, are either much too general, or of the form  $A = B^G \subseteq B$ , where  $B$  is a polynomial algebra; here we are rather interested in extensions  $A \subseteq B$  where  $B$  and  $A$  are polynomial algebras, but where we *do not require*  $A$  to be the ring of invariants of  $B$  under a group action.

The key ingredients to describe and understand the situation are:

- a notion of “*well-ramified*” polynomial extensions (this very natural property ought to be standard, but I could not find any references for that);
- properties of the *different* of an extension, that enable to apprehend the Jacobian of the extension.

### 2.1 Motivations and main theorem

Let  $V$  be an  $n$ -dimensional complex vector space, and  $W \subseteq \mathrm{GL}(V)$  a finite complex reflection group, with fundamental system of invariants  $f_1, \dots, f_n$  of degrees  $d_1 \leq \dots \leq d_n$ . From

Chevalley-Shephard-Todd theorem, we have the equality  $\mathbb{C}[V]^W = \mathbb{C}[f_1, \dots, f_n]$ , and the isomorphism

$$\begin{aligned} W \backslash V &\rightarrow \mathbb{C}^n \\ \bar{v} &\mapsto (f_1(v), \dots, f_n(v)). \end{aligned}$$

Let us denote by  $\mathcal{A}$  the set of all reflection hyperplanes, and consider the discriminant of  $W$  defined by

$$\Delta_W := \prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H^{e_H},$$

where  $\alpha_H$  is an equation of  $H$  and  $e_H$  is the order of the parabolic subgroup  $W_H$ . The discriminant is the equation of the hypersurface  $\mathcal{H} := W \backslash \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H$  in  $\mathbb{C}^n = \text{Spec } \mathbb{C}[f_1, \dots, f_n]$ .

Let us also consider the Jacobian  $J_W$  of the morphism  $(v_1, \dots, v_n) \mapsto (f_1(v), \dots, f_n(v))$ :

$$J_W := \det \left( \frac{\partial f_i}{\partial v_j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

It is well known (see for example [Kan01, Sect. 21]) that the Jacobian satisfies the following factorisation:

$$J_W \doteq \prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H^{e_H - 1},$$

where  $\doteq$  denotes equality up to a nonzero scalar; thus we have  $\Delta_W / J_W = \prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H$ , *i.e.* it is the product of the ramified polynomial of the extension  $\mathbb{C}[f_1, \dots, f_n] \subseteq \mathbb{C}[V]$ .

One can construct a stunningly similar situation related to the morphism LL defined in 1.18. Let us define an LL-discriminant:

$$D_{\text{LL}} := \text{Disc}(\Delta_W(f_1, \dots, f_n); f_n) \in \mathbb{C}[f_1, \dots, f_{n-1}]$$

(it is the equation of the bifurcation locus  $\mathcal{K}$ ). Consider also the LL-Jacobian  $J_{\text{LL}}$  (the Jacobian determinant of the morphism LL). As we can observe empirically, and will prove in all generality in the next chapter, it turns out that the couple of polynomials  $(J_{\text{LL}}, D_{\text{LL}})$  behaves similarly to the couple  $(J_W, \Delta_W)$ : the quotient  $D_{\text{LL}} / J_{\text{LL}}$  is the product of the ramified polynomials of the extension associated to LL, and their valuations in  $D_{\text{LL}}$  correspond to their ramification indices.

Although we mainly have in mind applications to  $D_{\text{LL}}$ , we devote this chapter to the following general setup. Let us consider a *finite graded polynomial extension*  $A \subseteq B$  (see Definition 2.4): we have a graded polynomial algebra  $B$  in  $n$  indeterminates over  $\mathbb{C}$ , and a polynomial subalgebra  $A$  generated by  $n$  weighted homogeneous elements of  $B$ , such that the extension is finite. The two key examples are:

- the Galois extensions  $\mathbb{C}[f_1, \dots, f_n] \subseteq \mathbb{C}[v_1, \dots, v_n]$ , defined by a quotient morphism  $V \rightarrow W \backslash V$ , where  $w$  is a reflection group and  $\mathbb{C}[f_1, \dots, f_n] = \mathbb{C}[V]^W$ ;
- the Lyashko-Looijenga extensions  $\mathbb{C}[a_2, \dots, a_n] \subseteq \mathbb{C}[f_1, \dots, f_{n-1}]$ , given by a morphism LL (with the notations of section 1.3.3); these extensions are indeed finite according to Thm. 1.19.

In the first section we give the precise definitions, and use the notion of *different ideal* of an extension to describe a factorisation of the Jacobian. In section 2.3, about the geometry of such extensions, we recall the relations between the ramification locus and the branch locus of a branched covering. In section 2.4 we define the *well-ramified property* for a finite graded polynomial extension (Def. 2.16), and we give several characterisations of this property (Prop. 2.17): this is a slightly weaker property than the normality of the extension, and is also equivalent to the equality between the preimage of the branch locus and the ramification locus.

The main result of this chapter is:

**Theorem 2.1.** *Let  $W = (A \subseteq B)$  be a finite graded polynomial extension. Then the Jacobian  $J$  of the extension verifies:*

$$J \doteq \prod_{Q \in \text{Spec}_1^{\text{ram}}(B)} Q^{e_Q - 1}$$

where  $\text{Spec}_1^{\text{ram}}(B)$  is the set of ramified polynomials in  $B$  (up to association), and the  $e_Q$  are the ramification indices.

Moreover, if the extension  $W$  is well-ramified (according to Def. 2.16), then:

$$(J) \cap A = \left( \prod_{Q \in \text{Spec}_1^{\text{ram}}(B)} Q^{e_Q} \right) \quad (\text{as ideal of } A).$$

**Remark 2.2.** The notation  $W$  for the extension is intentionally chosen to emphasize the analogy with the case when the extension is Galois, *i.e.* when it is given by the action of a reflection group  $W$  on the polynomial algebra  $B$ . Here there is not necessarily a group acting, but some features of the Galois case remain. That is why David Bessis proposes to call the extension  $W$  a *virtual reflection group*<sup>1</sup>. The polynomial  $\prod Q^{e_Q}$  in the theorem above could then be called the *discriminant* of the virtual reflection group  $W$ . One can wonder whether the analogies can go further, and to what extent it is possible to construct an “invariant theory” for virtual reflection groups.

In the next chapter, we will prove that LL extensions are well-ramified, and give a list of the analogies between the LL and the Galois situations (Sect. 3.3).

**Remark 2.3.** The first part of Thm. 2.1 is a quite easy consequence of commutative algebra properties. It is probably folklore, but I could not find the formula stated anywhere. I thank Raphaël Rouquier for his suggestion to use the different ideal.

## 2.2 Jacobian and different of a finite graded polynomial extension

### 2.2.1 General setting and notations

Let  $n$  be a positive integer, and denote by  $B$  the graded polynomial algebra  $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ , where  $X_1, \dots, X_n$  are indeterminates of respective weights  $b_1, \dots, b_n$ .

1. David Bessis, personal communication.

Let us consider  $n$  weighted homogeneous polynomials  $f_1, \dots, f_n$  in  $B$  (of respective weights  $a_1, \dots, a_n$ ), and the resulting (quasi-homogeneous) mapping

$$f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)).$$

We denote by  $A$  the algebra  $\mathbb{C}[f_1, \dots, f_n]$ , so that we have a ring extension  $A \subseteq B$ .

**Definition 2.4.** In the above situation, if  $B$  is an  $A$ -module of finite type, we will call  $A \subseteq B$  a *finite graded polynomial extension*.

**Remark 2.5.** In this setting, the extension is finite if and only if  $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ , because  $f$  is a quasi-homogeneous morphism (see for example [LZ04, Thm.5.1.5]). Moreover, the rank of  $B$  over  $A$  (or the *degree* of  $f$ ) is then equal to  $r := \prod a_i / \prod b_i$ .

The algebra  $B$  is Cohen-Macaulay, and is finite as an  $A$ -module, so  $B$  is also a free  $A$ -module of finite type. Thus  $A \subseteq B$  is a finite free extension of UFDs. We denote by  $K$  and  $L$  the fields of fractions of  $A$  and  $B$ . Let us recall some notations and properties about the ramification in this context (for example see [Ben93, Chap. 3]).

If  $\mathfrak{q}$  is a prime ideal of  $B$ , then  $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$  is a prime ideal of  $A$ . In this situation we say that  $\mathfrak{q}$  lies *over*  $\mathfrak{p}$ . By the Cohen-Macaulay theorem [Ben93, Thm.1.4.4],  $\mathfrak{q}$  has height one if and only if  $\mathfrak{p}$  has height one. In this case, we can write  $\mathfrak{q} = (Q)$  and  $\mathfrak{p} = (P)$ , where  $P \in A$  and  $Q \in B$  are irreducible, and  $(Q) \cap A = (P)$ .

The ramification index of  $\mathfrak{q}$  over  $\mathfrak{p}$  is:

$$e(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) := v_Q(P)$$

(we will rather write simply  $e_{\mathfrak{q}}$  or  $e_Q$ ).

We denote by  $\text{Spec}_1(B)$  (resp.  $\text{Spec}_1(A)$ ) the set of prime ideals of  $B$  (resp.  $A$ ) of height one. It is also the set of irreducible polynomials in  $B$ , up to association. By abusing the notation, in indices of products, we will write “ $Q \in \text{Spec}_1(B)$ ” instead of “ $\mathfrak{q} \in \text{Spec}_1(B)$  and  $Q$  is one polynomial representing  $\mathfrak{q}$ ”, and “ $Q$  over  $P$ ” instead of “ $(Q)$  over  $(P)$ ”.

We have the following elementary property:

**Lemma 2.6.** *Let  $(P) \in \text{Spec}_1(A)$  and  $(Q) \in \text{Spec}_1(B)$ . Then,  $(Q)$  lies over  $(P)$  if and only if  $Q$  divides  $P$  in  $B$ . Thus, for  $(P) \in \text{Spec}_1(A)$ , we have:*

$$P \doteq \prod_{Q \text{ over } P} Q^{e_Q}.$$

## 2.2.2 Different ideal and Jacobian

As our setup is compatible with that of [Ben93, Part.3.10], we can construct the *different*  $\mathfrak{D}_{B/A}$  of the extension. Let us recall that it is defined from the inverse different :

$$\mathfrak{D}_{B/A}^{-1} := \{x \in L \mid \forall y \in B, \text{Tr}_{L/K}(xy) \in A\},$$

where  $K$  and  $L$  are the fields of fractions of  $A$  and  $B$ ,  $L$  is regarded as a finite vector space over  $K$ , and  $\text{Tr}_{L/K}(u)$  denotes the trace of the endomorphism  $(x \mapsto ux)$ .

The different  $\mathfrak{D}_{B/A}$  is then by definition the inverse fractional ideal to  $\mathfrak{D}_{B/A}^{-1}$ . It is a (homogeneous) divisorial ideal; in our setting, as  $B$  is a UFD,  $\mathfrak{D}_{B/A}$  is thus a principal ideal. We will see below that the different is simply generated by the Jacobian  $J_{B/A}$  of the extension. For now, let us denote by  $\theta_{B/A}$  a homogeneous generator of  $\mathfrak{D}_{B/A}$ .

The different satisfies the following:

**Proposition 2.7** ([Ben93, Thm.3.10.2]). *If  $\mathfrak{q}$  and  $\mathfrak{p} = A \cap \mathfrak{q}$  are prime ideals of height one in  $B$  and  $A$ , then  $e(\mathfrak{q}, \mathfrak{p}) > 1$  if and only if  $\mathfrak{D}_{B/A} \subseteq \mathfrak{q}$ .*

*In other words: if  $Q$  is an irreducible polynomial in  $B$ , then  $e_Q > 1$  if and only if  $Q$  divides  $\theta_{B/A}$ .*

We define the set of ramified ideals:

$$\mathrm{Spec}_1^{\mathrm{ram}}(B) := \{\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}_1(B) \mid e_{\mathfrak{q}} > 1\},$$

which can also be seen as a system of representatives of the irreducible polynomials  $Q$  in  $B$  which are ramified over  $A$ . By the above theorem, we have:

$$\theta_{B/A} \doteq \prod_{Q \in \mathrm{Spec}_1^{\mathrm{ram}}(B)} Q^{v_Q(\theta_{B/A})}.$$

This can be refined as:

**Proposition 2.8.** *For all irreducible  $Q$  in  $B$ , we have:  $v_Q(\theta_{B/A}) = e_Q - 1$ . Thus:*

$$\theta_{B/A} \doteq \prod_{Q \in \mathrm{Spec}_1^{\mathrm{ram}}(B)} Q^{e_Q - 1}.$$

*Proof.* We localize at  $(Q)$  in order to obtain local Dedekind domains. Then we can use directly Prop. 13 in [Ser68, Ch. III].  $\square$

Let us show that the different is actually generated by the Jacobian determinant. For this, we need to introduce the *Kähler different* of the extension  $A \subseteq B$ . According to [Bro06] (end of first section), when  $B$  is a polynomial algebra, the Kähler different can be defined as the ideal generated by the Jacobians of all  $n$ -tuples of elements of  $A$ , with respect to  $X_1, \dots, X_n$ . But here we are in an even more specific situation, where  $A$  is also a polynomial ring. Thus, whenever we take  $g_1, \dots, g_n \in A = \mathbb{C}[f_1, \dots, f_n]$ , we have

$$\det \left( \frac{\partial g_i}{\partial X_k} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq k \leq n}} = \det \left( \frac{\partial g_i}{\partial f_j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \det \left( \frac{\partial f_j}{\partial X_k} \right)_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq n}},$$

so the Kähler different is simply the principal ideal of  $B$  generated by the polynomial

$$J_{B/A} := \mathrm{Jac}((f_1, \dots, f_n)/(X_1, \dots, X_n)) = \det \left( \frac{\partial f_i}{\partial X_j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

**Proposition 2.9.** *With the hypothesis above, we have:*

$$\theta_{B/A} \doteq J_{B/A}.$$

*Proof.* In [Bro06], Broer studies several notions of different ideals, and proves that under certain hypothesis they are equal. We are here in the hypothesis of his Corollary 1, which states in particular that the Kähler different is equal to the different  $\mathfrak{D}_{B/A}$ .  $\square$

Note that we use here a strong result (which applies in much more generality than what we need). It should be possible to give a simpler proof. For the sake of completeness, we add here a more explicit proof of the fact that the polynomials  $J_{B/A}$  and  $\theta_{B/A}$  have the same degree (using a ramification formula of Benson).

**Lemma 2.10.** *With the hypothesis and notations above, we have:*

$$\deg(\theta_{B/A}) = \deg(J_{B/A}).$$

*Proof.* First we need to recall some notations for graded algebras, see [Ben93, Ch.2.4]. If  $A$  is a graded algebra, and  $M$  a graded  $A$ -module, we denote the usual Hilbert-Poincaré series of  $M$  by  $\text{grdim } M$  (for “graded dimension”):  $\text{grdim } M := \sum_k \dim M_k t^k$ . If  $n$  is the Krull dimension of  $A$ , we define rational numbers  $\deg(M)$  and  $\psi(M)$  by the Laurent expansion about  $t = 1$ :

$$\text{grdim}(M) = \frac{\deg(M)}{(1-t)^n} + \frac{\psi(M)}{(1-t)^{n-1}} + o\left(\frac{1}{(1-t)^{n-1}}\right).$$

Now if we return to our context we can use the following ramification formula from [Ben93, Thm 3.12.1]:

$$|L : K| \psi(A) - \psi(B) = \frac{1}{2} \sum_{\mathfrak{p} \in \text{Spec}_1(B)} v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{D}_{B/A}) \psi(B/\mathfrak{p}).$$

We have  $\text{grdim } A = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1-t^{a_i}}$ , so by computing the derivative of  $(1-t)^n \text{grdim } A$  at  $t = 1$  we get:

$$\psi(A) = \frac{1}{\prod_i a_i} \sum_i \frac{a_i - 1}{2},$$

and similarly for  $\psi(B)$ . As  $|L : K| = \prod a_i / \prod b_i$ , we obtain:

$$|L : K| \psi(A) - \psi(B) = \frac{1}{\prod_i b_i} \sum_i \frac{a_i - b_i}{2} = \frac{1}{2 \prod_i b_i} \deg J_{B/A}.$$

On the other hand, for  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}_1(B)$ , if  $d$  denotes the degree of a homogeneous polynomial  $P$  generating  $\mathfrak{p}$ , we have

$$\text{grdim } B/\mathfrak{p} = (1-t^d) \prod_i \frac{1}{1-t^{b_i}},$$

so after computation we get

$$\psi(B/\mathfrak{p}) = \frac{d}{\prod_i b_i}.$$

Thus, the rhs of the ramification formula becomes

$$\frac{1}{2 \prod_i b_i} \sum_{P \in \text{Spec}_1(B)} v_P(\theta_{B/A}) \deg P = \frac{1}{2 \prod_i b_i} \deg \theta_{B/A}$$

and we can conclude that  $\deg J_{B/A} = \deg \theta_{B/A}$ .  $\square$



As a direct consequence of Propositions 2.8 and 2.9, we obtain the factorisation of  $J_{B/A}$ .

**Theorem 2.11.** *If  $A \subseteq B$  is a finite graded polynomial extension, then we have, with the notations above:*

$$J_{B/A} \doteq \prod_{Q \in \text{Spec}_1^{\text{ram}}(B)} Q^{e_Q-1}.$$

This formula settles the first part of Thm. 2.1. In section 2.4 we will define the well-ramified property, in order to deal with its second part.

## 2.3 Geometric properties

In this section we recall some definitions and elementary facts about the ramification locus and branch locus of a branched covering. These will be used in section 2.4, in order to give geometric interpretations of the well-ramified property (Def. 2.16 and Prop. 2.17).

### 2.3.1 Ramification locus and branch locus

Let us define the varieties  $U = \text{Spec } A$  and  $V = \text{Spec } B$ , so that to the extension  $A \subseteq B$  (as above), of degree  $r$ , corresponds an algebraic quasi-homogeneous finite morphism  $f : V \rightarrow U$ . We denote by  $J$  the Jacobian of  $f$ .

**Proposition 2.12.** *In  $V$ , we have equalities between:*

- (i) *the set of points where  $f$  is not étale, i.e. zeros of the Jacobian  $J$ ;*
- (ii) *the union of the sets of zeros of the ramified polynomials of  $B$ ;*
- (iii) *the set of zeros of the generator  $\theta_{B/A}$  of the different  $\mathfrak{D}_{B/A}$ .*

This set is called the *ramification locus*  $V_{\text{ram}}$ .

*Proof.* (ii)=(iii) comes from Prop. 2.7, and (iii)=(i) from Prop. 2.9. □

The following (well-known) proposition gives an upper bound for the cardinality of the fibers of  $f$ .

**Proposition 2.13.** *For all  $u \in U$ ,  $|f^{-1}(u)| \leq r$ , where  $r$  is the degree of  $f$ .*

We recall the proof for the convenience of the reader.

*Proof.* (After [Sha77, II.5.Thm.6].) Let  $u$  be in  $U$ , and write  $f^{-1}(u) = \{v_1, \dots, v_m\}$ . One can easily find an element  $b$  in  $B = \mathcal{O}_V$  such that all the values  $b(v_i)$  are distinct.

As  $f$  is finite,  $B$  is a module of finite type (of rank  $r$ ) over  $A$ . Thus, every element in  $B$  is a root of a unitary polynomial with coefficients in  $A$ , and degree less than or equal to  $r$ . Let  $P \in A[T]$  be such a polynomial for  $b$ , and write  $P = \sum_{i=0}^d a_i T^i$ , with  $d \leq r$  and  $a_d = 1$ . We have

$$\sum_{i=0}^d a_i b^i = 0.$$

For  $j \in \{1, \dots, m\}$ , as  $f(v_j) = u$ , specializing the above identity at  $v_j$  gives

$$\sum_{i=0}^d a_i(u) b(v_j)^i = 0.$$

So the polynomial  $\sum_i a_i(u) T^i$  has  $m$  distinct roots  $b(v_1), \dots, b(v_m)$ , and has degree  $d$ , so we obtain  $m \leq d \leq r$ .  $\square$

Points in  $U$  whose fiber does not have maximal cardinality are called *branch points*, and form the *branch locus* of  $f$  in  $U$ :

$$U_{\text{branch}} := \{u \in U, |f^{-1}(u)| < r\}.$$

It is easy to show that  $U_{\text{branch}}$  is closed for the Zariski topology and is not equal to  $U$  (cf. [Sha77, II.5.Thm. 7]), so that  $U - U_{\text{branch}}$  is dense in  $U$ .

**Proposition 2.14.** *With the notations above, we have the following equality:*

$$f(V_{\text{ram}}) = U_{\text{branch}}.$$

So  $V_{\text{ram}} \subseteq f^{-1}(U_{\text{branch}})$ . Moreover, the restriction of  $f$ :

$$V - f^{-1}(U_{\text{branch}}) \rightarrow U - U_{\text{branch}}$$

is a topological  $r$ -fold covering (for the transcendental topology).

*Proof.* We set  $U' := U - U_{\text{branch}}$  and  $V' := V - f^{-1}(U_{\text{branch}})$ ; these are Zariski-open.

First, let  $u$  be in  $U_{\text{branch}}$ . As  $U'$  is dense in  $U$ , we can find a sequence  $u^{(k)}$  of elements in  $U'$ , whose limit is  $u$ . Let us write  $f^{-1}(u) = \{v_1, \dots, v_p\}$  (with  $p < r$ ), and  $f^{-1}(u^{(k)}) = \{v_1^{(k)}, \dots, v_r^{(k)}\}$ . Up to extracting subsequences, we can assume that each sequence  $(v_i^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  converges towards one of the  $v_j$ . As  $r < n$ , we have at least two sequences, say  $v_1^{(k)}$  and  $v_2^{(k)}$ , whose limit is the same element of  $f^{-1}(u)$ , say  $v_1$ . But for all  $k$ , we have  $v_1^{(k)} \neq v_2^{(k)}$  and  $f(v_1^{(k)}) = f(v_2^{(k)}) = u^{(k)}$ . If  $J(v_1) \neq 0$ , this contradicts the inverse function theorem. So  $J(v_1) = 0$ , and  $u \in f(Z(J)) = f(V_{\text{ram}})$ .

By [Sha77, II.5.3.Cor. 2], if  $f$  is unramified at  $u$ , then for all  $v \in f^{-1}(u)$ , the tangent mapping of  $f$  at  $v$  is an isomorphism. That means exactly that  $f^{-1}(U - U_{\text{branch}}) \subseteq V - Z(J)$ , i.e.  $f(Z(J)) \subseteq U_{\text{branch}}$ .

Let us fix an element  $u$  in  $U'$ . For all  $v$  in  $f^{-1}(u)$ , we know that  $J(v) \neq 0$ , so, by the inverse function theorem, there exists a neighbourhood  $E_v$  of  $v$  in  $V'$  such that the restriction  $f : E_v \rightarrow f(E_v)$  is an isomorphism. Let us write  $f^{-1}(u) = \{v_1, \dots, v_r\}$ . Obviously we can suppose that the  $E_{v_i}$ 's are pairwise disjoint. Then  $\Omega_u := f(A_{v_1}) \cap \dots \cap f(A_{v_r})$  is a neighbourhood of  $u$  in  $U'$ , and for  $x$  in  $f^{-1}(\Omega_u)$  there exists a unique  $i$  such that  $x$  is in  $A_{v_i}$ . Thus we get natural map  $f^{-1}(\Omega_u) \rightarrow \Omega_u \times \{1, \dots, r\}$ ,  $x \mapsto (f(x), i)$ , which is clearly a homeomorphism.  $\square$

### 2.3.2 Ramification indices of a branched covering

As explained in the book of Namba<sup>2</sup> ([Nam87, Ex. 1.1.2]), the map  $f$  is more precisely a *finite branched covering* of  $U$  (according to [Nam87, Def. 1.1.1]), of degree  $r$ .

Because of the inclusion  $Z(J) = V_{\text{ram}} \subseteq f^{-1}(U_{\text{branch}})$ , we know that the irreducible components of  $f^{-1}(U_{\text{branch}})$  are the  $Z(Q)$ , for  $Q \in \text{Spec}_1^{\text{ram}}(B)$ , plus possibly some other components associated to unramified polynomials. We recall here, for the sake of completeness, some classical properties, thanks to which the ramification can be understood via the cardinality of the fibers (this will be needed in the next chapter).

**Proposition 2.15** (After Namba). *Let  $u$  be a non-singular point of  $U_{\text{branch}}$ , and  $v \in f^{-1}(u)$ . Then:*

- (a)  $v$  is non-singular in  $f^{-1}(U_{\text{branch}})$ . In particular, there is a unique irreducible component  $C_v$  of  $f^{-1}(U_{\text{branch}})$  containing  $v$ .
- (b) There exists a connected open neighbourhood  $\Omega_v$  of  $v$  such that, for the restriction of  $f$ :

$$\tilde{f} : \Omega_v \rightarrow f(\Omega_v) ,$$

for each  $u'$  in  $f(\Omega_v) \cap (U - U_{\text{branch}})$ , the cardinality of the fiber  $\tilde{f}^{-1}(u')$  is the ramification index  $e_{\mathfrak{q}}$  of the ideal  $\mathfrak{q} \in \text{Spec}_1(B)$  defining  $C_v$ .

*Proof.* We refer to Theorem 1.1.8 and Corollary 1.1.13 in [Nam87]. □

## 2.4 Well-ramified extensions

### 2.4.1 The well-ramified property

As above we consider a finite graded polynomial extension  $A \subseteq B$ , given by a morphism  $f$ . We denote by  $J$  its Jacobian, and by  $e_Q$  the ramification index of a polynomial  $Q \in \text{Spec}_1(B)$ .

**Definition 2.16.** We say that the extension  $A \subseteq B$ , or the morphism  $f$ , is *well-ramified*, if:

$$(J) \cap A = \left( \prod_{Q \in \text{Spec}_1^{\text{ram}}(B)} Q^{e_Q} \right) .$$

Flagrantly, this definition makes the second part of Thm. 2.1 a tautology. So our terminology might at this point seem quite mysterious. Actually the remaining of this chapter will be concerned with giving several equivalent characterizations of well-ramified extensions (Prop. 2.17), that ought to make this terminology (and the usefulness of this notion) much more transparent.

### 2.4.2 Characterisations of the well-ramified property

Most of the characterisations given below are very elementary, but are worth mentioning so as to get a full view of what is a well-ramified extension.

---

2. Thanks to José Ignacio Cogolludo for having suggested this reference to me.

**Proposition 2.17.** *Let  $A \subseteq B$  a finite graded polynomial extension, and  $f : V \rightarrow U$  its associated morphism. The following properties are equivalent:*

(i) *the extension  $A \subseteq B$  is well-ramified (as defined in 2.16);*

$$(ii) \left( \prod_{Q \in \text{Spec}_1^{\text{ram}}(B)} Q \right) \cap A = \left( \prod_{Q \in \text{Spec}_1^{\text{ram}}(B)} Q^{e_Q} \right);$$

(iii) *the polynomial  $\prod_{Q \in \text{Spec}_1^{\text{ram}}(B)} Q^{e_Q}$  lies in  $A$ ;*

(iv) *for any  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}_1(A)$ , if there exists  $\mathfrak{q}_0 \in \text{Spec}_1(B)$  over  $\mathfrak{p}$  which is ramified, then any other  $\mathfrak{q} \in \text{Spec}_1(B)$  over  $\mathfrak{p}$  is also ramified;*

(v) *if  $P$  is an irreducible polynomial in  $A$ , then, as a polynomial in  $B$ , either it is reduced, or it is completely non-reduced, i.e. any of its irreducible factors appears at least twice;*

(vi)  $f^{-1}(U_{\text{branch}}) = V_{\text{ram}}$ ;

(vii)  $f(V_{\text{ram}}) \cap f(V - V_{\text{ram}}) = \emptyset$ .

*Proof.* Let  $S := \prod_{Q \in \text{Spec}_1^{\text{ram}}(B)} Q$ , and  $R := \prod_{Q \in \text{Spec}_1^{\text{ram}}(B)} Q^{e_Q}$ . From Thm. 2.11, we have also:  $J = \prod_{Q \in \text{Spec}_1^{\text{ram}}(B)} Q^{e_Q - 1}$ .

We begin with some general elementary facts. We have  $(S) \cap A = \bigcap_{Q \in \text{Spec}_1^{\text{ram}}(B)} (Q) \cap A$ . For  $Q \in \text{Spec}_1^{\text{ram}}(B)$ , denote by  $\tilde{Q}$  an irreducible in  $A$  such that  $Q$  lies over  $\tilde{Q}$  (i.e.  $(Q) \cap A = \tilde{Q}$ ). As we work in UFDs, we get that  $(S) \cap A$  is principal, generated by

$$\tilde{S} := \text{lcm} \left( \tilde{Q} \mid Q \in \text{Spec}_1^{\text{ram}}(B) \right) .$$

For  $Q \in \text{Spec}_1^{\text{ram}}(B)$ ,  $Q^{e_Q}$  divides  $\tilde{Q}$ , so  $R$  divides  $\tilde{S}$ . Moreover,  $J$  divides  $R$ , so:  $\tilde{S} \subseteq (R) \cap A \subseteq (J) \cap A$ . Conversely,  $S$  divides  $J$ , so:  $(J) \cap A \subseteq (S) \cap A = (\tilde{S})$ .

Thus we always have  $(J) \cap A = (S) \cap A$ , and the statement (ii) is just an alternate definition of the well-ramified property: (i)  $\Leftrightarrow$  (ii).

(iii)  $\Leftrightarrow$  (ii): we have  $(S) \cap A \subseteq (R)$  and  $R \in (S)$ . So  $R$  lies in  $A$  if and only if  $(S) \cap A = (R)$ .

(v)  $\Leftrightarrow$  (iv), since (v) is just a ‘‘polynomial’’ rephrasing of (iv).

(iv)  $\Leftrightarrow$  (iii): let us denote by  $\text{Spec}_1^{\text{ram}}(A)$  the set of primes  $\mathfrak{p}$  in  $\text{Spec}_1(A)$  such that there exists at least one prime  $\mathfrak{q}$  over  $\mathfrak{p}$  which is ramified. Then:

$$R = \prod_{Q \in \text{Spec}_1^{\text{ram}}(B)} Q^{e_Q} = \prod_{P \in \text{Spec}_1^{\text{ram}}(A)} \prod_{\substack{Q \in \text{Spec}_1^{\text{ram}}(B) \\ Q \text{ over } P}} Q^{e_Q} . \quad (*)$$

If we suppose (iv), then whenever  $P$  is in  $\text{Spec}_1^{\text{ram}}(A)$ , all the  $Q$  over  $P$  are ramified. Thus:

$$R = \prod_{P \in \text{Spec}_1^{\text{ram}}(A)} \prod_{Q \text{ over } P} Q^{e_Q} = \prod_{P \in \text{Spec}_1^{\text{ram}}(A)} P$$

and the polynomial  $R$  lies in  $A$ .

Conversely, suppose that  $R$  lies in  $A$ . Consider  $P$  in  $\text{Spec}_1^{\text{ram}}(A)$ , and  $Q$  in  $\text{Spec}_1(B)$  lying over  $P$ . Then there exists  $Q_0$  in  $\text{Spec}_1^{\text{ram}}(B)$  such that  $(Q_0) \cap A = (P) = (Q) \cap A$ . As  $(R)$  is contained in  $(Q_0) \cap A$ , we obtain that  $Q$  also divides  $R$ , so is among the factors of the product (\*) above. Thus  $(Q)$  is ramified, and (iv) is verified.

(vii)  $\Rightarrow$  (vi): if  $v$  lies in  $f^{-1}(U_{\text{branch}})$ , we have  $f(v) \in U_{\text{branch}} = f(V_{\text{ram}})$ , so (vii) implies  $v \in V_{\text{ram}}$ . Thus  $f^{-1}(U_{\text{branch}}) \subseteq V_{\text{ram}}$ . The other inclusion is from Prop. 2.14.

(i)  $\Rightarrow$  (vii): we have  $(\tilde{S}) = (J) \cap A$ , so that  $Z(\tilde{S}) = f(Z(J))$ . If the extension is well-ramified, we obtain:  $\tilde{S} \doteq \prod_{Q \in \text{Spec}_1^{\text{ram}}(B)} Q^{e_Q}$ . Thus  $J$  and  $\tilde{S}$  have the same irreducible factors in  $B$ , which implies  $Z(J) = f^{-1}(Z(\tilde{S}))$ . So  $f(V_{\text{ram}}) = Z(\tilde{S})$ , whereas  $f(V - V_{\text{ram}}) = U - Z(\tilde{S})$ .

(vi)  $\Rightarrow$  (v): suppose that there exists  $Q$  in  $\text{Spec}_1^{\text{ram}}(B)$ , such that  $\tilde{Q}$  has one irreducible factor (in  $B$ ) which is not a ramified polynomial, say  $M$ . Then we can choose  $v$  in  $Z(M) - Z(J)$ . As  $M(v) = 0$ , we have  $\tilde{Q}(f(v)) = 0$  and  $\tilde{S}(f(v)) = 0$ . So  $f(v) \in Z(\tilde{S}) = f(Z(J)) = U_{\text{branch}}$ , which contradicts (i).  $\square$

### 2.4.3 Examples and counterexamples

A fundamental case when the extension is well-ramified is the Galois case. If  $A = B^G$ , with  $G$  a (reflection) group, all the ramification indices of the ideals over a prime of  $A$  are the same. In our setting, the well-ramified property is somewhat a weak version of the normality (the extension is always separable since we work in characteristic zero).

Of course the notion is strictly weaker than being a Galois extension. Take for example the extension  $\mathbb{C}[X^2 + Y^3, X^2Y^3] \subseteq \mathbb{C}[X, Y]$ , with Jacobian  $J = 6XY^2(X^2 - Y^3)$ : the ramified polynomials are  $(X)$  (index 2) and  $(Y)$  (index 3), both above  $(X^2Y^3)$ , and  $(X^2 - Y^3)$  (index 2), above  $((X^2 - Y^3)^2)$ .

A simple example of a not well-ramified extension is:

$$A = \mathbb{C}[X^2Y, X^2 + Y] \subseteq \mathbb{C}[X, Y] = B,$$

which is free of rank 4. Here the ideal  $(X^2Y)$  in  $A$  has two ideals above in  $B$ :  $(X)$  which is ramified and  $(Y)$  which is not, so the extension is not well-ramified. We compute  $\theta_{B/A} = \text{Jac}(f) = X(Y - X^2) = S$  (using the notations of the proof of Prop. 2.17). So  $R = X^2(Y - X^2)^2$  is not in  $A$ , actually  $(S) \cap A$  is generated by  $X^2Y(Y - X^2)^2$ .

In the next chapter we will show that the Lyashko-Looijenga extensions are well-ramified but not Galois (Thm. 3.3).



## Chapter 3

# Geometry of the Lyashko-Looijenga morphism and submaximal factorisations of a Coxeter element

In this chapter, we apply the results of Chapter 2 to the Lyashko-Looijenga morphism LL. We prove that LL is a well-ramified morphism (according to Def. 2.16), and describe the ramified polynomials in terms of the geometry of the discriminant hypersurface (see Thm. 3.3). Then we use the constructions of Chapter 1 to deduce combinatorial results about the factorisations of a Coxeter element in  $(n - 1)$  blocks.

### 3.1 Lyashko-Looijenga morphisms and factorisations of a Coxeter element

Although we refer to Chapter 1 for the precise definitions of the morphism LL and the block factorisations of a Coxeter element  $c$ , we do recall here a few useful constructions about the strata of  $\mathcal{H}$ , the map fact, and the relations between fact and LL, so that this chapter should be intelligible without reading Chapter 1, except for the definitions of section 1.3.

The notations are the same as in Chapter 1. We fix a well-generated, irreducible (finite) complex reflection group  $W$ , and we choose invariant polynomials  $f_1, \dots, f_n$ , homogeneous of degrees  $d_1 \leq \dots \leq d_n = h$ , such that the discriminant of  $W$  has the form:

$$\Delta_W = f_n^n + a_2 f_n^{n-2} + \dots + a_n ,$$

with  $a_i \in \mathbb{C}[f_1, \dots, f_{n-1}]$ . The Lyashko-Looijenga morphism is then:

$$\begin{aligned} \text{LL} : \quad \mathbb{C}^{n-1} &\rightarrow \mathbb{C}^{n-1} \\ (f_1, \dots, f_{n-1}) &\mapsto (a_2, \dots, a_n) \end{aligned}$$

We also use the notation LL to denote the set-theoretical incarnation of this algebraic morphism, *i.e.* the map

$$\begin{aligned} Y &\rightarrow E_n \\ y = (f_1, \dots, f_{n-1}) &\mapsto \text{multiset of roots of } \Delta_W(f_1, \dots, f_n) , \end{aligned}$$

where  $E_n$  is the set of centered configurations of  $n$  points in  $\mathbb{C}$ .

### 3.1.1 Discriminant stratification

The space  $V$ , together with the hyperplane arrangement  $\mathcal{A}$ , admits a natural stratification by the *flats*, elements of the intersection lattice  $\mathcal{L} := \{\bigcap_{H \in \mathcal{B}} H \mid \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}\}$ .

As the  $W$ -action on  $V$  maps flats to flats, this stratification gives rise to a quotient stratification  $\bar{\mathcal{L}}$  of  $W \backslash V$ :

$$\bar{\mathcal{L}} = W \backslash \mathcal{L} = (p(L))_{L \in \mathcal{L}} = (W \cdot L)_{L \in \mathcal{L}} ,$$

where  $p$  is the projection  $V \rightarrow W \backslash V$ . For each stratum  $\Lambda$  in  $\bar{\mathcal{L}}$ , we denote by  $\Lambda^0$  the complement in  $\Lambda$  of the union of the strata strictly included in  $\Lambda$ . The  $(\Lambda^0)_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}}$  form an open stratification of  $W \backslash V$ , called the *discriminant stratification*.

There is a natural bijection between the set of flats in  $V$  and the set of parabolic subgroups of  $W$  (Steinberg's theorem); this leads to a bijection between the stratification  $\bar{\mathcal{L}}$  and the set of conjugacy classes of parabolic subgroups. Moreover,  $\bar{\mathcal{L}}$  is in bijection with the set of conjugacy classes of *parabolic Coxeter elements* (which are Coxeter elements of parabolic subgroups). Through these bijections, the codimension of a stratum  $\Lambda$  corresponds to the rank of the associated parabolic subgroup, and to the length of the parabolic Coxeter element. We refer to Sect. 1.6 for details and proofs.

### 3.1.2 Geometric factorisations and compatibilities

In Sect. 1.4, we constructed, using the topology of  $\mathcal{H} \subseteq W \backslash V \simeq Y \times \mathbb{C}$ , a map:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\rightarrow W \\ (y, x) &\mapsto c_{y,x} , \end{aligned}$$

which satisfies the two fundamental properties (note that  $(y, x)$  lies in  $\mathcal{H}$  if and only if the multiset  $\text{LL}(y)$  contains  $x$ ):

- (P1) if  $(x_1, \dots, x_p)$  is the ordered support of  $\text{LL}(y)$  (for the lexicographical order on  $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ ), then the  $p$ -tuple  $(c_{y,x_1}, \dots, c_{y,x_p})$  lies in  $\text{FACT}_p(c)$ ;
- (P2) for all  $x \in \text{LL}(y)$ ,  $c_{y,x}$  is a parabolic Coxeter element; its length is equal to the multiplicity of  $x$  in  $\text{LL}(y)$ , and its conjugacy class corresponds to the unique stratum  $\Lambda$  in  $\bar{\mathcal{L}}$  such that  $(y, x) \in \Lambda^0$ .

According to property (P1), we call *factorisation of  $c$  associated to  $y$* , and denote by  $\underline{\text{fact}}(y)$ , the tuple  $(c_{y,x_1}, \dots, c_{y,x_p})$  (where  $(x_1, \dots, x_p)$  is the ordered support of  $\text{LL}(y)$ ).

Any block factorisation determines a composition of  $n$ . We can also associate to any configuration of  $E_n$  a composition of  $n$ , formed by the multiplicities of its elements in the lexicographical order. Then property (P2) implies that for any  $y$  in  $Y$ , the compositions associated to  $\text{LL}(y)$  and  $\underline{\text{fact}}(y)$  are the same. The third fundamental property (Thm. 1.27) is:

- (P3) the map  $\text{LL} \times \underline{\text{fact}} : Y \rightarrow E_n \times \text{FACT}(c)$  is injective, and its image is the entire set of compatible pairs (*i.e.* with same associated composition).

In other words, for each  $y \in Y$ , the fiber  $\text{LL}^{-1}(\text{LL}(y))$  is in bijection (via  $\underline{\text{fact}}$ ) with the set  $\text{FACT}_\mu(c)$  where  $\mu$  is the composition of  $n$  associated to  $\underline{\text{fact}}(y)$ .



## 3.2 Lyashko-Looijenga extensions

### 3.2.1 Ramification locus for LL

Let us first explain the reason why LL is étale on  $Y - \mathcal{K}$  (as stated in Thm. 1.19), where

$$\mathcal{K} = \{y \in Y \mid \text{the multiset } \text{LL}(y) \text{ has multiple points}\}.$$

The argument goes back to Looijenga (in [Loo74]), and is used without details in the proof of Lemma 5.6 of [Bes07a].

We begin with a more general setting. Let  $n \geq 1$ , and  $P \in \mathbb{C}[T_1, \dots, T_n]$  of the form:

$$P = T_n^n + a_2(T_1, \dots, T_{n-1})T_n^{n-2} + \dots + a_n(T_1, \dots, T_{n-1})$$

(here the polynomials  $a_i$  do not need to be quasi-homogeneous). As in the case of LL we define the hypersurface  $\mathcal{H} := \{P = 0\} \subseteq \mathbb{C}^n$ , and a map  $\psi : \mathbb{C}^{n-1} \rightarrow E_n$ , sending  $y = (T_1, \dots, T_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$  to the multiset of roots of  $P(y, T_n)$  (as a polynomial in  $T_n$ ). This map can also be considered as the morphism  $y \mapsto (a_2(y), \dots, a_n(y))$ .

We set:

$$J_\psi(y) = \text{Jac}((a_2, \dots, a_n)/y) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial a_i}{\partial T_j} \end{pmatrix}_{\substack{2 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n-1}}$$

**Proposition 3.1** (after Looijenga). *With the notations above, let  $y$  be a point in  $\mathbb{C}^{n-1}$ , with  $\psi(y)$  being the multiset  $\{x_1, \dots, x_n\}$ . Suppose that the  $x_i$ 's are pairwise distinct.*

*Then the points  $(y, x_i)$  are regular on  $\mathcal{H}$ . Moreover, the  $n$  hyperplanes tangent to  $\mathcal{H}$  at  $(y, x_1), \dots, (y, x_n)$  are in general position if and only if  $J_\psi(y) \neq 0$  (i.e.  $\psi$  is étale at  $y$ ).*

*Proof.* Let  $\alpha$  be a point in  $\mathcal{H}$ . If it exists, the hyperplane tangent to  $\mathcal{H}$  at  $\alpha$  is directed by its normal vector:  $\text{grad}_\alpha P = \left( \frac{\partial P}{\partial T_1}(\alpha), \dots, \frac{\partial P}{\partial T_n}(\alpha) \right)$ .

Let  $y$  be a point in  $\mathbb{C}^{n-1}$  such that the  $x_i$ 's associated are pairwise distinct. Then the polynomial in  $T_n$   $P(y, T_n)$  has the  $x_i$ 's as simple roots, so for each  $i$ ,  $\frac{\partial P}{\partial T_n}(y, x_i) \neq 0$ , and the point  $(y, x_i)$  is regular on  $\mathcal{H}$ .

The tangent hyperplanes associated to  $y$  are in general position if and only if  $\det M_y \neq 0$ , where  $M_y$  is the matrix with columns:

$$\left( \text{grad}_{(y, x_1)} P ; \dots ; \text{grad}_{(y, x_n)} P \right).$$

After computation, we get:  $M_y = A_y \times V_y$ , where

$$A_y = \left[ \begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & \begin{pmatrix} \frac{\partial a_j}{\partial T_i} \end{pmatrix}_{\substack{1 \leq i \leq n-1 \\ 2 \leq j \leq n}} & \\ \hline n & 0 & (n-2)a_2(y) & \dots & a_{n-1}(y) \end{array} \right] \text{ and } V_y = \begin{bmatrix} x_1^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & \dots & x_n \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

As the  $x_i$ 's are distinct, the Vandermonde matrix  $V_y$  is invertible. As  $\det C_y = nJ(y)$ , we can conclude that  $\det M_y \neq 0$  if and only if  $J_\psi(y) \neq 0$ .  $\square$

If the  $x_i$ 's are not distinct, nothing can be said in general. But if  $\psi$  is a Lyashko-Looijenga morphism LL, then we can deduce the following property.

**Corollary 3.2.** *Let  $y$  be a point in  $\mathbb{C}^{n-1}$ , and suppose that  $\text{LL}(y)$  contains  $n$  distinct points. Then  $J_{\text{LL}}(y) \neq 0$ .*

*In other words, LL is étale on (at least)  $Y - \mathcal{K}$ .*

*Proof.* Set  $\text{LL}(y) = \{x_1, \dots, x_n\}$ . As the  $x_i$ 's are distinct, from lemma 3.1 one has to study the hyperplanes tangent to  $\mathcal{H}$  at  $(y, x_1), \dots, (y, x_n)$ . By using their characterization in terms of basic derivations of  $W$ , it is straightforward to show that the  $n$  hyperplanes are always in general position: we refer to the proof of [Bes07a, Lemma 5.6].  $\square$

In the following we will prove the equality  $Z(J_{\text{LL}}) = \mathcal{K}$ , *i.e.* that LL is étale exactly on  $Y - \mathcal{K}$ .

### 3.2.2 The well-ramified property for LL

We know that LL is a finite quasihomogeneous map of degree  $n!h^n/|W|$ . So we have, as in Chapter 2, a graded finite polynomial extension

$$A = \mathbb{C}[a_2, \dots, a_n] \subseteq \mathbb{C}[f_1, \dots, f_n] = B,$$

and we will use the same notations. In particular, LL is a branched covering (of  $E_n$ , or of  $\mathbb{C}^{n-1}$ ), and we can use the terminology and the properties of section 2.3.

Theorem 2.11 gives

$$J_{\text{LL}} = \text{Jac}((a_2, \dots, a_n)/(f_1, \dots, f_{n-1})) = \prod_{Q \in \text{Spec}_1^{\text{ram}}(B)} Q^{e_Q-1}.$$

Let us define

$$D := \text{Disc}(f_n^n + a_2 f_n^{n-2} + \dots + a_n; f_n),$$

so that  $\mathcal{K} = \text{LL}^{-1}(E_n - E_n^{\text{reg}})$  is the zero locus of  $D$  in  $Y$ . The irreducible components of  $\mathcal{K}$  are naturally indexed by the conjugacy classes of parabolic subgroups of  $W$  of rank 2. Let us recall from Sect. 1.6.3 and 1.7.1 some useful properties.

We denote by  $\bar{\mathcal{L}}_2$  the set of all closed strata in  $\bar{\mathcal{L}}$  of codimension 2, and we define the map

$$\begin{aligned} \varphi: W \setminus V \simeq Y \times \mathbb{C} &\rightarrow Y \\ \bar{v} = (y, x) &\mapsto y \end{aligned}$$

Then, using the notations and properties of section 3.1.2, we have:

$$\begin{aligned} y \in \mathcal{K} &\Leftrightarrow \exists x \in \text{LL}(y), \text{ with multiplicity } \geq 2 \\ &\Leftrightarrow \exists x \in \text{LL}(y), \text{ such that } \ell(c_{y,x}) \geq 2 \\ &\Leftrightarrow \exists x \in \text{LL}(y), \text{ such that } (y, x) \in \Gamma^0 \text{ for some stratum } \Gamma \in \bar{\mathcal{L}} \text{ of codim. } \geq 2 \\ &\Leftrightarrow \exists x \in \text{LL}(y), \exists \Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2, \text{ such that } (y, x) \in \Lambda \\ &\Leftrightarrow \exists \Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2, \text{ such that } y \in \varphi(\Lambda). \end{aligned}$$

So the hypersurface  $\mathcal{K}$  is the union of the  $\varphi(\Lambda)$ , for  $\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2$ ; moreover, they are its irreducible components, according to Prop. 1.46. Thus we can write

$$D = \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_{\Lambda}^{r_{\Lambda}},$$

for some  $r_\Lambda \geq 1$ , where the  $D_\Lambda$  are irreducible polynomials in  $B$  such that  $\varphi(\Lambda) = Z(D_\Lambda)$ .

We can now give an important interpretation of the integers  $r_\Lambda$ , and prove that LL is a well-ramified morphism, according to Def. 2.16.

**Theorem 3.3.** *Let LL be the Lyashko-Looijenga extension associated to a well-generated, irreducible complex reflection group, together with the above notations.*

*For any  $\Lambda$  in  $\bar{\mathcal{L}}_2$ , let  $w$  be a (length 2) parabolic Coxeter element of  $W$  in the conjugacy class corresponding to  $\Lambda$ . Then  $r_\Lambda$  is the number of reduced decompositions of  $w$  in two reflections (in the case when  $W$  is a 2-reflection group, it is also the order of  $w$ ).*

*Moreover, we have:*

(a) LL is a well-ramified extension;

(b)  $D = \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda}$  is a generator for the ideal  $(J_{\text{LL}}) \cap A$ ;

(c)  $J_{\text{LL}} \doteq \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda - 1}$ , and the ramified polynomials of  $B$  are the  $D_\Lambda$ .

*Proof.* The polynomial  $D$  is irreducible in  $A$  since, as a polynomial in  $a_2, \dots, a_n$ , it is the discriminant of a reflection group of type  $A_{n-1}$ . Therefore, for all  $\Lambda$  in  $\bar{\mathcal{L}}_2$ , the inclusion

$$(D_\Lambda) \cap A \supseteq (D)$$

is an inclusion between prime ideals of height one in  $A$ . So we have  $(D_\Lambda) \cap A = (D)$ , and  $e_{D_\Lambda} = v_{D_\Lambda}(D) = r_\Lambda$ .

According to Corollary 3.2, if  $J_{\text{LL}}(y) = 0$ , then  $\text{LL}(y) \notin E_n^{\text{reg}}$ . So the variety of zeros of  $J_{\text{LL}}$  (defined by the ramified polynomials in  $B$ ) is included in the preimage

$$\text{LL}^{-1}(Z(D)) = \bigcup_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} Z(D_\Lambda) .$$

Thus all the ramified polynomials in  $B$  are in  $\{D_\Lambda, \Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2\}$ .

Let  $\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2$ , and  $\mu$  be the composition  $(2, 1, \dots, 1)$  of  $n$ . Choose  $\xi = (w, s_3, \dots, s_n)$  in  $\text{FACT}_\mu(c)$  such that the conjugacy class of  $w$  (the only element of length 2 in  $\xi$ ) corresponds to  $\Lambda$ . Fix  $e \in E_n$ , with composition type  $\mu$ , and such that the real parts of its support are distinct. There exists a unique  $y_0$  in  $Y$ , such that  $\text{LL}(y_0) = e$  and  $\underline{\text{fact}}(y_0) = \xi$  (Property (P3) in Sect. 3.1.2). Moreover this  $y_0$  lies in  $\varphi(\Lambda)$  (property (P2)). Using Definition 1.21 of the map  $\underline{\text{fact}}$ , and the ‘‘Hurwitz rule’’ (Lemma 1.24), we deduce that for a sufficiently small connected neighbourhood  $\Omega_0$  of  $y_0$ , if  $y$  is in  $\Omega_0 \cap (Y - \mathcal{K})$ , then  $\underline{\text{fact}}(y)$  is in

$$F_w := \{(s'_1, s'_2, \dots, s'_n) \in \text{Red}_{\mathcal{R}}(c) \mid s'_1 s'_2 = w \text{ and } s'_i = s_i \ \forall i \geq 3\} .$$

Let us fix  $y$  in  $\Omega_0 \cap (Y - \mathcal{K})$ . Then, because of property (P3), we get an injection

$$\underline{\text{fact}} : \text{LL}^{-1}(\text{LL}(y)) \cap \Omega_0 \hookrightarrow F_w .$$

But this map is also surjective, thanks to the covering properties of LL and the transitivity of the Hurwitz action on  $w$  (cf. Chapter 1). Indeed, we can ‘‘braid’’  $s'_1$  and  $s'_2$  (by cyclically

intertwining the two corresponding points of  $\text{LL}(y)$ , while staying in the neighbourhood) so as to obtain any factorisation of  $w$ . Thus:

$$|\text{LL}^{-1}(\text{LL}(y)) \cap \Omega_0| = |F_w| .$$

Using the characterization of the ramification index (Prop. 2.15), we infer

$$r_\Lambda = e_{D_\Lambda} = |F_w| ,$$

which is the number of reduced decompositions of  $w$ , *i.e.* the Lyahko-Looijenga number for the parabolic subgroups in the conjugacy class  $\Lambda$ .

For any rank 2 parabolic subgroup with degrees  $d'_1, h'$ , the LL-number is  $2h'/d'_1$ . In the particular case when  $W$  is a 2-reflection group, such a subgroup is a dihedral group, hence  $r_\Lambda$  is also the order  $h'$  of the associated parabolic Coxeter element  $w$ .

Consequently, for all  $\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2$ ,  $e_{D_\Lambda}$  is strictly greater than 1, so the  $D_\Lambda$ ,  $\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2$  are exactly the ramified polynomials for the extension LL. This directly implies statement (c).

Moreover, we obtain that

$$\prod_{Q \in \text{Spec}_1^{\text{ram}}(B)} Q^{e_Q} = \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{e_{D_\Lambda}} = D_{\text{LL}} ,$$

so it lies in  $A$ . We recognize one of our characterization of a well-ramified extension (namely Prop. 2.17(iii)), from which we deduce (a) and (b).  $\square$

### 3.2.3 A more intrinsic definition of the Lyashko-Looijenga Jacobian

In this subsection we give an alternate definition for the Jacobian  $J_{\text{LL}}$ , which is more intrinsic, and which allows to recover a formula observed by K. Saito.

We will use the following elementary property.

Suppose  $P \in \mathbb{C}[T_1, \dots, T_{n-1}, X]$  has the form:

$$P = X^n + b_1 X^{n-1} + \dots + b_n ,$$

with  $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}[T_1, \dots, T_{n-1}]$ . Note that we do not require  $b_1$  to be zero. Let us denote by  $J(P)$  the polynomial:

$$J(P) := \text{Jac} \left( \left( P, \frac{\partial P}{\partial X}, \dots, \frac{\partial^{n-1} P}{\partial X^{n-1}} \right) / (T_1, \dots, T_{n-1}, X) \right) .$$

**Lemma 3.4.** *Let  $P$  be as above. We set  $Y = X + \frac{b_1}{n}$  and denote by  $Q$  the polynomial in  $\mathbb{C}[T_1, \dots, T_{n-1}, Y]$  such that  $Q(T_1, \dots, T_{n-1}, Y) = P(T_1, \dots, T_{n-1}, X)$ , so that  $Q = Y^n + a_2 Y^{n-2} + \dots + a_n$ , with  $a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}[T_1, \dots, T_{n-1}]$ .*

*We define  $J(P)$  as above and  $J(Q)$  similarly ( $Y$  replacing  $X$ ). Then:*

(i)  $J(P) = J(Q)$ ;

(ii)  $J(P)$  does not depend on  $X$ , and  $J(P) \doteq \text{Jac}((a_2, \dots, a_n)/(T_1, \dots, T_{n-1}))$ .

*Proof.* (i) Let us denote by  $A$  and  $B$  the  $n \times n$  matrices corresponding to  $J(P)$  and  $J(Q)$  respectively. For  $j = 1, \dots, n$ , the  $j$ -th column of  $A$  is

$$A_j := \left( \frac{\partial}{\partial T_j} \left( \frac{\partial^i P}{\partial X^i} \right) \right)$$

with  $i$  running from 0 to  $n - 1$  (here  $T_n := X$ ).

We define similarly  $B_j$  (replacing  $P$  and  $X$  by  $Q$  and  $Y$ ). Then, we compute that  $B_n = A_n$ , and for  $j = 1, \dots, n - 1$ :

$$B_j = A_j - \frac{1}{n} \frac{\partial b_1}{\partial T_j} A_n .$$

So  $B$  and  $A$  have the same determinant and  $J(P) = J(Q)$ .

(ii) Let us differentiate  $J(P)$  with respect to  $X$ . If  $L_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) is the  $i$ -th line of the matrix  $A$ , we have

$$\frac{\partial L_n}{\partial X} = 0 , \text{ and for } i = 1, \dots, n - 1, \frac{\partial L_i}{\partial X} = L_{i+1} .$$

So  $\frac{\partial(J(P))}{\partial X} = 0$ .

Similarly,  $J(Q)$  does not depend on  $Y$ . As a consequence,  $J(P)(T_1, \dots, T_{n-1}, X) = J(Q)(T_1, \dots, T_{n-1}, 0)$ , which is by definition clearly equal to

$$\pm n! \left( \prod_{k=0}^{n-2} k! \right) \text{Jac}((a_2, \dots, a_n)/(T_1, \dots, T_{n-1})) .$$

□

Consequently, we have an intrinsic definition for the Lyashko-Looijenga Jacobian:

$$J_{\text{LL}} \doteq J(\Delta_W) = \text{Jac} \left( \left( \Delta_W, \frac{\partial \Delta_W}{\partial f_n}, \dots, \frac{\partial^{n-1} \Delta_W}{\partial f_n^{n-1}} \right) / (f_1, \dots, f_n) \right) .$$

where  $f_1, \dots, f_n$  do not need to be chosen such that the coefficient of  $f_n^{n-1}$  in  $\Delta_W$  is zero.

Note that for the computation of  $D_{\text{LL}}$  also, the fact that the coefficient  $a_1$  is zero in  $\Delta_W$  is not important, because of invariance by translation.

**Remark 3.5.** With these alternative definitions, the factorisation of the Jacobian given by Thm. 3.3 has already been observed (for real groups) by Kyoji Saito: it is Formula 2.2.3 in [Sai04a]. He uses this formula in his study of the semi-algebraic geometry of the quotient  $W \setminus V$ .

His proof was case-by-case and detailed in an unpublished extended version of the paper ([Sai, Lemma 3.5]).

	Complex reflection group	Lyashko-Looijenga extension
Morphism:	$p: V \rightarrow W \setminus V$ $(v_1, \dots, v_n) \mapsto (f_1(v), \dots, f_n(v))$	LL: $Y \rightarrow \mathbb{C}^{n-1}$ $(y_1, \dots, y_{n-1}) \mapsto (a_2(y), \dots, a_n(y))$
Extension:	$\mathbb{C}[f_1, \dots, f_n] = \mathbb{C}[V]^W \subseteq \mathbb{C}[V]$	$\mathbb{C}[a_2, \dots, a_n] \subseteq \mathbb{C}[y_1, \dots, y_{n-1}]$
Free, of rank:	$ W  = d_1 \dots d_n$ ; Galois	$n!h^n/ W  = \prod ih / \prod d_j$ ; non-Galois
Weights:	$\deg v_j = 1, \deg f_i = d_i$	$\deg y_j = d_j, \deg a_i = ih$
Unramified covering:	$V^{\text{reg}} \rightarrow W \setminus V^{\text{reg}}$	$Y - \mathcal{K} \rightarrow E_n^{\text{reg}}$
Generic fiber:	$\simeq W$	$\simeq \text{Red}_{\mathcal{R}}(c)$
Ramified part:	$\bigcup_{H \in \mathcal{A}} H \rightarrow (\bigcup H)/W = \mathcal{H}$	$\mathcal{K} = \bigcup_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} \varphi(\Lambda) \rightarrow E_\alpha$
Discriminant:	$\Delta_W = \prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H^{e_H} \in \mathbb{C}[f_1, \dots, f_n]$	$D_{\text{LL}} = \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda} \in \mathbb{C}[a_2, \dots, a_n]$
Ramification indices:	$e_H =  W_H $	$r_\Lambda = \text{order of parabolic elements of type } \Lambda$
Jacobian:	$J_W = \prod \alpha_H^{e_H-1} \in \mathbb{C}[V]$	$J_{\text{LL}} = \prod D_\Lambda^{r_\Lambda-1} \in \mathbb{C}[f_1, \dots, f_{n-1}]$

Table 3.1: Analogies between Galois extensions and Lyashko-Looijenga extensions.

### 3.3 The Lyashko-Looijenga extension as a virtual reflection group

In Table 3.1 we list the first analogies between the setting of Galois extensions (polynomial extension with a reflection group acting) and that of the Lyashko-Looijenga extensions, which are an example of “virtual reflection groups”, in the sense of Bessis. This is not an exhaustive list, and we may wonder if the analogies can be made further.

### 3.4 Combinatorics of the submaximal factorisations

In this section we are going to use Thm. 3.3 to count specific factorisations of a Coxeter element; this will lead to a geometric proof of a particular instantiation of Chapoton’s formula.

We call *submaximal factorisation* of a Coxeter element  $c$  a primitive block factorisation of  $c$  with partition  $\alpha = 2^1 1^{n-2} \vdash n$ , according to Def. 1.3. Submaximal factorisations are thus exactly factorisations of  $c$  in  $n - 1$  blocks ( $(n - 2)$  reflections and one factor of length 2), and as such are a natural first generalisation of the set of reduced decompositions  $\text{Red}_{\mathcal{R}}(c)$ .

Let  $\Lambda$  be a stratum of  $\bar{\mathcal{L}}_2$ : it corresponds to a conjugacy class of parabolic Coxeter elements of length 2. We say that a submaximal factorisation is *of type*  $\Lambda$  if its factor of length 2 lies in this conjugacy class. We denote by  $\text{FACT}_{n-1}^{\Lambda}(c)$  the set of such factorisations. Using the relations between LL and fact, we can count these factorisations.

For  $\Lambda$  a stratum of  $\bar{\mathcal{L}}_2$ , let us define the following restriction of LL:

$$\text{LL}_{\Lambda} : \varphi(\Lambda) \rightarrow E_{\alpha} ,$$

where  $E_{\alpha} = E_n - E_n^{\text{reg}}$ . We recall that  $E_{\alpha}^0$  is the subset of  $E_{\alpha}$  constituted by the configurations whose partition is exactly  $\alpha = 2^1 1^{n-2}$ .

If we define  $\varphi(\Lambda)^0 = \text{LL}_{\Lambda}^{-1}(E_{\alpha}^0)$ , and  $\mathcal{K}^0 = \text{LL}^{-1}(E_{\alpha}^0) = \cup_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} \varphi(\Lambda)^0$ , then from Chapter 1 we have the following properties:

- the restriction of  $\text{LL} : \mathcal{K}^0 \rightarrow E_{\alpha}^0$  is a (possibly not connected) unramified covering (Thm. 1.28);
- the connected components of  $\mathcal{K}^0$  are the  $\varphi(\Lambda)^0$ , for  $\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2$ ;
- the image, by the map fact, of  $\varphi(\Lambda)^0$  is exactly  $\text{FACT}_{n-1}^{\Lambda}(c)$ ;
- via fact, the Hurwitz action on  $\text{FACT}_{n-1}(c)$  corresponds to the monodromy action on  $\mathcal{K}^0$ ; so the orbits are the  $\text{FACT}_{n-1}^{\Lambda}(c)$  (Thm. 1.48).

The map  $\text{LL}_{\Lambda}$  defined above is an algebraic morphism, corresponding to the extension

$$\mathbb{C}[a_2, \dots, a_n]/(D) \subseteq \mathbb{C}[f_1, \dots, f_{n-1}]/(D_{\Lambda}) .$$

**Theorem 3.6.** *Let  $\Lambda$  be a strata of  $\bar{\mathcal{L}}_2$ . Then:*

- (a)  $\text{LL}_{\Lambda}$  is a finite quasi-homogeneous morphism of degree  $\frac{(n-2)! h^{n-1}}{|W|} \deg D_{\Lambda}$ ;
- (b) the number of submaximal factorisations of  $c$  of type  $\Lambda$  is equal to

$$|\text{FACT}_{n-1}^{\Lambda}(c)| = \frac{(n-1)! h^{n-1}}{|W|} \deg D_{\Lambda} .$$

*Proof.* From Hilbert series, we get that  $\text{LL}_{\Lambda}$  is a finite free extension of degree

$$\frac{\prod \deg(a_i)}{\deg(D)} \Big/ \frac{\prod \deg(f_i)}{\deg(D_{\Lambda})} = \frac{n! h^n \deg D_{\Lambda}}{|W| \deg D} .$$

(a) As  $D$  is a discriminant of type  $A$  for the variables  $a_2, \dots, a_n$  of weights  $2h, \dots, nh$ , we have  $\deg D = n(n-1)h$ . Thus:

$$\deg(\text{LL}_{\Lambda}) = \frac{(n-2)! h^{n-1}}{|W|} \deg D_{\Lambda} .$$

(b) This degree is also the cardinality of a generic fiber of  $\text{LL}_\Lambda$ , *i.e.*  $|\text{LL}^{-1}(\varepsilon) \cap \varphi(\Lambda)|$ , for  $\varepsilon \in E_\alpha^0$ . Consequently, from property (P3) in Sect. 3.1.2, it counts the number of submaximal factorisations of type  $\Lambda$ , where the length 2 element has a place *fixed* (given by the composition of  $n$  associated to  $\varepsilon$ ). There are  $(n-1)$  compositions of partition type  $\alpha \vdash n$ , so we obtain  $|\text{FACT}_{n-1}^\Lambda(c)| = (n-1) \deg(\text{LL}_\Lambda) = \frac{(n-1)! h^{n-1}}{|W|} \deg D_\Lambda$ .  $\square$

**Remark 3.7.** Let us denote by  $\text{FACT}_{(2,1,\dots,1)}^\Lambda(c)$  the set of submaximal factorisations of type  $\Lambda$  where the length 2 factor is in first position. By symmetry, formula (b) is equivalent to

$$|\text{FACT}_{(2,1,\dots,1)}^\Lambda(c)| = \frac{(n-2)! h^{n-1}}{|W|} \deg D_\Lambda .$$

As  $\sum r_\Lambda \deg D_\Lambda = \deg D = n(n-1)h$ , this implies the equality :

$$\sum_{\Lambda \in \tilde{\mathcal{L}}_2} r_\Lambda |\text{FACT}_{(2,1,\dots,1)}^\Lambda(c)| = \frac{(n-2)! h^{n-1}}{|W|} \deg D = \frac{n! h^n}{|W|} = |\text{Red}_{\mathcal{R}}(c)| .$$

This formula is actually not surprising, since for the concatenation map:

$$\begin{aligned} \text{Red}_{\mathcal{R}}(c) &\quad \rightarrow \quad \text{FACT}_{(2,1,\dots,1)}(c) \\ (s_1, s_2, \dots, s_n) &\quad \mapsto \quad (s_1 s_2, s_3, \dots, s_n) , \end{aligned}$$

the fiber of a factorisation of type  $\Lambda$  has indeed cardinality  $r_\Lambda$  (which is the number of factorisations of the first factor in two reflections).

**Remark 3.8.** In [KM10], motivated by the enumerative theory of the generalised non-crossing partitions, Krattenthaler and Müller defined and computed the *decomposition numbers* of a Coxeter element, for all irreducible *real* reflection groups. In our terminology, these are the numbers of block factorisations according to the Coxeter type of the factors. Note that the Coxeter type of a parabolic Coxeter element is the type of its associated parabolic subgroup, in the sense of the classification of finite Coxeter groups. So the conjugacy class for a parabolic elements is a finer characteristic than the Coxeter type: take for example  $D_4$ , where there are three conjugacy classes of parabolic elements of type  $A_1 \times A_1$ .

Nevertheless, when  $W$  is real, most of the results obtained from formula (b) in Thm. 3.6 are very specific cases of the computations in [KM10]. But the method of proof is completely different, geometric instead of combinatorial<sup>1</sup>. Note that another possible way to tackle this problem is to use a recursion, to obtain data for the group from the data for its parabolic subgroups. A recursion formula (for factorisations where the rank of each factor is dictated) is indeed given by Reading in [Rea08], but the proof is very specific to the real case.

For  $W$  non-real, formula (b) implies new combinatorial results on the factorisation of a Coxeter element. The numerical data for all irreducible well-generated complex reflection groups are listed in Appendix A. In particular, we obtain (geometrically) general formulas for the submaximal factorisations of a given type in  $G(e, e, n)$ .

1. The computation of all decomposition numbers for complex groups, by combinatorial means, is also a work in progress (Krattenthaler, personal communication).



### 3.5 Chapoton's formula and submaximal factorisations

If  $W$  is a well-generated complex reflection group, we recall that the noncrossing partition lattice of type  $W$  is the poset of divisors of a fixed Coxeter element  $c$ :

$$\text{NCP}_W(c) := \{w \in W \mid w \preceq c\},$$

where  $\preceq$  is the absolute order of  $W$  (see Def. 1.7).

#### 3.5.1 Chapoton's formula for the number of multichains

Chapoton's formula gives the number of multichains of a given length in the poset  $(\text{NCP}_W, \preceq)$ :

**Theorem 3.9** ("Chapoton's formula"). *Let  $W$  be an irreducible well-generated complex reflection group, of rank  $n$ . Then, for any  $N \in \mathbb{N}$ , the number of multichains  $w_1 \preceq \cdots \preceq w_N \preceq c$  in the poset  $\text{NCP}_W$  is equal to :*

$$\text{Cat}^{(N)}(W) = \prod_{i=1}^n \frac{d_i + Nh}{d_i},$$

where  $d_1 \leq \cdots \leq d_n = h$  are the invariant degrees of  $W$ .

The numbers  $\text{Cat}^{(N)}(W)$  are called *Fuss-Catalan numbers of type  $W$* , and count also other combinatorial objects, for example in cluster algebras, as we explained in the introduction.

In the real case, this formula was first observed by Chapoton in [Cha05, Prop. 9]; the proof is case-by-case, and mainly uses results by Athanasiadis and Reiner [Rei97, AR04]. The remaining complex cases are checked by Bessis in [Bes07a], using his study of the infinite series  $G(e, e, r)$  with Corran [BC06]. *There is still no case-free proof of this formula.*

**Corollary 3.10.** *Let  $W$  be an irreducible well-generated complex reflection group, with invariant degrees  $d_1 \leq \cdots \leq d_n = h$ . Then :*

(i) *the cardinality of  $\text{NCP}_W$  is  $\prod_{i=1}^n \frac{d_i + h}{d_i}$  (Catalan number of type  $W$ );*

(ii) *the number of reduced decompositions of a Coxeter element is  $\frac{n!h^n}{|W|}$  (Lyashko-Looijenga number of type  $W$ ).*

Both formulas are of course consequences of Thm. 3.9 : (i) is just the case  $N = 1$ , and (ii) comes from the computation of maximal strict chains in a poset. But historically, they have been observed before Chapoton's formula. In the Coxeter types, (ii) has been conjectured by Looijenga in [Loo74], and proved later by Deligne [Del74]. Still today, the only known proofs are case-by-case.

#### 3.5.2 Number of submaximal factorisations of a Coxeter element

Using the previous results of this chapter, we can state here a formula for the number of submaximal factorisations, with a "geometric" proof:

**Theorem 3.11.** *Let  $W$  be an irreducible well-generated complex reflection group, with invariant degrees  $d_1 \leq \dots \leq d_n = h$ . Then, the number of submaximal factorisations of a Coxeter element  $c$  is equal to:*

$$|\text{FACT}_{n-1}(c)| = \frac{(n-1)! h^{n-1}}{|W|} \left( \frac{(n-1)(n-2)}{2} h + \sum_{i=1}^{n-1} d_i \right).$$

*Proof.* Using Thm. 3.6(b) and Thm. 3.3(b)-(c), we compute:

$$\begin{aligned} |\text{FACT}_{n-1}(c)| = |\text{FACT}_\alpha(c)| &= \sum_{\Lambda \in \tilde{\mathcal{L}}_2} |\text{FACT}_{n-1}^\Lambda(c)| \\ &= \frac{(n-1)! h^{n-1}}{|W|} \sum_{\Lambda \in \tilde{\mathcal{L}}_2} \deg D_\Lambda \\ &= \frac{(n-1)! h^{n-1}}{|W|} (\deg D_{\text{LL}} - \deg J_{\text{LL}}), \end{aligned}$$

As  $\deg D_{\text{LL}} = n(n-1)h$  and  $\deg J_{\text{LL}} = \sum_{i=2}^n \deg(a_i) - \sum_{j=1}^{n-1} \deg(f_j) = \sum_{i=2}^n ih - \sum_{j=1}^{n-1} d_j$ , a quick computation gives the conclusion.  $\square$

**Remark 3.12.** The formula in the above theorem is actually included in Chapoton's formula: indeed, there exist easy combinatorial tricks allowing to pass from the numbers of multichains to the numbers of strict chains (which are roughly the numbers of block factorisations). In the Appendix B, we detail these relations, and give the formulas for the number of block factorisations predicted by Chapoton's formula.

*However*, the proof we obtained here is more satisfactory (and more enlightening) than the one using Chapoton's formula. Indeed, if we recapitulate the ingredients of the proof, we only made use of the formula for the Lyashko-Looijenga number (Cor. 3.10(b)) — necessary to prove the first properties of LL in [Bes07a] —, the remaining being the geometric properties of LL, for which we never used the classification. In other words, we travelled from the numerology of  $\text{Red}_{\mathcal{R}}(c)$  to that of  $\text{FACT}_{n-1}(c)$ , without adding any case-by-case analysis to the setting of [Bes07a].

Although it seems to be a new interesting avenue towards a geometric explanation of Chapoton's formula, the method used here to compute the number of submaximal factorisations is not directly generalisable to factorisations with fewer blocks. A more promising approach would be to avoid computing explicitly these factorisations, and to try to understand globally Chapoton's formula as some ramification formula for the morphism LL (see Remark B.2).

# Appendix A

## Numerical data for the factorisations of the Lyashko-Looijenga discriminants

### A.1 Description

This appendix details explicit numerical data regarding the factorisation of the discriminant polynomial  $D_{\text{LL}}$ , where LL is the Lyashko-Looijenga morphism associated to a well-generated irreducible reflection group.

For such a group  $W$ , let us recall the definition (from Sect. 3.2.2):

$$D_{\text{LL}} = \text{Disc}(\Delta_W(f_1, \dots, f_n); f_n) ,$$

where  $\Delta_W$  is the *discriminant* of  $W$  (*i.e.* the equation of the union of the reflecting hyperplanes in the quotient  $W \backslash V$ ), and  $f_1, \dots, f_n$  are the fundamental invariant polynomials of  $W$  ( $f_n$  being the one with maximal degree).

Let us write (as in 3.2.2)

$$D_{\text{LL}} = \prod_{i=1}^r D_i^{p_i}$$

the factorisation of  $D_{\text{LL}}$  in irreducible polynomials of  $\mathbb{C}[f_1, \dots, f_n]$  (actually, the factorisation holds in  $K_W[f_1, \dots, f_n]$ , where  $K_W$  is the field of definition of  $W$ ).

In the table A.1, we give, for each irreducible well-generated group, the weighted degrees  $\deg(D_i)$  and the powers  $p_i$  which appear in the factorisation above. It is enough to deal with the 2-reflection groups (those generated by reflections of order 2), because any irreducible complex reflection group is isodiscriminantal to a 2-reflection group (see [Bes07a, Thm.2.2]): it has the same discriminant  $\Delta$ , and consequently the same braid group and the same  $D_{\text{LL}}$ . Thus we only have to treat the four infinite series  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $I_2(e)$ ,  $G(e, e, n)$ , and 11 exceptional types (including the 6 exceptional Coxeter groups).

## Notations

In the last column of table A.1, the “LL-data”:

$$\boxed{p_1} \cdot (u_1) + \boxed{p_2} \cdot (u_2) + \cdots + \boxed{p_r} \cdot (u_r)$$

means that the form of the factorisation is  $D_{\text{LL}} = \prod_{i=1}^r D_i^{p_i}$  with  $\deg D_i = u_i$ . Thus this writing reflects the additive decomposition of  $\deg D_{\text{LL}} = n(n-1)h$  (where  $n = \text{rk}(W)$  and  $h = d_n$ ) in terms of the  $u_i$ :

$$\deg D_{\text{LL}} = \sum_i p_i u_i .$$

## By-products

These numbers  $(p_i, u_i)$  have many combinatorial interpretations. In particular, thanks to Theorems 3.3 and 3.6, we have:

- the number of conjugacy classes of parabolic Coxeter elements of length 2 is the number of terms in the sum (each term  $(p_i, u_i)$  of the sum corresponds to one of these classes, say  $\Lambda_i$ );
- the order of the elements in  $\Lambda_i$  is  $p_i$  (provided  $W$  is a 2-reflection group);
- the number  $|\text{FACT}_{(2,1,\dots,1)}^{\Lambda_i}(c)|$  of submaximal factorisations of a Coxeter element  $c$ , whose first factor is in the class  $\Lambda_i$ , equals  $\frac{(n-2)! h^{n-1}}{|W|} u_i$ .

As a consequence, the LL-data of the last column, when multiplied by the scalar  $\frac{(n-2)! h^{n-1}}{|W|}$  (which is listed in the second column), gives rise to the following equality:

$$\begin{aligned} \sum_i p_i |\text{FACT}_{(2,1,\dots,1)}^{\Lambda_i}(c)| &= \frac{(n-2)! h^{n-1}}{|W|} \deg D \\ &= \frac{n! h^n}{|W|} \\ &= |\text{Red}_{\mathcal{R}}(c)| , \end{aligned}$$

which simply reflects the enumeration of fibers of the concatenation map (see Remark 3.7).

$$\begin{aligned} \text{Red}_{\mathcal{R}}(c) &\twoheadrightarrow \text{FACT}_{(2,1,\dots,1)}(c) \\ (r_1, r_2, \dots, r_n) &\mapsto (r_1 r_2, r_3, \dots, r_n) . \end{aligned}$$

Group type [Isodiscriminantal groups]	$(n-2)! h^{n-1}/ W $	LL-data
$A_n, n \geq 2.$ [ $G_4, G_8, G_{16}, G_{25}, G_{32}$ ]	$(n+1)^{n-2}/(n(n-1))$	$\boxed{2} \cdot (n(n-1)(n-2)/2) + \boxed{3} \cdot (n(n-1))$
$B_n, n \geq 2.$ [ $G(d, 1, n), G_5, G_{10}, G_{18}, G_{26}$ ]	$n^{n-2}/(2(n-1))$	$\boxed{2} \cdot ((n-1)(n-2)(n-3)) + \boxed{2} \cdot (2(n-1)(n-2))$ $+ \boxed{3} \cdot (2(n-1)(n-2)) + \boxed{4} \cdot (2(n-1))$
$I_2(e)$ [ $G_6, G_9, G_{17}, G_{14}, G_{20}, G_{21}$ ]	1/2	$\boxed{e} \cdot (2)$
$G(e, e, n), e \geq 2, n \geq 5$ (= $D_n$ for $e=2$ )	$(n-1)^{n-2}/n$	$\boxed{2} \cdot (n(n-2)(n-3)e/2) + \boxed{3} \cdot (n(n-2)e) + \boxed{e} \cdot (n)$
$G(e, e, 3), e \geq 3$	2/3	If $3 \nmid e$ : $\boxed{3} \cdot (3e)$ + $\boxed{e} \cdot (3)$ If $3 \mid e$ : $\boxed{3} \cdot (e) + \boxed{3} \cdot (e) + \boxed{3} \cdot (e) + \boxed{e} \cdot (3)$
$G(e, e, 4), e \geq 2$ (= $D_4$ for $e=2$ )	9/4	If $e$ odd : $\boxed{2} \cdot (4e)$ + $\boxed{3} \cdot (8e) + \boxed{e} \cdot (4)$ If $e$ even : $\boxed{2} \cdot (2e) + \boxed{2} \cdot (2e) + \boxed{3} \cdot (8e) + \boxed{e} \cdot (4)$
$G_{23}$ (= $H_3$ )	5/6	$\boxed{2} \cdot (6) + \boxed{3} \cdot (6) + \boxed{5} \cdot (6)$
$G_{24}$	7/12	$\boxed{3} \cdot (12) + \boxed{4} \cdot (12)$
$G_{27}$	5/12	$\boxed{3} \cdot (12) + \boxed{3} \cdot (12) + \boxed{4} \cdot (12) + \boxed{5} \cdot (12)$
$G_{28}$ (= $F_4$ )	3	$\boxed{2} \cdot (24) + \boxed{3} \cdot (8) + \boxed{3} \cdot (8) + \boxed{4} \cdot (12)$
$G_{29}$	25/12	$\boxed{2} \cdot (24) + \boxed{3} \cdot (48) + \boxed{4} \cdot (12)$
$G_{30}$ (= $H_4$ )	15/4	$\boxed{2} \cdot (60) + \boxed{3} \cdot (40) + \boxed{5} \cdot (24)$
$G_{33}$	243/20	$\boxed{2} \cdot (60) + \boxed{3} \cdot (80)$
$G_{34}$	2401/30	$\boxed{2} \cdot (270) + \boxed{3} \cdot (240)$
$G_{35}$ (= $E_6$ )	576/5	$\boxed{2} \cdot (90) + \boxed{3} \cdot (60)$
$G_{36}$ (= $E_7$ )	19683/14	$\boxed{2} \cdot (210) + \boxed{3} \cdot (112)$
$G_{37}$ (= $E_8$ )	1265625/56	$\boxed{2} \cdot (504) + \boxed{3} \cdot (224)$

Table A.1: Factorisation of the LL-discriminant for irreducible well-generated groups

## A.2 Computations

Let us explain how Table A.1 was obtained. As mentioned in Remark 3.8, the numerical results about the  $|\text{FACT}_{(2,1,\dots,1)}^{\Lambda_i}(c)|$ , for  $W$  real, are particular cases of the “decomposition numbers” computed by Krattenthaler-Müller in [KM10], namely the  $N_W(T_1, A_1, \dots, A_1)$ , where  $T_1$  is a rank 2 group type.

For some types we are able to directly recover these numbers just by explicitly factorising  $D_{LL}$ . When this factorisation is not easily computable, we rather rely on [KM10], thus obtaining the geometric properties of the discriminant through combinatorial means.

For non-real groups, we cannot rely on [KM10], and the corresponding entries of the table are new results.

**Remark A.1.** For Coxeter groups, the degrees of certain factors of  $D_{LL}$  have also been computed by Saito in [Sai], in order to check case-by-case the formula of Thm. 3.3(c).

In the following, we detail the methods of computation that we used.

### A.2.1 Straightforward cases

Let  $W$  be a well-generated irreducible 2-reflection group. Suppose that there are only two conjugacy classes of parabolic Coxeter elements of length 2, and that we know the orders of their elements  $p_1, p_2$ . Then, from Thm. 3.3, the discriminant  $D_{LL}$  and the Jacobian  $J_{LL}$  have the form:

$$D_{LL} = D_1^{p_1} D_2^{p_2} \quad ; \quad J_{LL} = D_1^{p_1-1} D_2^{p_2-1} .$$

In order to find the degrees  $u_1 = \deg D_1$  and  $u_2 = \deg D_2$ , we then just have to solve the following system:

$$\begin{cases} p_1 u_1 + p_2 u_2 = \deg D_{LL} = n(n-1)h \\ (p_1 - 1) u_1 + (p_2 - 1) u_2 = \deg J_{LL} = \sum_{i=2}^n (ih) - \sum_{j=1}^{n-1} d_j . \end{cases}$$

This allows to easily tackle the cases<sup>1</sup> of  $A_n, G_{24}$ , and the large exceptional types  $G_{33}$  through  $G_{37}$ .

### A.2.2 Other exceptional types

We can explicitly compute the discriminant  $\Delta_W$ , via the matrix of basic derivations, following the strategy described in the Appendix B of [OT92]. We use the software GAP3 [S<sup>+</sup>97] together with its packages CHEVIE [GHL<sup>+</sup>96] and VKCURVE [BM03]<sup>2</sup>. Then we compute the discriminant  $D_{LL}$  and its factorisation in irreducibles, which is an easy task in Maple, or any symbolic computation software (here the rank is never greater than 5).

---

1. The conjugacy classes of length 2 parabolic elements can be found using the package CHEVIE of GAP3.  
2. Most of the implementation of [OT92] is already available in VKCURVE.

### A.2.3 Series $B_n$

For  $W = B_n$ , we can take for each invariant  $f_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) the  $i$ -th elementary symmetric polynomial in  $x_1^2, \dots, x_n^2$ ; then the discriminant can be written as:

$$\Delta_W = f_n \text{Disc}(T^n - f_1 T^{n-1} + \dots + (-1)^n f_n; T) .$$

It should be possible to study in general the factorisation in  $\mathbb{Q}[f_1, \dots, f_n]$  of the polynomial  $\text{Disc}(\Delta_W; f_n)$ ; however it is much simpler here to use the numerical results in [KM10] and to apply the formula of Thm. 3.6.

Note that [KM10] gives the number of factorisations according to the Coxeter type of the parabolic subgroup associated to the factor; here we rather need these numbers according to the conjugacy classes of the factors. In this case, this comes back to use the data for the ‘‘combinatorial types’’ of  $B_n$ , see [KM10, Sect. 2].

Let us denote by  $t, s_2, \dots, s_n$  a set of Coxeter generators for  $B_n$  (with  $m_{t,s_2} = 4, m_{s_i,s_{i+1}} = 3$ , the other ones being 2). If  $n \geq 4$ , there are in  $B_n$  four conjugacy classes of parabolic Coxeter elements of length 2:

- the class (denoted  $\Lambda_4$ ) containing  $ts_2$  (elements of order 4);
- the class ( $\Lambda_3$ ) of the  $s_i s_{i+1}$ 's (order 3);
- the class ( $\Lambda_2$ ) of the  $s_i s_j$ 's, for  $|i - j| > 1$  (order 2);
- the class ( $\Lambda'_2$ ) of the  $ts_i$ 's, for  $i > 2$  (order 2).

Then, with our notations and those of [KM10, Sect. 5], we have:

$$\begin{aligned} |\text{FACT}_{(2,1,\dots,1)}^{\Lambda_4}(c)| &= N_{B_n}^{\text{comb}}(B_2, A_1, \dots, A_1) \\ |\text{FACT}_{(2,1,\dots,1)}^{\Lambda_3}(c)| &= (n-2) \times N_{B_n}^{\text{comb}}(A_2, B_1, A_1, \dots, A_1) \\ |\text{FACT}_{(2,1,\dots,1)}^{\Lambda_2}(c)| &= (n-2) \times N_{B_n}^{\text{comb}}(A_1^2, B_1, A_1, \dots, A_1) \\ |\text{FACT}_{(2,1,\dots,1)}^{\Lambda'_2}(c)| &= N_{B_n}^{\text{comb}}(B_1 * A_1, A_1, \dots, A_1) . \end{aligned}$$

The results are listed in the table A.1.

### A.2.4 Series $G(e, e, n)$

If  $W = G(e, e, n)$  (with  $n \geq 3, e \geq 2$ ), we can take for the invariants:

$$f_1 = x_1 \dots x_n \quad ; \quad f_i = \sigma_{i-1}(x_1^e, \dots, x_n^e) \quad (i = 2, \dots, n) ,$$

where  $\sigma_i$  is the  $i$ -th elementary symmetric polynomial (note that here  $f_1$  is not necessarily the invariant of lowest degree, but  $f_n$  is still the one of highest degree  $h = (n-1)e$ ). Then the discriminant is equal to:

$$\Delta_W = \text{Disc}(T^n - f_2 T^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1} f_n T + (-1)^n f_1^e; T) .$$

Let us fix  $n$ , and denote by  $\Delta^{[e]}$ ,  $D_{\text{LL}}^{[e]}$  and  $J_{\text{LL}}^{[e]}$  the discriminant, LL-discriminant and LL-Jacobian for  $G(e, e, n)$ . They depend only slightly on  $e$ , namely:

$$\Delta^{[e]}(f_1, \dots, f_n) = P(f_1^e, f_2, \dots, f_n)$$

for a polynomial  $P$  independent of  $e$ , and

$$D_{\text{LL}}^{[e]}(f_1, \dots, f_{n-1}) = Q(f_1^e, f_2, \dots, f_{n-1}) \quad (1)$$

where  $Q(X_1, \dots, X_{n-1}) = \text{Disc}(P(X_1, \dots, X_n); X_n)$ . Moreover, an easy computation shows:

$$J_{\text{LL}}^{[e]}(f_1, \dots, f_{n-1}) = e f_1^{e-1} J_1(f_1^e, f_2, \dots, f_n) \quad (2)$$

where  $J_1(X_1, \dots, X_n) = \text{Jac}\left(\left(P, \frac{\partial P}{\partial X_n}, \dots, \frac{\partial^{n-1} P}{\partial X_n^{n-1}}\right); (X_1, \dots, X_n)\right)$  (see Sect. 3.2.3).

We will need the following lemma:

**Lemma A.2.** *If  $n \geq 5$  and  $e \geq 4$ , then there are in  $G(e, e, n)$  three conjugacy classes of parabolic Coxeter elements of length 2. The orders of the elements in these classes are 2, 3,  $e$ , respectively.*

*Proof.* We use the representation of elements of  $\text{NCP}_W$  as “noncrossing partitions of type  $(e, e, n)$ ”, described by Bessis-Corran. We explain roughly the method, strongly relying on their paper [BC06].

The lattice  $\text{NCP}_W$  is isomorphic to the set  $\text{NCP}(e, e, n)$  of the non-crossing partitions  $u$  of  $\mu_{e(n-1)} \cup \{0\}$  —where  $\mu_p$  is the  $p$ -gon of  $p$ -th roots of unity in  $\mathbb{C}$ —, such that, forgetting  $\{0\}$ ,  $u$  is  $e$ -symmetric (i.e. fixed by the natural action of the group  $\mu_e$  on partitions of  $\mu_{e(n-1)}$ ).

Elements  $\text{NCP}(e, e, n)$  fall into three types, according to the geometric shape of the partition: short symmetric, long symmetric, or asymmetric (see Def. 1.15<sup>3</sup>). Moreover, we have a notion of height for an element of  $\text{NCP}(e, e, n)$  (see Sect. 1.8), which is equal to the length of the corresponding element of  $W$  (Lemma 4.1). There is a natural geometric way to see elements of  $\text{NCP}(e, e, n)$  as braids of  $B(W)$  or elements of  $W$  (Sect. 2.3). With these ingredients, we can describe the elements of length 2 of  $\text{NCP}_W$  according to their types:

- (i) *Short symmetric.* Let us fix a maximal short symmetric element  $v$ . Its partition contains  $e$  blocks of size  $n - 1$ , each of its divisors is also short symmetric, and the lattice under  $v$  is isomorphic to the set of classical noncrossing partitions  $\text{NCP}(n - 1)$  (or  $\text{NCP}_{A_{n-2}}$ ). Using the type  $A$  case, we deduce that there are two conjugacy classes of divisors of  $v$  of height 2, corresponding to the orders 2 and 3. Moreover, any short symmetric element  $u$  is conjugate to a divisor of  $v$ : use the conjugation by the Coxeter element  $c$ , which acts as a rotation of the partition.
- (ii) *Long symmetric.* If  $u$  is a long symmetric element of height 2, then its partition has necessarily only one part which is not a singleton, and this part must be a regular  $e$ -gon (together with  $\{0\}$ ). All the elements of this type are obviously of order  $e$ , and conjugated to each other by the action of  $c$  (rotation).
- (iii) *Asymmetric.* If  $u$  is an asymmetric element, let us denote by  $u^b$  the partition obtained from  $u$  by forgetting the point 0. Then,  $u$  has height 2 when in each  $e$ -sector of  $u^b$  there are one part of size 2 and  $n - 3$  singletons.
  - If in the partition of  $u$ , 0 is with a 2-part of  $u^b$ , then  $u$  has order 3. It can be brought down to a short symmetric element of (i) by conjugation with an adapted asymmetric height 1 element (note that it requires  $n - 1 \geq 3$ ).

---

3. All the references in this proof are to [BC06].



- If in the partition of  $u$ , 0 is with a singleton of  $u^b$ , then  $u$  has order 2. It can also be brought down to a short symmetric element of (i) by conjugation with an adapted asymmetric height 1 element (providing this time that  $n - 1 \geq 4$ ).

As  $e \neq 2, 3$ , we can conclude.  $\square$

**Remark A.3.** When  $e = 2$  or  $3$ , the proof only shows that there are two or three conjugacy classes, according to whether the long symmetric elements are in a specific class or not. Actually, the result is always three, as we will see below.

If we suppose that  $n \geq 5$  and  $e \geq 4$ , the lemma implies that the LL-discriminant and Jacobian associated to  $G(e, e, n)$  have the form (using Thm. 3.3):

$$D_{\text{LL}}^{[e]} = D_2^2 D_3^3 D_e^e \quad ; \quad J_{\text{LL}}^{[e]} = D_2 D_3^2 D_e^{e-1},$$

where  $D_2, D_3, D_e$  are irreducible in  $\mathbb{C}[f_1, \dots, f_{n-1}]$ . Thanks to equation 2, we know that  $f_1^{e-1}$  divides  $J_{\text{LL}}^{[e]}$ , so  $D_e \doteq f_1$ .

Because of equation 1, if  $e'$  divides  $e$ , then the irreducible factorisation of  $D_{\text{LL}}^{[e']}$  is a refinement of the one of  $D_{\text{LL}}^{[e]}$ . But, as explained in the remark above, even when  $e' = 2$  or  $3$ , there are at most three conjugacy classes of length 2 parabolic Coxeter elements in  $G(e', e', n)$ , so at most three irreducible factors in  $D_{\text{LL}}^{[e']}$ . Using for example  $e = 6$ , it proves that  $D_{\text{LL}}^{[e']}$ , for  $e' = 2$  or  $3$ , has also an irreducible factorisation of the form:  $D_2^2 D_3^3 f_1^e$ .

To complete the table, it remains to compute  $\deg D_2$  and  $\deg D_3$  in function of  $e, n$ . This is easily done using the same method as in section A.2.1, because we have two equations and only two unknowns left.

When  $n \leq 4$ , the factorisation can be finer than the general one.

- If  $n = 3$ , we compute  $D_{\text{LL}}^{[e]} = f_1^e (27f_1^e - f_2^3)^3$ . The second factor is irreducible when  $e \notin 3\mathbb{Z}$ ; otherwise, it decomposes into three factors, each of degree  $e$ .
- If  $n = 4$ , as in the general case, the proof of Lemma A.2 shows that  $D_{\text{LL}}^{[e]} = f_1^e D_2^2 D_3^3$ , with  $D_3$  irreducible but  $D_2$  possibly reducible. The computation gives the equality  $D_2 \doteq 64f_1^e - (f_2^2 - 4f_3)^2$ , so  $D_2$  is irreducible if and only if  $e$  is odd.

All the numerical data are gathered in the table A.1.



# Appendix B

## Chains, multichains and block factorisations

In this appendix we give the formulas relating the numbers of multichains and of block factorisations, and we deduce the equalities predicted by Chapoton's formula for factorisations of a Coxeter element.

### B.1 Multichains and factorisations in an ordered group

The relation between multichains and factorisations in  $\text{NCP}_W$  can easily be deduced from the relation between strict chains and multichains, which is classical material (see Chap. 3.11 in [Sta97a]). For the sake of completeness, we give here direct proofs of the formulas relating multichains and block factorisations, in the general setting of a poset order given by the divisibility in a generated group  $(G, A)$ .

Let  $G$  be a finite group, and  $A$  a generating set for  $G$ . We denote by  $\ell_A$  the associated length function, and  $\preceq_A$  the associated partial order on  $G$ :  $u \preceq_A v$  if and only if  $\ell_A(u) + \ell_A(u^{-1}v) = \ell_A(v)$ . We fix an element  $c$  in  $G$ , and denote by  $P_c$  the interval  $[1, c]$  for the order  $\preceq_A$ .

**Definition B.1.** Let  $p$  be a positive integer.

- A  $p$ -multichain in  $P_c$  is a chain  $u_1 \preceq_A \dots \preceq_A u_p \preceq_A c$ ; the number of such chains is denoted by  $\text{CH}_p$ .
- A  $p$ -block-factorisation (of  $c$ ) is a  $p$ -tuple  $(g_1, \dots, g_p)$  of elements in  $G \setminus \{1\}$  such that  $c = g_1 \dots g_p$  and  $\ell_A(c) = \ell_A(g_1) + \dots + \ell_A(g_p)$ ; the number of such factorisations is denoted by  $\text{FACT}_p$ .

For  $N \in \mathbb{N}^*$ , any  $N$ -multichain  $u_1 \preceq_A \dots \preceq_A u_N$  defines a unique  $p$ -block-factorisation (for a  $p \leq N + 1$ ): first transform the multichain  $u_1 \preceq_A \dots \preceq_A u_N \preceq_A c$  in a strict chain  $1 = v_0 \prec_A v_1 \prec_A \dots \prec_A v_p = c$  by erasing the redundant elements, then define  $g_i = v_{i-1}^{-1}v_i$  for  $i = 1, \dots, p$ .

Let us count how many multichains give rise to a fixed factorisation  $(g_1, \dots, g_p)$  with this operation. If we define  $h_i := g_1 \dots g_i$ , these are the multichains of the form

$$\underbrace{1 \preceq_A \dots \preceq_A 1}_{r_0 \text{ times}} \preceq_A \underbrace{h_1 \preceq_A \dots \preceq_A h_1}_{r_1 \text{ times}} \preceq_A \dots \preceq_A \underbrace{h_p \preceq_A \dots \preceq_A h_p}_{r_p \text{ times}},$$

with  $r_0 \geq 0$ ,  $r_p \geq 0$ , and  $r_i \geq 1$  for  $i = 1, \dots, p-1$ . It remains to compute the number of  $(r_0, \dots, r_p)$  in  $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^{p-1} \times \mathbb{N}^*$  such that  $\sum r_i = N$ . This corresponds to choose  $p$  distinct elements in  $\{0, \dots, N\}$  (then take for the  $r_i$  the lengths of the intervals which are cut out). So:

$$\text{CH}_N = \sum_{p \geq 1} \binom{N+1}{p} \text{FACT}_p . \quad (1)$$

We can inverse the formula, using the discrete derivative operator  $\Delta$ : for  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , it is defined by  $\Delta f := (x \mapsto f(x+1) - f(x))$ . It is well known that  $f$  is polynomial if and only if  $\Delta^k f = 0$  for  $k$  large enough, and for  $P$  polynomial we have the following formulas:

- $\forall n \in \mathbb{N}, \Delta^n P(X) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(X+k)$ ;
- $\forall a \in \mathbb{C}, P(a+X) = \sum_{k=0}^{\deg P} \Delta^k P(a) \binom{X}{k}$ .

As a consequence,  $\text{CH}_N$  is a polynomial in  $N$ . We have indeed  $\text{CH}_N = Z(N+1)$ , where  $Z$  is the so-called *Zeta* polynomial of the poset  $(P_c, \preceq_A)$ . We also obtain:

$$\text{FACT}_p = \Delta^p Z(0) = \sum_{k=1}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} \text{CH}_k . \quad (2)$$

## B.2 Formulas for block factorisations of a Coxeter element

We consider here  $G = W$  a well-generated irreducible complex reflection group (of rank  $n$ ), and  $A = \mathcal{R}$  the set of all its reflections. We fix a Coxeter element  $c$ .

“Chapoton’s formula” states that the number of  $N$ -multichains in  $P_c = \text{NCP}_W(c)$  is the Fuss-Catalan number  $\text{Cat}^{(N)}(W) = \prod_i \frac{d_i + Nh}{d_i}$ , *i.e.* :

$$Z(X) = \prod_{i=1}^n \frac{d_i + (X-1)h}{d_i} ,$$

where  $Z$  is the Zeta polynomial of  $\text{NCP}_W$ , and  $d_1 \leq \dots \leq d_n = h$  are the invariant degrees of  $W$ .

**Remark B.2.** From Equation (1), we deduce the formulas:

$$\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{p=1}^n \binom{N+1}{p} \text{FACT}_p = \prod_{i=1}^n \frac{d_i + Nh}{d_i} . \quad (3)$$

As the numbers  $\text{FACT}_p$  are related to the cardinality of fibers of the Lyashko-Looijenga morphism (see Thm. 1.27), these equalities can be interpreted as “ramification formulas” for LL. Instead of trying to prove Chapoton’s formula by computing explicitly the  $\text{FACT}_p$  (which leads to quite complicated expressions, see Prop. B.3 below), another approach could be to prove directly Equation (3) as a global property of LL.

We give below the numbers  $\text{FACT}_p$  of factorisations of  $c$  in  $p$  blocks, as predicted by Chapoton's formula. Note that for  $\text{FACT}_{n-1}$  we recover the formula obtained in Thm. 3.6.

**Proposition B.3.** *We denote by  $\sigma_0^* = 1, \sigma_1^* = \sum_{i=1}^{n-1} d_i^*, \dots, \sigma_{n-1}^* = \prod_{i=1}^{n-1} d_i^*$  the elementary symmetric polynomials in the  $n-1$  codegrees  $d_1^* \geq \dots \geq d_{n-1}^*$  (where  $d_i^* = h - d_i$ ). We write  $S(p, k)$  for the number of partitions of a  $p$ -set into  $k$  nonempty subsets (Stirling number of the second kind). Then:*

$$\forall p \in \{0, \dots, n\}, \text{FACT}_{n-p} = \frac{(n-p)! h^{n-p}}{|W|} \sum_{j=0}^p (-1)^{p-j} \sigma_{p-j}^* S(n-p+j, n-p) h^j .$$

$$\begin{aligned} \text{In particular: } \text{FACT}_n &= \frac{n! h^n}{|W|} ; \\ \text{FACT}_{n-1} &= \frac{(n-1)! h^{n-1}}{|W|} \left( -\sigma_1^* + \frac{n(n-1)}{2} h \right) . \end{aligned}$$

*Proof.* We develop the expression  $Z(X) = \frac{hX}{|W|} \prod_{i=1}^{n-1} (d_i^* + hX)$  in the canonical basis. Then we apply Equation (2) and compute  $\Delta^{n-p} Z(0)$ , using the fact that  $\Delta^r (X^k)(0) = r! S(k, r)$  (cf. Prop. 1.4.2 in [Sta97a]).  $\square$



# Bibliographie

- [AR04] Christos A. ATHANASIADIS et Victor REINER : Noncrossing partitions for the group  $D_n$ . *SIAM J. Discrete Math.*, 18(2):397–417 (electronic), 2004.
- [Arm05] Drew ARMSTRONG : Braid groups, clusters, and free probability : an outline from the AIM workshop. <http://www.aimath.org/WWN/braidgroups/braidgroups.pdf>, janvier 2005.
- [Arm09] Drew ARMSTRONG : Generalized noncrossing partitions and combinatorics of Coxeter groups. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 202(949):x+159, 2009.
- [Arn74] Vladimir I. ARNOLD : Critical points of functions and the classification of caustics. *Russian Math. Surveys*, 29(3):243–244, 1974.
- [Ath98] Christos A. ATHANASIADIS : On noncrossing and nonnesting partitions for classical reflection groups. *Electron. J. Combin.*, 5:Research Paper 42, 16 pp. (electronic), 1998.
- [Ath04] Christos A. ATHANASIADIS : Generalized Catalan numbers, Weyl groups and arrangements of hyperplanes. *Bull. London Math. Soc.*, 36(3):294–302, 2004.
- [Ath05] Christos A. ATHANASIADIS : On a refinement of the generalized Catalan numbers for Weyl groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 357(1):179–196 (electronic), 2005.
- [BC06] David BESSIS et Ruth CORRAN : Non-crossing partitions of type  $(e, e, r)$ . *Adv. Math.*, 202(1):1–49, 2006.
- [BCKM] Noel BRADY, John CRISP, Anton KAUL et Jon MCCAMMOND : Manuscript in preparation.
- [BDM02] David BESSIS, François DIGNE et Jean MICHEL : Springer theory in braid groups and the Birman-Ko-Lee monoid. *Pacific J. Math.*, 205(2):287–309, 2002.
- [Ben93] David J. BENSON : *Polynomial invariants of finite groups*, volume 190 de *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [Bes01] David BESSIS : Zariski theorems and diagrams for braid groups. *Invent. Math.*, 145(3):487–507, 2001.
- [Bes03] David BESSIS : The dual braid monoid. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 36(5):647–683, 2003.
- [Bes06a] David BESSIS : A dual braid monoid for the free group. *J. Algebra*, 302(1):55–69, 2006.
- [Bes06b] David BESSIS : Garside categories, periodic loops and cyclic sets. Preprint arXiv :math/0610778v1, 2006.

- [Bes07a] David BESSIS : Finite complex reflection arrangements are  $K(\pi, 1)$ . Preprint arXiv :math/0610777v3, 2007.
- [Bes07b] David BESSIS : Sur les groupes de tresses généralisés. Thèse d'habilitation, <http://www.math.ens.fr/~bessis/hdr.pdf>, 2007.
- [BGN03] Philippe BIANE, Frederick GOODMAN et Alexandru NICA : Non-crossing cumulants of type  $B$ . *Trans. Amer. Math. Soc.*, 355(6):2263–2303 (electronic), 2003.
- [Bia02] Philippe BIANE : Free probability and combinatorics. *In Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002)*, pages 765–774, Beijing, 2002. Higher Ed. Press.
- [BKL98] Joan BIRMAN, Ki Hyoung KO et Sang Jin LEE : A new approach to the word and conjugacy problems in the braid groups. *Adv. Math.*, 139(2):322–353, 1998.
- [BM03] David BESSIS et Jean MICHEL : VKCURVE, software package for GAP3, 2003. <http://www.math.jussieu.fr/~jmichel/vkcurve/vkcurve.html>.
- [BMR95] Michel BROUÉ, Gunter MALLE et Raphaël ROUQUIER : On complex reflection groups and their associated braid groups. *In Representations of groups (Banff, AB, 1994)*, volume 16 de *CMS Conf. Proc.*, pages 1–13. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
- [BMR98] Michel BROUÉ, Gunter MALLE et Raphaël ROUQUIER : Complex reflection groups, braid groups, Hecke algebras. *J. Reine Angew. Math.*, 500:127–190, 1998.
- [Bou68] Nicolas BOURBAKI : *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IV : Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Chapitre V : Groupes engendrés par des réflexions. Chapitre VI : systèmes de racines.* Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1337. Hermann, Paris, 1968.
- [BR09] David BESSIS et Victor REINER : Cyclic sieving of noncrossing partitions for complex reflection groups. Preprint arXiv :math/0701792v2, à paraître dans *Ann. Comb.*, 2009.
- [Bra01] Thomas BRADY : A partial order on the symmetric group and new  $K(\pi, 1)$ 's for the braid groups. *Adv. Math.*, 161(1):20–40, 2001.
- [Bri71] Egbert V. BRIESKORN : Die Fundamentalgruppe des Raumes der regulären Orbits einer endlichen komplexen Spiegelungsgruppe. *Invent. Math.*, 12:57–61, 1971.
- [Bri88] Egbert V. BRIESKORN : Automorphic sets and braids and singularities. *In Braids (Santa Cruz, CA, 1986)*, volume 78 de *Contemp. Math.*, pages 45–115. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.
- [Bro01] Michel BROUÉ : Reflection groups, braid groups, Hecke algebras, finite reductive groups. *In Current developments in mathematics, 2000*, pages 1–107. Int. Press, Somerville, MA, 2001.
- [Bro06] Abraham BROER : Differents in modular invariant theory. *Transform. Groups*, 11(4):551–574, 2006.
- [BS72] Egbert BRIESKORN et Kyoji SAITO : Artin-Gruppen und Coxeter-Gruppen. *Invent. Math.*, 17:245–271, 1972.
- [BW02a] Thomas BRADY et Colum WATT :  $K(\pi, 1)$ 's for Artin groups of finite type. *In Proceedings of the Conference on Geometric and Combinatorial Group Theory, Part I (Haifa, 2000)*, volume 94, pages 225–250, 2002.



- [BW02b] Thomas BRADY et Colum WATT : A partial order on the orthogonal group. *Comm. Algebra*, 30(8):3749–3754, 2002.
- [BW08] Thomas BRADY et Colum WATT : Non-crossing partition lattices in finite real reflection groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 360(4):1983–2005, 2008.
- [Car72] Roger W. CARTER : Conjugacy classes in the Weyl group. *Compositio Math.*, 25:1–59, 1972.
- [Cha05] Frédéric CHAPOTON : Enumerative properties of generalized associahedra. *Sém. Lothar. Combin.*, 51:Art. B51b, 16 pp. (electronic), 2004/05.
- [Cha06] Frédéric CHAPOTON : Sur le nombre de réflexions pleines dans les groupes de Coxeter finis. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 13(4):585–596, 2006.
- [Coh76] Arjeh M. COHEN : Finite complex reflection groups. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 9(3):379–436, 1976.
- [CP03] Ruth CHARNEY et David PEIFER : The  $K(\pi, 1)$ -conjecture for the affine braid groups. *Comment. Math. Helv.*, 78(3):584–600, 2003.
- [Deh00] Patrick DEHORNOY : *Braids and self-distributivity*, volume 192 de *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2000.
- [Deh02] Patrick DEHORNOY : Groupes de Garside. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 35(2):267–306, 2002.
- [Del72] Pierre DELIGNE : Les immeubles des groupes de tresses généralisés. *Invent. Math.*, 17:273–302, 1972.
- [Del74] Pierre DELIGNE, 1974 : Lettre à E. Looijenga (9/3/1974).
- [Dig06] François DIGNE : Présentations duales des groupes de tresses de type affine  $\tilde{A}$ . *Comment. Math. Helv.*, 81(1):23–47, 2006.
- [DP99] Patrick DEHORNOY et Luis PARIS : Gaussian groups and Garside groups, two generalisations of Artin groups. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 79(3):569–604, 1999.
- [FR05] Sergey FOMIN et Nathan READING : Generalized cluster complexes and Coxeter combinatorics. *Int. Math. Res. Not.*, 2005(44):2709–2757, 2005.
- [FZ03] Sergey FOMIN et Andrei ZELEVINSKY : Cluster algebras. II. Finite type classification. *Invent. Math.*, 154(1):63–121, 2003.
- [Gar69] Frank A. GARSIDE : The braid group and other groups. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 20:235–254, 1969.
- [GG09] Iain GORDON et Stephen GRIFFETH : Catalan numbers for complex reflection groups. Preprint arXiv :0912.1578v1, 2009.
- [GHL<sup>+</sup>96] M. GECK, G. HISS, F. LÜBECK, G. MALLE et G. PFEIFFER : CHEVIE – A system for computing and processing generic character tables for finite groups of Lie type, Weyl groups and Hecke algebras. *Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput.*, 7:175–210, 1996.
- [Gor03] Iain GORDON : On the quotient ring by diagonal invariants. *Invent. Math.*, 153(3):503–518, 2003.
- [Hum90] James E. HUMPHREYS : *Reflection groups and Coxeter groups*, volume 29 de *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

- [IT08] Colin INGALLS et Hugh THOMAS : Noncrossing partitions and representations of quivers. Preprint arXiv :math/0612219v4, à paraître dans *Compos. Math.*, 2008.
- [Kan01] Richard KANE : *Reflection groups and invariant theory*. CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, 5. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [KM09] Christian KRATTENTHALER et Thomas W. MÜLLER : Cyclic sieving for generalised non-crossing partitions associated to complex reflection groups of exceptional type. Preprint arXiv :1001.0028v1, 2009.
- [KM10] Christian KRATTENTHALER et Thomas W. MÜLLER : Decomposition numbers for finite Coxeter groups and generalised non-crossing partitions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 362:2732–2787, 2010.
- [Kra08] Daan KRAMMER : A class of Garside groupoid structures on the pure braid group. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 360(8):4029–4061, 2008.
- [Kre72] Germain KREWERAS : Sur les partitions non croisées d'un cycle. *Discrete Mathematics*, 1(4):333–350, 1972.
- [Loo74] Eduard LOOIJENGA : The complement of the bifurcation variety of a simple singularity. *Invent. Math.*, 23:105–116, 1974.
- [LT09] Gustav I. LEHRER et Donald E. TAYLOR : *Unitary reflection groups*, volume 20 de *Australian Mathematical Society Lecture Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- [LZ99] Sergei K. LANDO et Dimitri ZVONKINE : On multiplicities of the Lyashko-Looijenga mapping on the discriminant strata. *Funct. Anal. Appl.*, 33(3):178–188, 1999.
- [LZ04] Sergei K. LANDO et Alexander K. ZVONKIN : *Graphs on surfaces and their applications*, volume 141 de *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 2004. With an appendix by Don B. Zagier, Low-Dimensional Topology, II.
- [McC05] Jon MCCAMMOND : An introduction to Garside structures. Preprint, <http://www.math.ucsb.edu/~jon.mccammond/papers/intro-garside.pdf>, 2005.
- [McC06] Jon MCCAMMOND : Noncrossing partitions in surprising locations. *Amer. Math. Monthly*, 113(7):598–610, 2006.
- [Nam87] Makoto NAMBA : *Branched coverings and algebraic functions*, volume 161 de *Pitman Research Notes in Mathematics Series*. Longman Scientific & Technical, Harlow, 1987.
- [OT92] Peter ORLIK et Hiroaki TERAOKA : *Arrangements of hyperplanes*, volume 300 de *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [Rea08] Nathan READING : Chains in the noncrossing partition lattice. *SIAM J. Discrete Math.*, 22(3):875–886, 2008.
- [Rea09] Nathan READING : Noncrossing partitions and the shard intersection order. Preprint arXiv :0909.3288v1, 2009.
- [Rea10] Nathan READING : Noncrossing partitions, clusters and the Coxeter plane. *Sém. Lothar. Combin.*, 63:Art. B63b, 32 pp. (electronic), 2010.
- [Rei97] Victor REINER : Non-crossing partitions for classical reflection groups. *Discrete Math.*, 177(1-3):195–222, 1997.

- [Rip06] Vivien RIPOLL : Propriété de treillis dans les groupes de réflexions réels finis, d'après Brady-Watt. Mémoire de Master 2 (Université Paris VI), <http://www.math.ens.fr/~vripoll/M2.pdf>, 2006.
- [Rip10] Vivien RIPOLL : Orbites d'Hurwitz des factorisations primitives d'un élément de Coxeter. *J. Alg.*, 323(5), Mars 2010.
- [RSW04] Victor REINER, Dennis STANTON et Dennis WHITE : The cyclic sieving phenomenon. *J. Combin. Theory Ser. A*, 108(1):17–50, 2004.
- [S<sup>+</sup>97] Martin SCHÖNERT *et al.* : *GAP – Groups, Algorithms, and Programming – version 3 release 4 patchlevel 4*. Lehrstuhl D für Mathematik, Rheinisch Westfälische Technische Hochschule, Aachen, Germany, 1997.
- [Sai] Kyoji SAITO : Polyhedra dual to the Weyl chamber decomposition. Unpublished extended version (personal communication, August 2009).
- [Sai93] Kyoji SAITO : On a linear structure of the quotient variety by a finite reflexion group. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 29(4):535–579, 1993.
- [Sai04a] Kyoji SAITO : Polyhedra dual to the Weyl chamber decomposition : a précis. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 40(4):1337–1384, 2004.
- [Sai04b] Kyoji SAITO : Uniformization of the orbifold of a finite reflection group. In *Frobenius manifolds*, Aspects Math., E36, pages 265–320. Vieweg, Wiesbaden, 2004.
- [Sai05] Kyoji SAITO : Semi-algebraic geometry of braid groups. Preprint, <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~saito/semi-alge.pdf>, 2005.
- [Ser68] Jean-Pierre SERRE : *Corps locaux*. Hermann, Paris, 1968. Deuxième édition, Publications de l'Université de Nancago, No. VIII.
- [Sha77] Igor R. SHAFAREVICH : *Basic algebraic geometry*. Springer-Verlag, Berlin, 1977. Translated from the Russian by K. A. Hirsch, Revised printing of Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 213, 1974.
- [Sim00] Rodica SIMION : Noncrossing partitions. *Discrete Math.*, 217(1-3):367–409, 2000. Formal power series and algebraic combinatorics (Vienna, 1997).
- [Spe97] Roland SPEICHER : Free probability theory and non-crossing partitions. *Sém. Lothar. Combin.*, 39:Art. B39c, 38 pp. (electronic), 1997.
- [Spr74] Tonny A. SPRINGER : Regular elements of finite reflection groups. *Invent. Math.*, 25:159–198, 1974.
- [ST54] Geoffrey C. SHEPHARD et John A. TODD : Finite unitary reflection groups. *Canadian J. Math.*, 6:274–304, 1954.
- [Sta97a] Richard P. STANLEY : *Enumerative combinatorics. Vol. 1*, volume 49 de *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. With a foreword by Gian-Carlo Rota, Corrected reprint of the 1986 original.
- [Sta97b] Richard P. STANLEY : Parking functions and noncrossing partitions. *Electron. J. Combin.*, 4(2):Research Paper 20, approx. 14 pp. (electronic), 1997. The Wilf Festschrift (Philadelphia, PA, 1996).
- [Sta99] Richard P. STANLEY : *Enumerative combinatorics. Vol. 2*, volume 62 de *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999. With a foreword by Gian-Carlo Rota and appendix 1 by Sergey Fomin.

- [Ste64] Robert STEINBERG : Differential equations invariant under finite reflection groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 112:392–400, 1964.
- [Stu10] Christian STUMP :  $q, t$ -Fuß-Catalan numbers for finite reflection groups. Preprint arXiv :0901.1574, à paraître dans *J. Algebraic Combin.*, 2010.