Université Denis Diderot (Paris VII) **2009-2010**
CM 3 **Groupe Concours**

Feuille 5
Intégrales, Intégrales généralisées

Exercice 1 — Déterminer les limites suivantes lorsque n tend vers $+\infty$

$$1)\sum_{k=0}^{2n}\frac{k}{k^2+n^2}\quad ;2)\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}\quad ;3)\sum_{k=n}^{2n}\sin\left(\frac{\pi}{k}\right).$$

Exercice 2 — Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que pour toute fonction g en escaliers on a $\int_0^1 f(x)g(x)dx=0$. Montrer que cela implique que f est la fonction nulle.

Exercice 3 — Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $x_0\in[0,1]$ tel que $f(x_0)=x_0$.

Exercice 4 — Soit $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$. Montrer que $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt \underset{x\to+\infty}{\to} l$.

Exercice 5 — Calculer les limites suivantes

1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^\pi \frac{n\sin x}{x+n}dx$ 2) $\lim\limits_{a\to 0}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-a\sin x}dx$ 3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{x+1}dx$

4) $\lim\limits_{u\to 0}\int_u^{2u}\frac{\sin x}{x^2}dx$ 5) $\lim\limits_{u\to 0}\int_0^u \frac{u}{u^2+x^2}f(x)dx$ avec f continue en 0.

Exercice 6 — Déterminer la nature (convergente, divergente, semi convergente) des intégrales impropres suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^\infty (x+2)-\sqrt{x^2+4x+1}\quad dx$
2. $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x^{1/3}+\sin x}dx$
3. $\displaystyle\int_0^\infty x^a e^{-x}dx,\ a\in\mathbb{R}$
4. $\displaystyle\int_1^\infty e^{-\sqrt{\ln x}}dx$
5. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{\ln x}}}{x}dx$
6. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^{\cos(1/x)}}dx$
7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\mathrm{Argsh}x}$ et $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\mathrm{Argsh}x}$
8. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}dx$
9. $\displaystyle\int_1^\infty \mathrm{Argsh}\frac{x+1}{x}dx$
10. $\displaystyle\int_0^\infty \sin(\sin x)dx$
11. $\displaystyle\int_0^\infty \cos(e^x)dx$
12. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x^2}dx$
13. $\displaystyle\int_0^\infty \left(\sqrt{x+\cos x}-\sqrt{x}\right)dx$
14. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}+\sin x}dx$
15. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-(\ln x)^2}dx$
16. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2-1}dx$

Exercice 7 — Calculer les intégrales suivantes après avoir montré leur convergence :

1. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$
2. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$
3. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+\mathrm{ch}^2 x}$
4. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^n}dx$ pour $n > 1$
5. $\displaystyle I = \int_0^{\pi/2} \ln\cos x$ et $\displaystyle J = \int_0^{\pi/2} \ln\sin x$ (indication : on cherchera des relations liant I, J et $I+J$).

Exercice 8 — Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction de classe C^1. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \geq 0$, $f'(x) \geq \alpha$. Montrer que $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{f(x)}{x^2}dx$ diverge.

Exercice 9 — Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction décroissante, positive, et telle que $\displaystyle\int_0^{\infty} f$ converge. Montrer que $xf(x) \to 0$.

(Indication : on comparera $xf(x)$ à un reste de l'intégrale.)

Exercice 10 — Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ dérivable, et telle que $f(0) = f'(0) = 0$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{x^{3/2}}dx$ converge.

Exercice 11 — Soient $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ des fonctions telles que $f \geq 0$, $g = o(f)$ au voisinage de l'infini, et $\displaystyle\int_0^{\infty} f$ diverge. Montrer que

$$\int_0^x g = o\left(\int_0^x f\right).$$

Exercice 12 — Calculer $\displaystyle\lim_{a \to 0^+} \int_a^{3a} \frac{\tan x}{x^2}dx$. On pourra pour cela comparer cette limite à celle de $\displaystyle\int_a^{3a} \frac{dx}{x}$.

Exercice 13 — Donner un équivalent des sommes suivantes quand n tend vers l'infini (on pourra pour chacune d'entre elles, la comparer à une intégrale bien choisie).

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sqrt{k}$
2. $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}$
3. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\ln k}$. Pour ce dernier exemple, on cherchera un équivalent de l'intégrale $\displaystyle\int_2^x \frac{1}{\ln t}dt$ en faisant une intégration par parties et en utilisant l'exercice 11.