

Feuille 4
Séries numériques

Exercice 1 — Etudier la nature des séries dont voici le terme général

- | | | | |
|---|--|---|-------------------------------------|
| 1) $\frac{1}{n \log n}$ | 2) $\frac{1+\log n}{n^2}$ | 3) $\frac{2^n+5}{3^n-11}$ | 4) $\frac{n+\ln n}{n^2+1}$ |
| 5) $n^{\ln(a)}$ ($a > 0$) | 6) $e^{-\sqrt{n}}$ | 7) $n^2 \sin(\frac{1}{2^n})$ | 8) $(\frac{1}{2} + \frac{1}{n})^n$ |
| 9) $\frac{(n!)^3}{(3n)!}$ | 10) $(\frac{3n}{4n-1})^{2n+1}$ | 11) $\frac{(n+1)^4}{n!+1}$ | 12) $\frac{1!+\dots+(n-1)!}{n!}$ |
| 13) $\frac{1!+\dots+(n-2)!}{n!}$ | 14) $\frac{1}{(1+n)^\alpha} \ln(\cos(\frac{1}{n}))$ ($\alpha > 0$) | 15) $n^{(n-k)} - 1$ ($k \in \mathbb{R}$) | 16) $n^{\frac{1}{1+n^2}} - 1$ |
| 17) $n \cdot n^{\frac{1}{n}}$ | 18) $n! (\frac{x}{n})^n$ ($x > 0$) | 19) $1 - \cos(\frac{1}{n})$ | 20) $\frac{n^{\log n}}{(\log n)^n}$ |
| 21) $(n^6 + 3)^a - (n^2 + 2)^{3a}$ ($a \in \mathbb{R}$) | 22) $n^2 e^{-\sqrt{n}}$ | 23) $\frac{n^\alpha}{(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)}$ | ($a > 0, \alpha \in \mathbb{R}$) |

Exercice 2 — Soit α un nombre réel. Pour tout entier strictement positif n , on pose

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha}, v_n = \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \text{ et } w_n = \frac{1}{n^\alpha} - \frac{2}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha}.$$

1. Pour quelles valeurs de α la suite (u_n) est-elle convergente ?
2. Pour quelles valeurs de α la série de terme général v_n est-elle convergente ? Dans ce cas, calculer sa somme.
3. Pour quelles valeurs de α la série de terme général w_n est-elle convergente ? Dans ce cas, calculer sa somme.

Exercice 3 — Pour tout entier positif n , on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{3n+1}$ et $v_n = \frac{3}{(6n+1)(6n+4)}$.

1. Montrer que la série de terme général v_n est convergente.
2. Calculer $u_{2n} + u_{2n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que la série de terme général u_n est convergente et que $\sum_0^{+\infty} u_n = \sum_0^{+\infty} v_n$.

Exercice 4 — Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}_+^*$ la série de terme général $u_n = \frac{\cosh(n)}{a^n}$ converge-t-elle ?

Exercice 5 — Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = u_0 + \dots + u_n$ et $v_n = \frac{u_n}{S_n}$.

1. Montrer que si la série de terme général u_n est convergente, alors la série de terme général v_n est convergente.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\prod_{k=1}^n (1 - v_k) = \frac{u_0}{S_n}$.
3. On suppose que la série de terme général v_n est convergente.
- Quelle est la nature de la série de terme général $\log(1 - v_n)$?
 - Montrer que la série de terme général u_n est convergente.

Exercice 6 — Soient a et b deux nombres réels strictement positifs. Pour quelles valeurs de a et b la série de terme général $\frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}} + b^n}$ converge-t-elle ?

Exercice 7 — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \exp\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ et $v_n = u_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

- Montrer que la série de terme général v_n est divergente.
- La série de terme général u_n est-elle convergente ?

Exercice 8 — Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres complexes. On pose, pour $n > 0$, $v_n = u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{2n}$.

- On suppose que $u_n = a^n$, avec $a \in \mathbb{C}$.
 - Montrer que la série de terme général u_n et la série de terme général v_n sont de même nature.
 - Si la série de terme général v_n est convergente, calculer sa somme.
- On suppose que $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que la série de terme général v_n est convergente si et seulement si $\alpha > 2$.

Exercice 9 — Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ? lesquelles sont fausses ? Justifier la réponse.

- Si pour tout $n > 0$ $u_n > 0$ et si la suite (u_n) est décroissante et a pour limite 0, alors la série de terme général u_n est convergente.
- Si pour tout $n > 0$ $u_n > 0$ et si la série de terme général u_n est convergente, alors la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.
- Si pour tout $n > 0$ $u_n > 0$ et si la série de terme général u_n est convergente, alors la série de terme général $\sqrt{u_n}$ est convergente.
- Si pour tout $n > 0$ $u_n > 0$ et si la série de terme général u_n est convergente, alors la série de terme général u_n^2 est convergente.
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} ((-1)^n n u_n) = 1$ alors la série de terme général u_n est convergente.
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} ((-1)^n n^2 u_n) = 1$ alors la série de terme général u_n est convergente.

Exercice 10 — Démontrer, à l'aide d'un développement limité, que la suite de terme général u_n est convergente, avec $u_n = \sin(n\pi + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})$.

Exercice 11 — Etudier, en fonction du paramètre $\alpha > 0$, la convergence des séries de terme général :

$$(a) \quad n^{2-\alpha} \cos\left(\frac{1}{n}\right); \quad (b) \quad \alpha^{\frac{n+\sqrt{\ln n}}{2}}; \quad (c) \quad \frac{(-\alpha)^n}{\ln n}.$$

Exercice 12 — Soit f une fonction de classe C^2 sur $[-1, 1]$ telle que $f(0) = 0, f'(0) = f''(0) = 1$. Etudier les séries de terme général

$$(a) \quad f\left(\frac{1}{n}\right); \quad (b) \quad f\left(\frac{1}{n^2}\right); \quad (c) \quad f\left(\frac{(-1)^n}{n}\right); \quad (d) \quad f\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \text{ (ici } f \text{ est de classe } C^3).$$

Exercice 13 — Former le produit des séries de terme général u_n et v_n où

$$u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \text{ et } v_n = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Exercice 14 — Soit u_n une suite positive telle que la série de terme général u_n converge. On pose $v_n = \frac{1}{1+n^2u_n}$.

Montrer, en raisonnant par l'absurde, que la série de terme général v_n est divergente.

Exercice 15 — Soient $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ et σ l'application de \mathbb{N}^* dans \mathbb{N}^* définie par

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \sigma(3p-2) = 2p-1; \quad \sigma(3p-1) = 4p-2; \quad \sigma(3p) = 4p.$$

1. Montrer que σ est une bijection.

2. Comparer $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$.

Exercice 16 — Calculer, si elles existent, les sommes des séries de terme général

$$(a) \quad \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}} \quad (n > 0); \quad (b) \quad \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \quad (n > 1); \quad (c) \quad \arctan\left(\frac{1}{2n^2}\right) \quad (n > 0).$$

Exercice 17 — Etudier la nature des séries dont voici le terme général

$$\begin{array}{llll} 1) \frac{(-1)^n}{(2n-1)^3} & 2) (-1)^n \frac{1+n}{n} & 3) \frac{(-1)^n}{n^2 + \ln n} & 4) \frac{\sin(n\theta)}{2^n} \quad (\theta \in \mathbb{R}) \\ 5) \frac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}} & 6) \frac{(-1)^n}{n - \ln n} & 7) \frac{(-1)^n}{2n + \cos(n\pi)} & 8) \frac{n+3}{(-1)^n \sqrt{n-3n}} \\ 9) (-1)^n \cosh\left(\frac{1}{n}\right) \sin\left(\frac{1}{n}\right) & 10) \ln\left(n \cosh\left(\frac{1}{n}\right) \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) & 11) \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1 & 12) \left(\frac{1+n(2-i)}{n(3-2i)-3i}\right)^n \end{array}$$