Université Denis Diderot (Paris VII) **2009-2010**
CM 3 **Groupe Concours**

Feuille 1
Etude locale de fonctions.

Exercice 1 — Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$, où $a, b, c > 0$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)(1-\sin^2 x)\cdots(1-\sin^n x)}{\cos^{2n} x}$.
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{x^x-(\sin x)^{\sin x}}{x^3}$.

Exercice 2 — Étudier les branches infinies du graphe de la fonction $x \mapsto f(x) = x^2\ln(1+\frac{1}{x})$ lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ (préciser la position du graphe par rapport à l'asymptote éventuelle).

Exercice 3 — Former le développement asymptotique en $+\infty$, à la précision $\frac{1}{x^3}$, de

$$x \longmapsto x\ln(x+1)-(x+1)\ln x.$$

Exercice 4 — Calculer des développements limités de :

1. $x \mapsto \cos x \sin x$ à l'ordre 3 en 0.
2. $x \mapsto e^x \sin x$ à l'ordre 3 en 0.
3. $x \mapsto e^{x-x^2/2+x^3/3}$ à l'ordre 4 en 0.
4. $x \mapsto \frac{1+x^2}{x+2x^2}$ à l'ordre 3 en 1.
5. $x \mapsto \frac{\sin x}{\ln(1+x)}$ à l'ordre 4 en 0.
6. $x \mapsto \arcsin x$ à l'ordre 3 en 0.

Exercice 5 — Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{\tan x - x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{x^2}}{x\tan x - x^2}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}$

Exercice 6 — Montrer que la fonction $x \mapsto x + \ln(1+x)$ admet au voisinage de zéro une fonction réciproque et en donner un développement limité en 0 à l'ordre 3

Exercice 7 — Soit f la fonction définie sur $]-1;1[-\{0\}$ par

$$f(x) = \frac{\cos x}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}.$$

Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0 et que ce prolongement est dérivable en 0.

Exercice 8 — Soit f une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et

$$f' = 1 + f + f^2.$$

Calculer un développement limité de f à l'ordre 4 en 0.

Exercice 9 — Le but de l'exercice est d'étudier la fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

o. montrer l'inégalité suivante :

$$\forall u > 0,\ u - \frac{u^2}{2} \leq \ln(1+u) \leq u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3}. \tag{1}$$

i. Montrer que f est dérivable et en déduire que f est strictement croissante.
ii. Démontrer que $\lim\limits_{1^+} f = \ln 2$.
iii. Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$

Exercice 10 —

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $|x \sin x| = 1$ admet une unique solution $x_n \in]n\pi; n\pi + \frac{\pi}{2}[$.
2. Montrer que $x_n = n\pi + \dfrac{1}{n\pi} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ quand $n \to \infty$.
3. (plus difficile) Montrer qu'on peut remplacer $o\left(\frac{1}{n}\right)$ par $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.