Université Paris VII **2009-2010**
CM4 **Groupe concours**

TD1
Formes quadratiques

Exercice 1 — Montrer que les vecteurs $u_1 = (1, -1, 2), u_2 = (2, 0, 2)$ et $u_3 = (1, 1, 1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Exprimer la base duale au moyen de la base (e_1^*, e_2^*, e_3^*) duale de la base canonique .

Exercice 2 — Montrer que les formes linéaires suivantes forment une base de $(\mathbb{R}^4)^*$ et déterminer la base dont elle est duale :

$$l_1(x, y, z, t) = x + y - z + 2t, l_2(x, y, z, t) = x + z, l_3(x, y, z, t) = x + y + z - t, l_4(x, y, z, t) = t$$

Exercice 3 — On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ l 'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 2 et l'on pose $\phi_1(P) = P(1), \phi_2(P) = P'(1), \phi_3(P) = P(0)$, pour tout $P \in E$.

1. Montrer que ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 est une base de E^*.
2. Déterminer la base dont elle est duale.
3. Mêmes questions pour (ϕ_1, ϕ_2, ψ_3) où $\psi_3(P) = P''(1)$ pour tout $P \in E$?

Exercice 4 — Soient $n \in \mathbb{N}$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $a_0, ..., a_n$ des réels tous distincts.On pose $f_k(P) = P(a_k)$, pour tout $P \in E$ et $0 \leq k \leq n$.

1. Montrer que $\bigcap_{0 \leq k \leq n} Ker f_k = \{0\}$ et que $(f_k)_{k \leq n}$ est une base de E^*.
2. Déterminer la base dont elle est duale.
3. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On pose $g_k(P) = P^{(k)}(x_0)$, pour $0 \leq k \leq n$. Montrer que $(g_k)_{k \leq n}$ est une base de E^*. De quelle base est-elle duale ?

Exercice 5 — Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f, g des formes linéaires sur E .Montrer que

$$\text{Ker } f = \text{Ker } g \Leftrightarrow (\exists \alpha \in \mathbb{R}^*, \ g = \alpha f).$$

Exercice 6 — Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $L, l_1, ..., l_n$ des formes linéaires sur E. Montrer que l'on a $\bigcap_{0 \leq k \leq p} \text{Ker } l_k \subset \text{Ker } L$ si et seulement si L est combinaison linéaire des formes l_k. On pourra extraire de $l_1, ..., l_p$ une famille libre puis la compléter en une base de E^*.

Exercice 7 — Soit f la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose $u_1 = (1, 3, 1), u_2 = (2, 1, -1), u_3 = (1 - 1, 1)$.

1. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base.
2. Donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 8 — Soit $f : R \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(u, v) = (x + y - z)(x' - y' + z') - 2(y + z)(y' + z') + zz'$$

où $u = (x, y, z)$ et $(v = x', y', z')$.

1. Montre que f est une forme bilinéaire.
2. Montrer que f n'est pas symétrique.
3. Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par $q(u) = f(u, u)$. Calculer la forme polaire b de q.
4. Posons $g(u, v) = f(u, v) - b(u, v)$. Montrer que g est une forme biinéaire antisymétrique (c-à-d $g(u, v) = -g(v, u)$).

Exercice 9 — Déterminer, pour les formes quadratiques suivantes, les formes polaires, et donner les matrices dans la base canonique.

- $q_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $q_1(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2$.
- $q_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $q_2(x, y, z) = 2xy - y^2 + 5yz + 3z^2$.
- $q_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $q_3(x, y, z) = 3x^2 - 6xy + 4xz - 8y^2 + 5yz$.
- $q_4 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $q_4(x, y, z) = 2(x + y - z)^2 - (y - 2z)^2 - (2x + y)^2$.
- $q_5 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $q_5(x, y, z, t) = z^2 - 3yt + xz + 3xt - 2xy + t^2 - 2yz + 6tz - x^2$.

Exercice 10 — Soit E l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forme
$f(x) = a\cos x + b\sin x + c$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$ sont des constantes. On considère, sur E, la forme bilinéaire symétrique définie par

$$\phi(f, g) = \int_0^\pi f(x)g(x)dx.$$

1. Calculer la matrice de ϕ dans la base (e_1, e_2, e_3), où l'on a posé

$$e_1 : x \mapsto \cos x,\ e_2 : x \mapsto \sin x,\ e_3 : x \mapsto 1.$$

2. Déterminer le sous-espace vectoriel F des vecteurs de E orthogonaux à e_1 et e_3 pour ϕ.
3. En déduire une base orthogonale pour E.

Exercice 11 — Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. On considère, sur E, l'application définie par

$$q(P) = \int_0^1 P(x)^2 dx.$$

1. Montrer que q est une forme quadratique et expliciter sa forme polaire b.
2. Calculer la matrice de b dans la base canonique $B = (X^0, X, X^2)$ de E.
3. Soient les polynômes P_1, P_2 et P_3 définis par

$$P_1 = X^0 \quad , P_2 = -\frac{1}{2} + X \quad , P_3 = \frac{1}{2} - X + X^2.$$

   Montrer que $B' = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de E et donner la matrice de b dans cette base.
4. En déduire que b est non dégénérée.

Exercice 12 — Soit $q : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$q(x, y, z, t) = xy + zt \qquad \text{pour tout vecteur } (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$$

1. Montrer que q est une forme quadratique et expliciter sa forme bilinéaire symétrique associée b. Est elle dégénérée ?
2. Soit $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Vérifier que les vecteurs $e'_1 = e_1 + e_2$, $e'_2 = e_1 - e_2$, $e'_3 = e_3 + e_4$ et $e'_4 = e_3 - e_4$ forment une base de $\mathbb{R}^4$ que l'on notera B'.
3. Déterminer la matrice de b dans B' et exprimer q dans cette base.
4. Soit F le sous espace vectoriel défini par le système d'équations :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

   Trouver une base de $F^\perp$.

Exercice 13 — Soit $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par :

$$q(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 2xy + 2xz - 6yz \qquad \text{pour tout vecteur } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Décomposer la forme quadratique q en somme de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes.
2. Montrer que pour tout $u \neq 0$ dans $\mathbb{R}^3$ on a $q(u) > 0$.
3. Soit A la matrice de q dans la base canonique. Montrer qu'il existe une matrice inversible $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tPP$.

Exercice 14 — Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz \qquad \text{pour tout vecteur } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Ecrire la matrice de q dans la base canonique.
2. Montrer que q est une forme quadratique dégénérée et trouver une base du noyau de q.
3. Trouver une base orthogonale pour q. Quelle est la matrice de q dans cette base ?

Exercice 15 —

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ et q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$q(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2 + axy + 2xz \qquad \text{pour tout vecteur } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

   Décomposer la forme quadratique q en somme de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes. Trouver une base orthogonale pour q.

2. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et $b \in \mathbb{R}$. On considère, sur E, l'application définie par

$$q(P) = P(1)P(-1) + bP(0)P'(0). \qquad \text{pour tout polynôme } P \in E.$$

   (a) Montrer que q est une forme quadratique et trouver sa forme polaire.
   (b) Donner la matrice de q dans la base canonique $(1, X, X^2)$.
   (c) Déterminer le rang, la signature, le noyau de q et une base orthogonale de q.

Exercice 16 — Soit a un nombre réel. Soit $q : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par

$$q(x,y,z,t) = a(z^2 - x^2) - y^2 + 2axy + 6zt \qquad \text{pour tout vecteur } (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4.$$

1. Pour quelles valeurs de a la forme quadratique est-elle non dégénérée ?
2. On suppose que q est dégénérée. Trouver une base orthogonale pour q.

Exercice 17 — Soit a un nombre réel, et soit $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par

$$q(x,y,z) = a(x^2 + y^2 + z^2) - 2xy + 2xz + 2yz \text{ pour tout vecteur } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Pour quelles valeurs de a la forme quadratique est-elle non dégénérée ?
2. On suppose que $a = 0$. Soit D la droite de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $v = (2,2,1)$. Trouver une base de $D^\perp$. Les sous-espaces vectoriels D et $D^\perp$ sont-ils supplémentaires ?
3. Montrer que la forme quadratique q est définie positive si et seulement si $a > 2$.
4. On suppose que $a = 4$. Soit P le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $9x - y + 6z = 0$. Trouver une base de $P^\perp$.

Exercice 18 — Soit a un nombre réel, et soit $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par

$$q(x,y,z) = a^2x^2 + 4xy + xz + yz \text{ pour tout vecteur } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Déterminer la signature de q.
2. Soit $q' : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par $q'(x,y,z) = x^2 - y^2 - z^2$. Pour quelles valeurs de a existe-t-il une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ bijective telle que $q = q' \circ f$. Dans ce cas, expliciter f.

Exercice 19 — Posons $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
Montrer qu'il existe une matrice U de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que $B = {}^tUAU$.

Exercice 20 — Soit $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par

$$q(x,y,z) = 4x^2 + 2y^2 + z^2 + 4xy - 2yz \text{ pour tout vecteur } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Trouver le noyau, une base orthogonale, et écrire la matrice de q dans la base trouvée.

Exercice 21 — Calculer la signature des formes quadratiques suivantes :

- $q_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $q_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 4xz - 4yz$
- $q_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $q_2(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 - z^2 - 8xz$
- $q_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $q_3(x,y,z) = x^2 - 3y^2 - 2xy + 4xz$
- $q_4 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $q_4(x,y,z,t) = xy + xz + xt + yz + yt + zt$
- $q_5 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $q_5(x,y,z,t) = xy + xz + xt - yz + yt + 2zt$

Exercice 22 — Soient q_1 et q_2 les formes quadratiques définies sur $\mathbb{R}^2$ par

$$q_1(x,y) = 3x^2 + 2xy + y^2 \quad \text{et} \quad q_2(x,y) = 7x^2 + 6xy + 2y^2 \quad \text{pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^2$ qui est à la fois orthonormée pour q_1 et orthogonale pour q_2.

Exercice 23 — Soit a un nombre réel. Calculer la signature des formes quadratiques suivantes :
- $q_1 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $q_1(x,y,z,t) = x^2 + y^2 - at^2 + 2axy + 4zt$.
- $q_2 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $q_2(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + z^2 - 2t^2 - 2xy + 2xz - 2xt + 2yz - 4ayt$.

Exercice 24 — Soit $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par

$$q(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 2xy - 2xz - yz \qquad \text{pour tout vecteur } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Montrer qu'il existe des sous-espaces vectoriels F et G de $\mathbb{R}^3$ tels que $q_{|F}$ est définie positive, $q_{|G}$ est définie négative, et $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.
2. Trouver une base d'un tel sous-espace vectoriel F et d'un tel sous-espace vectoriel G.
3. Soit l la forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$ définie par $l(x,y,z) = x + y + z$. Montrer qu'il existe un unique vecteur $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $l(u) = B(u,v)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, où B est la forme bilinéaire symétrique associée à q. Déterminer v.

Exercice 25 — Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie supérieure ou égale à 2. Soient q une forme quadratique non dégénérée sur E et B sa forme bilinéaire symétrique associée. On suppose qu'il existe un vecteur u non nul de E tel que $q(u) = 0$.

1. Montrer qu'il existe un vecteur de E tel que $B(u,v) = 1$.
2. Soit $v \in E$ tel que $B(u,v) = 1$. Montrer qu'il existe un nombre réel λ tel que l'on ait $B(u, v+\lambda u) = 1$ et $q(v + \lambda u) = 0$.
3. Soit $v \in E$ tel que $B(u,v) = 1$ et $q(v) = 0$.
   (a) Montrer que les vecteurs u et v sont linéairement indépendants.
   (b) Soit P le plan de E engendré par u et v. Montrer que $E = P \oplus P^{\perp}$.

Exercice 26 — On rappelle que la *trace* d'une matrice carrée est la somme de ses coefficients diagonaux. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles de taille n. On définit $f : E \times E \to \mathbb{R}$ par $f(X,Y) = \mathrm{Tr}(XY)$.

1. Montrer que f est une forme bilinéaire symétrique sur E.
2. On suppose désormais que $n = 2$. On pose :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;,\; A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;,\; A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \;,\; A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \;.$$

   Montrer que (A_1, A_2, A_3, A_4) est une base de E et déterminer la matrice de f dans cette base.

3. On revient au cas général : on note $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{S}$) le sous-espace vectoriel formé des matrices anti-symétriques (resp. symétriques). Montrer que $\mathcal{A}^\perp = \mathcal{S}$ et que $\mathcal{S}^\perp = \mathcal{A}$.

Exercice 27 — Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $\mathcal{Q}(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E.

1. Soient $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ et $q \in \mathcal{Q}(E)$.Montrer que $q \circ \varphi \in \mathcal{Q}(E)$. On suppose que dans une base $\mathcal{B}$ de E, φ est représenté par la matrice B et q par la matrice A. Quelle est la matrice de $q \circ \varphi$ dans la base $\mathcal{B}$?
2. Soient $q, q' \in \mathcal{Q}(E)^2$. On dit que q' est *équivalente* à q s'il existe $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ tel que $q' = q \circ \varphi$. Montrer que pour toutes formes quadratiques q_1, q_2, q_3 dans $\mathcal{Q}(E)$, on ales propriétés suivantes :
   (a) q_1 est équivalente à elle-même ;
   (b) Si q_1 est équivalente à q_2, alors q_2 est équivalente à q_1 ;
   (c) Si q_1 est équivalente à q_2 et q_2 est équivalente à q_3, alors q_1 est équivalente à q_3.
3. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et que $E = \mathbb{C}^2$. Montrer que toute forme quadratique sur E est équivalente à l'une des trois formes suivantes ;
$$q_0(x, y) = 0 \quad , \quad q_1(x, y) = x^2 \quad , \quad q_2(x, y) = x^2 + y^2 \quad .$$
4. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et que $E = \mathbb{R}^2$. Montrer que toute forme quadratique sur E est équivalente à l'une des six formes suivantes ;
$$q_0 = 0 \ , \ q_{1,+} = x^2 \ , \ q_{1,-} = -x^2 \ , \ q_{2,+} = x^2 + y^2 \ , \ q_{2,-} = -x^2 - y^2 \ , \ q_2 = x^2 - y^2 \ .$$

Exercice 28 — Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles 2×2. On considère l'application $q : E \to \mathbb{R}$ définie par $q(A) = \det A$.

1. Montrer que q une forme quadratique sur E et donner sa forme polaire.
2. Déterminer le cône isotrope de q ainsi que sa signature et son rang.
3. Déterminer une base orthogonale pour q.
4. Soit F l'ensemble des matrices de trace nulle. Trouver l'orthogonal de F.