TD2
Espaces euclidiens

Exercice 1 — Soit $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la forme quadratique définie par

$$q(x,y,z) = x^2 + 6y^2 + 16z^2 - 4xy + 6xz - 16yz \quad \text{pour tout } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Montrer que la forme bilinéaire symétrique associée à q est un produit scalaire.
2. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire associé à q. Orthonormaliser la base canonique selon le procédé de Gram-Schmidt.

Exercice 2 —

Soient n un entier positif et E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. Soit $B : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$B(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt \quad \text{pour tous polynômes } P, Q \in E.$$

1. Montrer que B est un produit scalaire .
2. Montrer qu'il existe un unique polynôme $H \in E$ tel que pour tout polynôme P de E on ait
$$\int_{-1}^{1} H(t)P(t)dt = P'(0).$$
3. On suppose que $n = 2$ et on munit E du produit scalaire B.
   (a) Orthonormaliser la base $(1, X, X^2)$ selon le procédé de Gram-Schmidt.
   (b) Calculer le polynôme H.

Exercice 3 — Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, q(x,y,z) = 2x^2 + 5y^2 + 13z^2 - 4xy + 8xz - 2yz$.

1. Montrer que q est une forme quadratique définie positive.
2. Trouver une base orthonormée par réduction de Gauss.
3. Orthonormaliser la base canonique par la méthode de Gram-Schmidt et comparer les résultats.

Exercice 4 — On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire usuel. Soit D la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x + 2y = 0$. Soient p la projection orthogonale de $\mathbb{R}^2$ sur D, et s la symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^2$ par rapport à D.

1. Ecrire les matrices de p et de s dans la base canonique.
2. Trouver toutes les droites Δ de $\mathbb{R}^2$ telles que les droites Δ et $s(\Delta)$ sont orthogonales.

Exercice 5 —

On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel. Soit D la droite de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur $(3, 1, 2)$. Quelle est la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur la droite D ?

Exercice 6 —

Soit $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par

$$q(x,y,z) = 4x^2 + 5y^2 + 7z^2 - 8xy + 8xz - 6yz \quad \text{pour tout } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Montrer que la forme bilinéaire symétrique associée à q est un produit scalaire.
2. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire associé à q. Quelle est la matrice dans la base canonique, de la projection orthogonale sur le plan d'équation $z = 0$?

Exercice 7 — Soit P le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ d'équations

$$\begin{cases} x + 2y - t = 0 \\ x - 3y + z + t = 0. \end{cases}$$

On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire usuel. Quelle est la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^4$ par rapport à P ?

Exercice 8 —
On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire usuel. Soient u_1, u_2, u_3, u_4 les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ définis par

$$u_1 = (2,1,0,2) \qquad u_2 = (0,1,0,1) \qquad u_3 = (2,1,3,1) \qquad u_4 = (1,1,1,1).$$

1. Montrer que (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Orthonormaliser la base (u_1, u_2, u_3, u_4) selon le procédé de Gram-Schmidt.
3. Soit P le plan de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs u_1 et u_2. Trouver la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur P.

Exercice 9 —
On considère l'espace euclidien orienté usuel $\mathbb{R}^3$. Soit D la droite de $\mathbb{R}^3$ engendrée par le vecteur $(1, -2, 2)$.
1. Trouver une équation de $D^\perp$.
2. Trouver une base orthonormée directe dont le premier vecteur appartient à D.
3. Quelles sont les matrices dans la base canonique de
   (a) la symétrie orthogonale par rapport à D ?
   (b) la rotation d'axe D et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$?
   (c) la rotation d'axe D et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$?

   Pour les deux dernières questions, le plan $D^\perp$ est orienté par le choix du vecteur unitaire

$$e = \frac{1}{\|(1,-2,2)\|}(1,-2,2).$$

Exercice 10 — On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel. Soient a, b, c, d des nombres réels et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} b & a & a \\ a & c & a \\ a & a & d \end{pmatrix}.$$

1. Pour quelles valeurs de a, b, c, d la matrice A est-elle orthogonale ?
2. Pour quelles valeurs de a, b, c, d l'endomorphisme f est-il une symétrie orthogonale par rapport à un plan ? Dans ce cas, préciser par rapport à quel plan.
3. Pour quelles valeurs de a, b, c, d l'endomorphisme f est-il une rotation ? Dans ce cas, préciser l'axe et l'angle de f.

Exercice 11 — On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire usuel et on note $\langle u|v\rangle$ le produit scalaire des vecteurs u, v de $\mathbb{R}^2$. Soit $q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par

$$q(x,y) = 2x^2 + 2\sqrt{2}xy + 3y^2 \qquad \text{pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Quelle est la matrice A de q dans la base canonique ?
2. Soit f l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est A.
   (a) Montrer que pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^2$ on a $q(u) = \langle f(u)|u\rangle$.
   (b) Trouver une base orthonormée (u_1, u_2) de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est diagonale. Calculer $q(au_1 + bu_2)$ pour tous nombres réels a et b.
3. Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ qui est orthogonale pour q.
4. Dessiner la ligne de niveau 4 de la fonction q.

Exercice 12 —

Soit f l'endomorphisme de l'espace euclidien usuel orienté $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est une isométrie.
2. Montrer que f a une unique valeur propre que l'on déterminera.
3. Trouver une base orthonormée (u_1, u_2, u_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que u_1 est vecteur propre de f.
4. Quelle est la matrice de f dans la base (u_1, u_2, u_3) ?
5. Montrer qu'il existe une unique rotation r et une unique symétrie orthogonale s par rapport à un plan telles que $f = r \circ s = s \circ r$. Préciser l'axe et la mesure de r.

Exercice 13 — Soit E un espace euclidien de dimension $n > 2$, et $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base orthonormée de E. Considérons un vecteur $u = u_1e_1 + \cdots + u_ne_n$et f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est égale à $A = (u_iu_j)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme symétrique et que f est de rang 1.
2. Quelles sont les valeurs propres et les espaces propres de f ?
3. A quelle condition sur u l'endomorphisme f est-il une projection orthogonale ?

Exercice 14 — On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f.
2. Montrer que pour tout vecteur non nul u, on a$\langle f(u),\, u\rangle > 0$.
3. Soit $N : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $N(u) = \sqrt{\langle f(u),\, u\rangle}$. Montrer que N est une norme et que pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^3$, on a $\|u\| \leq N(u) \leq \sqrt{2}\,\|u\|$.

Exercice 15 — Soit E un espace euclidien de dimension 3 et r une rotation d'axe D. Montrer que pour toute isométrie f de E, l'endomorphisme $f \circ r \circ f^{-1}$ est une rotation, dont on précisera l'axe.

Exercice 16 —

Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3 et a un vecteur unitaire de E. Soit f l'endomorphisme de E défini par $f(x) = x \wedge a + \langle x,\, a\rangle a$ pour tout $x \in E$.

1. Calculer $\|f(x)\|^2$ pour tout vecteur $x \in E$.
2. Montrer que f est une rotation, dont on précisera l'axe et la mesure.

Exercice 17 — Soient E un espace euclidien de dimension 3 et f un endomorphisme de E. Montrer que f est une rotation si et seulement si $f(u \wedge v) = f(u) \wedge f(v)$ pour tous vecteurs u et v dans E.

Exercice 18 —

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3. Soient s une symétrie orthogonale par rapport à un plan P et r une rotation de E d'angle différent de $k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$ et telle que $r \circ s = s \circ r$.

1. Montrer que l'axe de r est la droite D orthogonale à P.
2. Montrer que 1 n'est pas valeur propre de $r \circ s$.
3. Montrer que u est un vecteur propre de $r \circ s$ si et seulement si u appartient à D.

Exercice 19 — Soient E un espace euclidien de dimension 3 et f une isométrie de E de déterminant -1 et telle que $f \neq -\mathrm{id}_E$.

1. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si f est une symétrie orthogonale par rapport à un plan.
2. Montrer qu'il existe une unique symétrie orthogonale s par rapport à un plan et une unique rotation r telles que $f = r \circ s = s \circ r$.

Exercice 20 — Soit E un espace euclidien de dimension 4 et f une isométrie de E ayant un vecteur propre u.

1. Montrer qu'il existe un vecteur v orthogonal à u et qui est aussi vecteur propre de f.
2. Montrer qu'il existe un plan P de E tel que P et $P^\perp$ sont stables par f et tel que la restriction de l'endomorphisme f à P est diagonalisable.
3. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est de la forme

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4 \end{pmatrix} \text{ ou bien } \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

avec $\varepsilon_i = \pm 1$ et $\theta \in]0, 2\pi[- \{\pi\}$.

Exercice 21 — Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n et q une forme quadratique sur E. Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, A la matrice de q dans cette base. On note A_k la matrice extraite de A obtenue en supprimant les $n-k$ dernières lignes et colonnes $(1 \leq k \leq n)$.

1. Montrer que si q est définie positive, on a $\det A_k > 0$, pour $1 \leq k \leq n$.
2. On suppose $n \geq 2$, $\det A_n > 0$ et $\det A_{n-1} > 0$. Soit H l'hyperplan engendré par $(e_1, \dots, e_{n-1})$. Montrer que $H \oplus H^\perp = E$. Soit u_n une base de $H^\perp$. Matrice de q dans la base $(e_1, \dots, e_{n-1}, u_n)$? Montrer que $q(u_n) > 0$.
3. On suppose $\det A_k > 0$, pour $1 \leq k \leq n$. Montrer que q est définie positive.
4. Application : CNS pour que $q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ soit définie positive ?

Exercice 22 — Le but de cet exercice est d'établir le théorème de Hadamard.

1. Soient E euclidien et $(u_1, \dots, u_n)$ une base de E. Montrer que, si $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ sont des bases orthonormées de E, on a $|\det_{\mathcal{B}}(u_1 \dots u_n)| = |\det_{\mathcal{B}'}(u_1 \dots u_n)|$.
2. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base orthonormée de E déduite de $(u_1, \dots, u_n)$ par le procédé de Gram-Schmidt. Montrer que $\det_e(u_1 \dots u_n) = (e_1|u_1) \dots (e_n|u_n)$.
3. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée. Montrer que $|\det_{\mathcal{B}}(u_1 \dots u_n)| \leq \|u_1\| \dots \|u_n\|$. avec égalité si et seulement si $(u_1, \dots, u_n)$ est orthogonale. On a noté $\| \ \|$ la norme euclidienne usuelle.
4. Soit $M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$; on note $C_1 \dots C_n$ ses colonnes. Montrer que :

$$\det M \leq \|C_1\| \dots \|C_n\|$$

avec égalité si et seulement si les C_i sont deux à deux orthogonales. Cette assertion est *le Théorème de Hadamard* .