

Groupes de réflexions et structures de Garside

Projet de thèse

Vivien RIPOLL

Directeur : David BESSIS

16 octobre 2006

Soit V un k -espace vectoriel de dimension finie. On dit que $W \subseteq \mathrm{GL}(V)$ est un *groupe de réflexions* s'il est engendré par des réflexions (r est une réflexion si $\mathrm{codim} \ker(r - 1) = 1$). Dans la suite, sauf mention du contraire, on s'intéresse exclusivement au cas où W est fini.

Les groupes de réflexions rationnels sont les groupes de Weyl, qui contrôlent les algèbres de Lie semi-simples complexes, les groupes réductifs finis, les groupes finis de type de Lie, etc... En passant à $k = \mathbb{R}$, on obtient quelques groupes supplémentaires. Ces deux cas sont très bien compris grâce à la puissance combinatoire des *systèmes de Coxeter*. Le cas complexe est beaucoup plus riche et moins bien compris, même s'il existe une classification datant de 1954, [13]; beaucoup d'indices suggèrent que les groupes de réflexions complexes pourraient intervenir comme «groupes de Weyl» de structures généralisant les groupes réductifs.

De nombreuses applications intéressantes, notamment en théorie des représentations, impliquent le groupe de tresses $B(W)$ associé à W , que l'on définit comme suit : soit R l'ensemble de toutes les réflexions de W et $\mathcal{A} := \{\ker(r - 1) \mid r \in R\}$ l'arrangement de réflexion associé à W ; on pose $V_{\mathbb{C}}^{\mathrm{reg}} := V \otimes \mathbb{C} - \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H \otimes \mathbb{C}$, et

$$B(W) := \pi_1(V_{\mathbb{C}}^{\mathrm{reg}}/W).$$

Pour comprendre le cas réel, le point de départ est de considérer une *chambre* C , c'est-à-dire une composante connexe de $V - \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H$. On montre que l'ensemble $S \subseteq R$, formé des réflexions par rapport aux murs de C , engendre W , et que l'on a une *présentation de Coxeter*

$$W \simeq \langle S \mid \forall s \in S, s^2 = 1 ; \forall s, t \in S, \underbrace{sts \dots}_{m_{s,t}} = \underbrace{tst \dots}_{m_{s,t}} \rangle_{\text{groupe}},$$

où $m_{s,t}$ est l'ordre du produit st . Un théorème classique de Brieskorn ([5]) établit que $B(W)$ est isomorphe au groupe d'Artin-Tits associé à W , défini par la présentation :

$$A(W, S) := \langle S \mid \forall s, t \in S, \underbrace{sts \dots}_{m_{s,t}} = \underbrace{tst \dots}_{m_{s,t}} \rangle_{\text{groupe}} .$$

Deligne et Brieskorn-Saito, dans deux articles fondateurs [11, 6], ont étudié la structure de $B(W)$ et, notamment, résolu le problème des mots et le problème de conjugaison. Deligne poursuit en démontrant que l'espace $V_{\mathbb{C}}^{\text{reg}}$ est un $K(\pi, 1)$, ce qui avait été conjecturé par Brieskorn. Pour tous ces résultats, un point crucial est la compréhension du *monoïde d'Artin-Tits*

$$A_+(W, S) := \langle S \mid \forall s, t \in S, \underbrace{sts \dots}_{m_{s,t}} = \underbrace{tst \dots}_{m_{s,t}} \rangle_{\text{monoïde}} .$$

Une nouvelle approche, concurrente à la théorie de Coxeter, est apparue ces dernières années. Dans un article de 1998, [3], Birman-Ko-Lee proposent une nouvelle présentation pour le groupe de tresses usuel à n brins (associé à $W = \mathfrak{S}_n$). Leur construction a depuis été généralisée aux autres groupes de Coxeter finis ([1, 4]), puis à certains groupes de Coxeter infinis (travaux de Digne, Brady, Crisp, McCammond) et à certains groupes de réflexions complexes finis ([2]). Dans chaque cas, il s'agit de construire un certain sous-monoïde $M(W) \subseteq B(W)$ appelé *monoïde dual*.

L'intérêt de cette nouvelle approche est multiple :

- d'une part, elle fournit des outils combinatoires pour l'étude de certains groupes de réflexions complexes, ce qui permet d'aborder certaines questions classiques (comme la conjecture $K(\pi, 1)$ pour les arrangements de réflexions complexes), ainsi que des problèmes plus récents issus de la théorie des représentations (programme *Spetses* et travaux de Broué, Malle, Michel, Rouquier...);
- d'autre part, elle semble plus efficace que la théorie classique pour aborder certains groupes d'Artin associés à des groupes de Coxeter infinis (travaux de Charney-Peifer, Brady, McCammond,...);
- enfin, certains aspects combinatoires du monoïde dual suggèrent des liens très forts avec différents objets apparus récemment dans d'autres domaines des mathématiques : algèbres à clusters (Fomin-Zelevinsky, Chapoton), probabilités libres (Biane), etc.

Le monoïde classique $A_+(W, S)$ et le monoïde dual $M(W)$ ont en commun d'être des *monoïdes de Garside*. Cette notion a été introduite à la fin des années 1990 par Dehornoy et Paris, [10, 9], pour axiomatiser les propriétés essentielles de $A_+(W, S)$ et généraliser les arguments utilisés par Deligne et

Brieskorn-Saito. Parmi les axiomes que doit vérifier un monoïde pour être de Garside, le plus important (et généralement le plus difficile à vérifier) est une propriété de treillis (pour les ordres partiels de divisibilité à gauche et à droite). Dans d'autres généralisations plus récentes (voir notamment les travaux de Krammer, [12]), la notion de monoïde de Garside est remplacée par celle de *catégorie de Garside*.

Une structure de Garside permet de résoudre des problèmes de même nature que ceux classiquement traités par la théorie de Coxeter. Ceci explique l'intérêt actuel pour les nouvelles constructions de structures de Garside associées aux groupes de réflexions.

Le projet de thèse vise à étudier certaines de ces nouvelles structures de Garside, notamment dans de leurs aspects géométriques et combinatoires.

Voici un exemple de problème, qui pourra servir de point de départ. Dans le cas du monoïde dual, l'essentiel de la structure se comprend à partir d'un ensemble partiellement ordonné

$$NCP(W)$$

dont les éléments sont appelés *partitions non-croisées généralisées* (la terminologie provient du cas $W = \mathfrak{S}_n$, où $NCP(W)$ correspond effectivement aux partitions non-croisées d'un n -gone régulier). Dans le cas où W est un groupe de Coxeter fini, Chapoton a mis en évidence dans [8] une formule générale pour le nombre de chaînes de longueur donnée dans $NCP(W)$. Cette formule, qui fait intervenir les degrés des invariants fondamentaux de W , a été établie au cas par cas, grâce notamment à des calculs par ordinateur, et aucune explication théorique n'est connue. Une telle explication devrait passer par une meilleure compréhension des aspects géométriques de la construction du monoïde dual et serait susceptible d'avoir des implications en théorie des représentations.

Références

- [1] D. Bessis, *The dual braid monoid*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **36** (2003), 647–683.
- [2] D. Bessis, R. Corran, *Non-crossing partitions of type (e, e, r)* , Adv. Math. **202** (2006), 1–49.
- [3] J. Birman, K. H. Ko, S. J. Lee, *A new approach to the word and conjugacy problem in the braid groups*, Adv. Math. **139** (1998), no. 2, 322–353.
- [4] T. Brady, C. Watt, *$K(\pi, 1)$'s for Artin groups of finite type*, Geom. Dedicata **94** (2002), 225–250.

- [5] E. Brieskorn, *Die Fundamentalgruppe des Raumes der regulären Orbits einer endlichen komplexen Spiegelungsgruppe*, Invent. Math. **12** (1971), 57–61.
- [6] E. Brieskorn, K. Saito, *Artin-Gruppen und Coxeter-Gruppen*, Invent. Math. **17** (1972), 245–271.
- [7] M. Broué, G. Malle, R. Rouquier, *Complex reflection groups, braid groups, Hecke algebras*, J. reine angew. Math. **500** (1998), 127–190.
- [8] F. Chapoton, *Enumerative properties of generalized associahedra*, Sémin. Lothar. Combin. **51** (2004), Art. B51b, 16 pp. (electronic).
- [9] P. Dehornoy, *Groupes de Garside*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **35** (2002) 267–306.
- [10] P. Dehornoy, L. Paris, *Gaussian groups and Garside groups, two generalizations of Artin groups*, Proc. of London Math. Soc. **79** (1999), 569–604.
- [11] P. Deligne, *Les immeubles des groupes de tresses généralisés*, Invent. Math. **17** (1972), 273–302.
- [12] D. Krammer, *A class of Garside groupoid structures on the pure braid group*, arXiv :math.GR/0509165.
- [13] G. C. Shephard, J. A. Todd, *Finite unitary reflection groups*, Canad. J. Math. **6** (1954), 274–304.