Mieux comprendre les groupes de réflexions complexes finis

Vivien Ripoll

École Normale Supérieure
Département de Mathématiques et Applications

CIES - 18 mars 2008

Plan

Groupes de réflexions : définitions

$k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, V k-e.v. de dimension finie n.

Définition

Une réflexion de V est un isomorphisme linéaire r de V, diagonalisable, et tel que $\mathrm{Ker}(r - Id)$ soit un hyperplan de V.

Définition

Un groupe de réflexions fini est un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(V)$ engendré par des réflexions.

W groupe de réflexions fini , r réflexion de W :
$\rightsquigarrow$ r est semblable à $diag(\zeta, 1, \ldots, 1)$, avec ζ racine de l'unité ($\zeta = -1$ si $k = \mathbb{R}$).

Exemple fondamental : $\mathfrak{S}_n$ matrices de permutations.

Algèbre des invariants

G sous-groupe fini (quelconque) de $\mathrm{GL}(V)$

$\rightsquigarrow$ G agit sur l'algèbre symétrique $S := S(V)$.
$S(V) \simeq k[v_1, \ldots, v_n]$ algèbre de polynômes.

$\rightsquigarrow$ étude de l'algèbre des invariants S^G.

Exemple

$G = \mathfrak{S}_n$ agit par permutation des coordonnées.
S^G : polynômes symétriques.

Caractérisation des groupes de réflexions finis

Théorème (Chevalley-Shephard-Todd 1955)

On suppose $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
V k-e.v. de dimension finie, G sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(V)$. Alors :

$$S^G \text{ est une algèbre de polynômes}$$
$$\Updownarrow$$
$$G \text{ est un groupe de réflexions}$$

Proposition

*Dans ce cas, il existe des polynômes homogènes $f_1, \ldots, f_n \in S$ (appelés **invariants fondamentaux**),de degrés $d_1 \leq \cdots \leq d_n$, tels que $S^G = k[f_1, \ldots, f_n]$.*
Les degrés d_i dépendent uniquement de G et sont appelés degrés invariants. De plus :

$$|G| = \prod_{i=1}^{n} d_i \qquad ; \qquad |\mathrm{Refs}(G)| = \sum_{i=1}^{n}(d_i - 1)$$

$k = \mathbb{R}$: systèmes de Coxeter et classification

W groupe de réflexions réel fini. S : ensemble des réflexions par rapport aux murs d'une chambre fixée. Alors (W, S) est un système de Coxeter, *i.e.* W a une présentation de Coxeter :

$$W \simeq \left\langle S \;\middle|\; \forall s \in S, s^2 = 1 \; ; \; \forall s, t \in S, \underbrace{sts\ldots}_{m_{s,t}} = \underbrace{tst\ldots}_{m_{s,t}} \right\rangle$$

Correspondance bijective entre :

- classes d'équivalence de systèmes de Coxeter finis
- classes d'isomorphisme de groupes de réflexions (réels) finis

Problème algébrique $\rightsquigarrow$ problème combinatoire

On a pu classifier les groupes de Coxeter irréductibles :

- 4 familles infinies : $A_n (\simeq \mathfrak{S}_{n+1})$, B_n, D_n, $I_2(e)$ (groupe diédral) ;
- 6 groupes "exceptionnels" : $E_6, E_7, E_8, F_4, H_3, H_4$.

Remarque : contient les **groupes de Weyl** (cas $k = \mathbb{Q}$), qui interviennent dans la théorie de Lie.

Cas des groupes de réflexions complexes

Classification des groupes de réflexions complexes irréductibles (Shephard-Todd, 1955) :

- une série infinie, notée $G(de, e, n)$:
  matrices monomiales de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que :
  - tous les coefficients non nuls sont racines (de)-ièmes de 1 ;
  - leur produit est racine d-ième de 1.

  Ex : $G(1, 1, n) \simeq \mathfrak{S}_n$;
  $G(2, 1, n) \simeq B_n$, et $G(2, 2, n) \simeq D_n$;
  $G(d, 1, 1) \simeq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.
- 34 groupes “exceptionnels”.

Comment ? peu satisfaisant : pas de problème combinatoire associé, méthodes ad hoc...
$\rightsquigarrow$ problème qui se répercute dans toute la théorie : pas de vision globable, beaucoup de “cas par cas”...

W groupe de réflexion complexe fini.
$\mathcal{A} :=$ ensemble des hyperplans de réflexions

$$V^{\mathrm{reg}} := V - \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H$$

W agit sur $V^{\mathrm{reg}} \rightsquigarrow$ étude de la géométrie de l'espace quotient.

Définition

Groupe de tresses de W :

$$B(W) := \pi_1(V^{\mathrm{reg}}/W)$$

Cas $W = \mathfrak{S}_n$: groupe de tresses classique à n brins.

Monoïde d'Artin-Tits

Cas d'un groupe réel complexifié : (W, S) système de Coxeter fini.

Définition

Groupe d'Artin-Tits :

$$A(W,S) := \left\langle S \;\middle|\; \forall s,t \in S, \underbrace{sts\ldots}_{m_{s,t}} = \underbrace{tst\ldots}_{m_{s,t}} \right\rangle$$

Monoïde d'Artin-Tits : $A_+(W,S)$, monoïde de même présentation.

Théorème (Brieskorn, 1971)

$$B(W) \simeq A(W,S)$$

$A_+(W,S)$ et $A(W,S)$ ont largement été étudiés par Deligne et Brieskorn-Saito, en lien avec la théorie de Coxeter.

Monoïde dual de tresses

Pour les groupes non réels :

- **But :** trouver de "bonnes" présentations de W, obtenir un équivalent de la théorie combinatoire de Coxeter...
- **Problème principal :** pas de "réflexions fondamentales" (réflexions de S).

Avancées récentes (Birman-Ko-Lee, Bessis...) : le monoïde dual de tresses, substitut du monoïde d'Artin-Tits.

Point de départ : remplacer S par $\mathcal{R} :=$ ensemble de **toutes** les réflexions de W.

- longueur $\ell_{\mathcal{R}}$ sur W.
- ordre partiel sur W : $u \preccurlyeq_{\mathcal{R}} v \Leftrightarrow \ell_{\mathcal{R}}(u) + \ell_{\mathcal{R}}(u^{-1}v) = \ell_{\mathcal{R}}(v)$.

“Bonnes” présentations ?

Trouver de “bonnes” présentations de W :

1. présentation “à la Coxeter” $\rightsquigarrow$ problème trop souple
2. ... et qui corresponde à une présentation de $B(W)$, en enlevant les relations quadratiques...
3. ... et telle que le monoïde de même présentation soit “pratique”, *i.e.* on peut utiliser les méthodes de Deligne-Brieskorn-Saito (axiomes de monoïde de Garside).

Combinatoire de P_c

Générateurs du monoïde dual :

$$P_c := \{w \in W, w \preccurlyeq_{\mathcal{R}} c\}$$

où c est un élément de Coxeter de W.

La combinatoire de P_c est très riche et mal comprise (ex : P_c est un treillis).
Liens remarquables avec la théorie des invariants :

Proposition

$$|P_c| = \prod_{i=1}^{n} \frac{d_i + d_n}{d_i}$$

(plus précis : nombre de chaînes de longueur donnée)

Jusqu'ici, démonstrations au cas par cas, pas de compréhension globale.