

DÉNOMBREMENT DE CARTES PLANAIRES  
ET  
GRANDES TRIANGULATIONS ALÉATOIRES

David Duris et Vivien Ripoll

◇  
Exposé de maîtrise du MMFAI  
École normale supérieure - juin 2004  
◇

Sujet proposé et encadré par Grégory Miermont

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Dénombrement de triangulations</b>	<b>4</b>
1.1 Séries formelles et théorème de Lagrange . . . . .	4
1.1.1 Séries formelles . . . . .	4
1.1.2 Théorème de Lagrange . . . . .	6
1.2 Triangulations . . . . .	7
1.2.1 Cartes planaires . . . . .	7
1.2.2 Équations fonctionnelles pour les triangulations . . . . .	8
1.2.3 Résolution par la méthode quadratique et le théorème de Lagrange . . . . .	12
1.2.4 Dénombrement des triangulations et triangulations strictes : calcul de $T$ et $B$ . . . . .	13
<b>2 Triangulations aléatoires infinies uniformes</b>	<b>16</b>
2.1 Définitions, notations et premières propriétés . . . . .	16
2.2 Construction d'une probabilité sur les triangulations infinies . . . . .	18
2.2.1 Objectifs . . . . .	18
2.2.2 Tension . . . . .	19
2.2.3 Rigidité . . . . .	22
2.3 Propriétés de l'UIPT . . . . .	25
2.3.1 Unicité du bout . . . . .	25
2.3.2 Étude de composantes indépendantes . . . . .	27
<b>Bibliographie</b>	<b>29</b>

# Introduction

Le but de la première partie est de calculer le nombre  $\phi_{n,m}$  de *triangulations strictes* d'un  $(m+2)$ -gone ayant  $n$  sommets internes (voir figure 1 pour un exemple).

Pour cela, on commence par introduire une théorie fondamentale utilisée dans les dénombrements, les *séries formelles*. En particulier, on démontre le *théorème de Lagrange*, qui permet d'exprimer explicitement l'inverse (au sens de la composition) d'une série formelle. [Plus précisément, si  $w(t)$  vérifie  $w(t) = t\varphi(w(t))$ , la formule donne les coefficients en  $t^n$  de  $f(w(t))$ , pour  $f$  quelconque, en fonction de  $\varphi$  et de  $f$ ]

Ensuite, une étude combinatoire aboutit à des relations de récurrence sur les nombres recherchés, relations qui, transformées en équations fonctionnelles sur les fonctions génératrices associées, se résolvent grâce au théorème de Lagrange et à une stratégie de calcul appelée *méthode quadratique*.

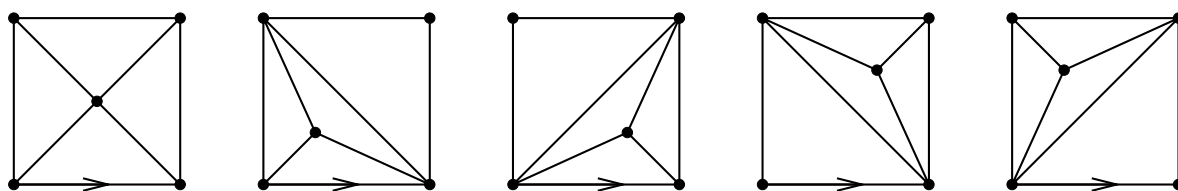


FIG. 1 –  $\phi_{1,2} = 5$  : les 5 triangulations strictes du quadrilatère ayant un sommet interne

Dans la deuxième partie du mémoire, on introduit des probabilités uniformes sur les triangulations finies. Le but est alors de passer à la limite en montrant l'existence d'une probabilité portée par un sous-ensemble des triangulations planes infinies. Ceci est en particulier possible grâce aux résultats combinatoires démontrés précédemment. On obtient alors un objet aléatoire particulier : l'UIPT (Uniform Infinite Planar Triangulation). La dernière section consiste à voir des propriétés de celui-ci, notamment le fait qu'il n'a p.s. qu'un bout et que ses composantes indépendantes finies ont pour lois les distributions libres sur les triangulations (termes définis par la suite).

Nous tenons à remercier Grégory Miermont pour sa disponibilité, sa patience et la clarté de ses explications.

# Partie 1

## Dénombrement de triangulations

### 1.1 Séries formelles et théorème de Lagrange

Les problèmes de dénombrement aboutissent souvent à des relations de récurrence qu'on ne sait pas résoudre directement. L'idée est alors de transformer ces relations en équations fonctionnelles. Ainsi, si par exemple les  $(a_{k,l})$  sont les valeurs à déterminer, on va définir un "polynôme infini" en  $x$  et  $y$  :  $A(x,y) = \sum a_{k,l} x^k y^l$ , appelée *fonction génératrice* des  $(a_{k,l})$ , et on va obtenir une équation satisfaite par  $A(x,y)$ . On a donc besoin de formaliser cette notion de polynôme infini, et d'établir des méthodes de résolution des équations fonctionnelles.

#### 1.1.1 Séries formelles

On va ici donner quelques définitions et propriétés fondamentales concernant les séries formelles. On se place sur le corps  $\mathbb{R}$  des réels, mais toute la théorie pourrait être faite avec un anneau commutatif intègre quelconque.

##### a. Généralités

Soit  $X = \{x_1, \dots, x_d\}$  un ensemble d'indéterminées commutatives. Pour  $i \in \mathbb{N}^d$ , on pose :  $X^i = x_1^{i_1} \dots x_d^{i_d}$ .

**Définition 1.1.1.** *L'anneau des séries formelles en  $X$  est :*

$$\mathbb{R}[[X]] = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}^d} c_i X^i, c_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$(\mathbb{R}[[X]], +, \cdot)$  est un anneau commutatif avec unité ( $1 = X^0$ ), intègre.  $\mathbb{R}[X]$  est un sous-anneau de  $\mathbb{R}[[X]]$ .

Si  $f(X) = \sum_{i \in \mathbb{N}^d} c_i X^i \in \mathbb{R}[[X]]$ , on définit les opérateurs coefficients :  $[X^i]f = c_i$  (on notera  $f(0)$  pour  $[X^0]f$ ).

Si  $X = Y \uplus Z$ , on a clairement  $\mathbb{R}[[X]] \cong (\mathbb{R}[[Y]])[[Z]]$ . On notera alors  $[Z^i]f$  le coefficient de  $Z^i$  appartenant à  $\mathbb{R}[[Y]]$ .

**Définition 1.1.2.**

$$\begin{aligned}\mathbb{R}[[X]]_0 &= \{f \in \mathbb{R}[[X]], f(0) = 0\} \\ \mathbb{R}[[X]]_1 &= \mathbb{R}[[X]] \setminus \mathbb{R}[[X]]_0\end{aligned}$$

Le produit des séries formelles est défini comme pour les polynômes. Mais en général un inverse existe :

**Proposition 1.1.1** (Inverse produit).

$$f \in \mathbb{R}[[X]]_1 \iff \exists ! f^{-1} \in \mathbb{R}[[X]]_1, f(X)f^{-1}(X) = 1$$

*Démonstration.* Il suffit d'écrire l'égalité que l'on cherche coefficient par coefficient. □

Passons maintenant aux puissances négatives.  
(Si  $i \in \mathbb{Z}^d$ , on dira que  $i \geq 0$  si  $\forall j = 1..d, i_j \geq 0$ )

**Définition 1.1.3.** On définit l'anneau des séries formelles de Laurent par :

$$\mathbb{R}((X)) = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} c_i X^i, c_i \in \mathbb{R}, \{i \not\geq 0, c_i \neq 0\} \text{ est fini} \right\}$$

Valuation de  $f \in \mathbb{R}((X))$  :

$$\text{val}(f) = \begin{cases} k & \text{si } f(X) = X^k g(X), \text{ avec } g \in \mathbb{R}[[X]]_1 \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

## b. Composition

**Définition 1.1.4.**  $F = \{f_j \in \mathbb{R}((X)), j \in \mathbb{N}\}$  est une famille sommable si pour chaque  $i \in \mathbb{Z}^d, \{j \in \mathbb{N}, [X^i]f_j \neq 0\}$  est fini. On peut alors définir  $\sum_{j \geq 0} f_j \in \mathbb{R}((X))$ , à partir de ses coefficients.

Pour une famille sommable, la multiplication est distributive par rapport à l'addition, l'addition est associative et commutative.

**Définition 1.1.5.** Soit  $f(X) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} c_i X^i \in \mathbb{R}((X))$  et  $g = (g_1, \dots, g_d)$  avec  $g_j \in \mathbb{R}((X))$ . La composition de  $f$  et  $g$  est  $\sum c_i g^i$ , ou  $f(g(X))$ . On parle de composition (ou substitution) admissible si  $\{c_i g^i, i \in \mathbb{Z}^d\}$  est sommable.

**Définition 1.1.6.** Si  $f \in (\mathbb{R}[Y])[[Z]]$ , on dit que  $Y$  est un ensemble borné de variables pour  $f$ , ou que  $f$  est bornée en  $Y$ .

La proposition suivante se montre aisément mais sera très utile.

**Proposition 1.1.2.**

- Si pour chaque  $j, g_j \in \mathbb{R}[[X]]_0$ , alors  $f(g(X))$  est admissible pour tout  $f \in \mathbb{R}[[X]]$ .
- Si  $Y$  est un ensemble borné de variables pour  $f \in \mathbb{R}[[X]]$ , alors pour tout  $g$  la substitution de  $Y$  par  $g$  est admissible.

**Proposition 1.1.3** (Inverse de composition). *Si  $f \in \mathbb{R}[[x]]$  (une seule variable), et si  $\text{val}(f) = 1$ , alors*

$$\exists! f^{[-1]}(x) \in \mathbb{R}[[x]], \quad f(f^{[-1]}(x)) = f^{[-1]}(f(x)) = x.$$

*Démonstration.* Si  $g(x) = \sum b_n x^n$ , écrire coefficient par coefficient l'égalité  $g(f(x)) = x$  donne l'existence et l'unicité des  $b_n$ . Puis le même raisonnement sur  $g$  donne  $h$  tel que  $h(g(x)) = x$ . On a alors, en substituant  $f$  à  $x$ ,  $h(x) = f(x)$ .  $\square$

Nous verrons plus loin un moyen de calculer explicitement  $f^{[-1]}(x)$ , avec le théorème de Lagrange.

### c. Dérivation, séries usuelles

On définit la dérivation (si une seule variable), la dérivation partielle. Les formules de Leibniz et de dérivation composée se vérifient facilement.

La seule série usuelle dont on aura besoin est  $\log(1+x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ .

### 1.1.2 Théorème de Lagrange

Le *théorème de Lagrange* est un outil puissant pour résoudre les équations fonctionnelles amenées par les dénombrements.

On va étudier ici le cas d'une seule variable. Toute la théorie est fondée sur les propriétés de l'opérateur  $[x^{-1}]$ , dit de résidu formel. On a d'abord le lemme (trivial) suivant :

**Lemme 1.1.1.** *Soient  $f, g \in \mathbb{R}((x))$ . On a :*

- $[x^{-1}]f'(x) = 0$
- $[x^{-1}]f'(x)g(x) = -[x^{-1}]f(x)g'(x)$

**Théorème 1.1.1** (résidu de composition). *Soient  $f, r \in \mathbb{R}((x))$ , avec  $\text{val}(r) = \alpha > 0$ . Alors :*

$$\alpha[x^{-1}]f(x) = [z^{-1}](f(r(z))r'(z))$$

(Cette égalité va permettre de procéder à des changements de variables dans les calculs des résidus)

*Démonstration.* Remarquons d'abord que pour tout  $f$ , comme  $\text{val}(r) > 0$ , la composition  $f(r(z))$  est admissible. Considérons le cas  $f(x) = x^n$  :

- Si  $n \neq -1$ , on a :  
 $[z^{-1}](r^n(z)r'(z)) = \frac{1}{n+1}[z^{-1}](r^{n+1}(z))' = 0$  par le lemme, et l'égalité est établie.

- Si  $n = -1$ , on a :

$r(z) = \beta z^\alpha h(z)$ , avec  $h(z) \in \mathbb{R}[[z]]_1$ ,  $\beta \neq 0$  et  $h(0) = 1$ .

$h^{-1}(z)$  et  $\log h(z)$  sont bien définies en tant que séries formelles, d'où :

$$\begin{aligned} [z^{-1}] \frac{r'(z)}{r(z)} &= [z^{-1}] \left( \alpha z^{-1} + \frac{h'(z)}{h(z)} \right) \\ &= \alpha + [z^{-1}](\log h(z))' \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

Finalement, si  $f \in \mathbb{R}((x))$  quelconque, on obtient par linéarité l'égalité recherchée.  $\square$

**Théorème 1.1.2** (Lagrange). *Soit  $\varphi(x) \in \mathbb{R}[[x]]_1$ . Alors il existe une unique série formelle  $w(t) \in \mathbb{R}[[t]]_0$ , telle que  $w(t) = t\varphi(w(t))$ . De plus, si  $f(x) \in \mathbb{R}((x))$ , alors :*

$$[t^n]f(w(t)) = \begin{cases} \frac{1}{n}[x^{n-1}](f'(x)\varphi^n(x)) & \text{si } n \neq 0 \text{ et } n \geq \text{val}(f) \\ f(0) + [x^{-1}] \left( f'(x) \log \frac{\varphi(x)}{\varphi(0)} \right) & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

*Démonstration.* Soit  $\psi(x) = \frac{x}{\varphi(x)}$ . Alors  $\text{val}(\psi) = 1$ .

On a l'équation  $\psi(w(t)) = t$ , et  $\psi \in \mathbb{R}[[x]]_1$ , donc par la proposition 1.1.2,  $\psi^{[-1]}(t)$  existe, et  $w = \psi^{[-1]}(t)$  est l'unique solution de l'équation  $w = t\varphi(w)$ .

Posons, pour  $n \geq 0$ ,  $u_n = [t^n]f(w(t)) = [t^{-1}](t^{-(n+1)}f(\psi^{[-1]}(t)))$   
En utilisant le changement de variable  $t = \psi(w)$ , on peut appliquer le théorème de résidu de composition (car  $\text{val}(\psi) = 1 > 0$ ). On obtient :  $u_n = [w^{-1}](\psi^{-(n+1)}(w)f(w)\psi'(w))$

$$\begin{aligned} \text{Donc, si } n \neq 0, \quad u_n &= -\frac{1}{n}[w^{-1}](f(w)(\psi^{-n}(w))') \\ &= \frac{1}{n}[w^{-1}](f'(w)\psi^{-n}(w)) \quad (\text{par le lemme}) \\ &= \frac{1}{n}[w^{-1}](f'(w)w^{-n}\varphi^n(w)) \\ &= \frac{1}{n}[w^{n-1}](f'(w)\varphi^n(w)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } u_0 &= [w^{-1}] \left( f(w) \frac{\psi'(w)}{\psi(w)} \right) \\ &= [w^{-1}] \left( f(w) \left( \frac{1}{w} - \frac{\varphi'(w)}{\varphi(w)} \right) \right) \\ &= [w^0]f(w) + [w^{-1}] \left( f'(w) \log \frac{\varphi(w)}{\varphi(0)} \right) \end{aligned}$$

par le lemme, et parce que  $\varphi(x) \in \mathbb{R}[[x]]_1$ .  $\square$

**Remarque 1.1.1.** *Pour information, signalons qu'il existe une démonstration entièrement probabiliste du théorème de Lagrange, voir [Pit].*

**Remarque 1.1.2.** *La formule de Lagrange permet d'obtenir, en prenant  $f(x) = x$ , l'égalité suivante :*

$$\psi^{[-1]}(t) = -[x^{-1}] \log \left( 1 - \frac{t}{\psi(x)} \right)$$

## 1.2 Triangulations

### 1.2.1 Cartes planaires

**Définition 1.2.1.** *Une carte planaire  $C$  est un plongement dans le plan d'un graphe fini connexe non vide (avec boucles et arêtes multiples autorisées). Plus précisément, les arêtes*

de  $C$  sont des chemins continus simples (i.e. injectifs) dans  $\mathbb{R}^2$ , les sommets les extrémités de ces chemins, et les arêtes doivent être disjointes (sauf aux extrémités); enfin,  $C$  est définie à homéomorphisme près.

**Définition 1.2.2.** Soit  $C$  une carte planeaire. On a le vocabulaire suivant :

- Faces de  $C$  : composantes connexes du plan privé de l'union des arêtes; il existe une unique face non bornée, appelée face extérieure (les autres sont dites intérieures);
- Degré d'un sommet : nombre d'arêtes adjacentes au sommet (les boucles comptent double);
- Degré d'une face : nombre d'arêtes formant la face;
- Isthme : arête dont la suppression rendrait le graphe non connexe. Un isthme est compté deux fois dans le degré des faces concernées;
- $C$  séparable :  $C$  peut s'écrire comme l'union de deux cartes ayant chacune au moins une arête, et dont l'intersection est réduite à un unique sommet (dit sommet séparant).

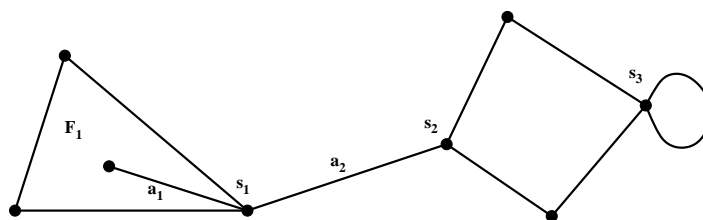


FIG. 1.2.1 – Exemple de carte planeaire (séparable).  $a_1, a_2$  isthmes;  $s_1, s_2, s_3$  sommets séparants; degré de la face  $F_1$  : 5; degré de la face extérieure : 10

**Proposition 1.2.1** (formules d'Euler). Soient  $S, A, F$ , les nombres de sommets, arêtes, faces, d'une carte planeaire. Alors :

- $S - A + F = 2$
- $\sum_{s \text{ sommet}} \text{deg}(s) = \sum_{f \text{ face}} \text{deg}(f) = 2A$

*Démonstration.* Elle se fait (premier point) par récurrence, sur le nombre d'arêtes par exemple. □

**Définition 1.2.3.** Une carte planeaire enracinée est une carte planeaire dont l'une des arêtes (appelée arête racine) de la face extérieure est orientée dans le sens direct. On appellera sommet racine l'origine de cette arête, et face racine la face incidente à cette arête (qui n'est pas la face extérieure).

## 1.2.2 Équations fonctionnelles pour les triangulations

**Définition 1.2.4.** On appellera ici triangulation une carte planeaire enracinée, non séparable, telle que chaque face intérieure soit de degré 3. On parlera de triangulation d'un  $k$ -gone si la face extérieure est de degré  $k$ , et de triangulation stricte s'il n'y a pas d'arêtes multiples. On notera  $\delta$  l'unique triangulation sans face intérieure. (voir figure 1.2.2)



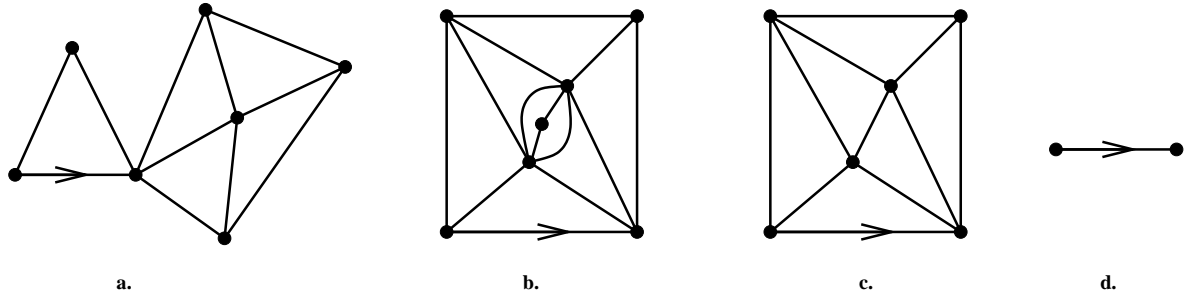


FIG. 1.2.2 – a n'est pas une triangulation ; b : triangulation non stricte ; c : triangulation stricte ; d :  $\delta$

Le but de cette partie est d'établir le théorème suivant (où on appelle sommets internes les sommets qui ne sont pas sur la face extérieure) :

**Théorème 1.2.1.** *Le nombre  $\phi_{n,m}$  de triangulations strictes d'un  $(m+2)$ -gone ayant  $n$  sommets internes est :*

$$\phi_{n,m} = \begin{cases} \frac{2(2m+1)!(2m+4n-1)!}{(m+1)!(m-1)!n!(2m+3n+1)!} & \text{si } m \geq 1, n \geq 1 \\ \frac{(2m)!}{m!(m+1)!} & \text{si } m \geq 0, n = 0. \end{cases}$$

Pour cela, on va d'abord considérer des triangulations quelconques, et changer de paramètres.

**Proposition 1.2.2.** *Soit  $t$  une triangulation quelconque. Alors :*

$$\begin{array}{c} t \text{ a } n \text{ sommets internes et } m+2 \text{ sommets externes} \\ \Updownarrow \\ t \text{ a } k=m+2 \text{ sommets externes et } l=m+2n \text{ faces intérieures} \end{array}$$

*Démonstration.* Il suffit d'utiliser les deux formules d'Euler (Proposition 1.2.1). □

**Définition 1.2.5.** *On note :*

- $\mathbf{T}$  l'ensemble des triangulations ;  $\mathbf{T}_{k,l}$  l'ensemble des triangulations d'un  $k$ -gone, ayant  $l$  faces intérieures ;  $a_{k,l} = \#\mathbf{T}_{k,l}$ .
- $\mathbf{S} \subset \mathbf{T}$  l'ensemble des triangulations dont la face extérieure est de degré 2 ;  $\mathbf{S}_n = \mathbf{T}_{2,n}$  ;  $s_n = \#\mathbf{S}_n = a_{2,n}$ .
- $\mathbf{B} \subset \mathbf{T}$  l'ensemble des triangulations strictes ;  $\mathbf{B}_{k,l}$  et  $b_{k,l}$  définis comme pour  $\mathbf{T}$ .

On veut déterminer les  $a_{k,l}$ . Pour cela, posons  $T(x,y) = \sum_{k,l \geq 0} a_{k,l} x^k y^l \in \mathbb{R}[[x,y]]$ . C'est la *fonction génératrice* de  $\mathbf{T}$ . On va établir une relation de récurrence entre les  $a_{k,l}$ , en

déduire une équation fonctionnelle en  $T(x, y)$ , puis la résoudre afin de trouver explicitement ses coefficients.

On posera de même  $S(y) = \sum s_n y^n$  et  $B(x, y) = \sum b_{k,l} x^k y^l$ , les fonctions génératrices de  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{B}$  respectivement.

**Remarque 1.2.1.** *On a déjà une information sur les  $a_{k,l}$  (et les  $b_{k,l}$ ). En effet, si  $t \in \mathbf{T}_{k,1}$ , par la proposition 1.2.2,  $(k-l)$  est nécessairement pair. Donc si  $k$  et  $l$  n'ont pas même parité,  $a_{k,l} = b_{k,l} = 0$ .*

Cherchons une relation entre les  $a_{k,l}$ . On a d'abord les conditions initiales :

- $a_{k,l} = 0$  si  $k = 0$  ou  $1$ ,
- $a_{2,0} = 1$  (c'est  $\delta$ ),
- $a_{k,0} = 0$  si  $k \geq 3$ .

Soit  $t \in \mathbf{T}_{k,1}$ , avec  $k \geq 2$  et  $l \geq 1$  (on a  $t \neq \delta$ ). Soit  $r$  l'arête racine de  $t$ ,  $r$  reliant les sommets  $s_1$  et  $s_2$ ; alors  $r$  est l'arête d'un triangle  $s_1 s_2 s_3$ . Retirons  $r$  de  $t$ . Deux cas disjoints se présentent (voir figure 1.2.3) :

**a.  $s_3$  est sur la face extérieure de  $t$**

Dans ce cas enlever  $r$  rend la carte séparable ( $s_3$  est un sommet séparant). Donc on peut construire à partir de  $t$  un couple  $(g(t), d(t))$  de triangulations, en enracinant  $g(t)$  sur  $(s_1, s_3)$  et  $d(t)$  sur  $(s_3, s_2)$ . Si  $g(t) \in \mathbf{T}_{k_1, l_1}$  et  $d(t) \in \mathbf{T}_{k_2, l_2}$ , on a :  $k_1 + k_2 = k + 1$  et  $l_1 + l_2 = l - 1$ .

**b.  $s_3$  n'est pas sur la face extérieure de  $t$**

En retirant  $r$  on a toujours une triangulation. On l'enracine sur  $(s_1, s_3)$  et on la note  $u(t)$ . Alors  $u(t) \in \mathbf{T}_{k+1, l-1}$ .

On vérifie facilement que (pour  $k \geq 2$  et  $l \geq 1$ ) cette construction :

$$\mathbf{T}_{k,1} \longrightarrow \mathbf{T}_{k+1, l-1} \bigsqcup \left( \bigsqcup_{\substack{k_1+k_2=k+1 \\ l_1+l_2=l-1}} \mathbf{T}_{k_1, l_1} \times \mathbf{T}_{k_2, l_2} \right)$$

est inversible. D'où l'équation :

$$a_{k,l} = a_{k+1, l-1} + \sum_{\substack{k_1+k_2=k+1 \\ l_1+l_2=l-1}} a_{k_1, l_1} a_{k_2, l_2}$$

En multipliant par  $x^k y^l$  et en tenant compte des conditions initiales, on obtient après calculs :

$$T(x, y) = x^2 + x^{-1} y T^2(x, y) + x^{-1} y (T(x, y) - x^2 S(y)) \quad (1.1)$$

Cherchons maintenant une relation entre les séries formelles  $T$  et  $B$ .

Si on a un élément de  $\mathbf{T}$ , pour obtenir un élément de  $\mathbf{B}$ , il suffit d'“aplatir” toutes les arêtes multiples. Plus exactement, dès que deux sommets sont reliés par deux arêtes, on enlève tous les sommets et arêtes qui sont entre les deux, et on “fusionne” ces deux arêtes (voir figure 1.2.4).

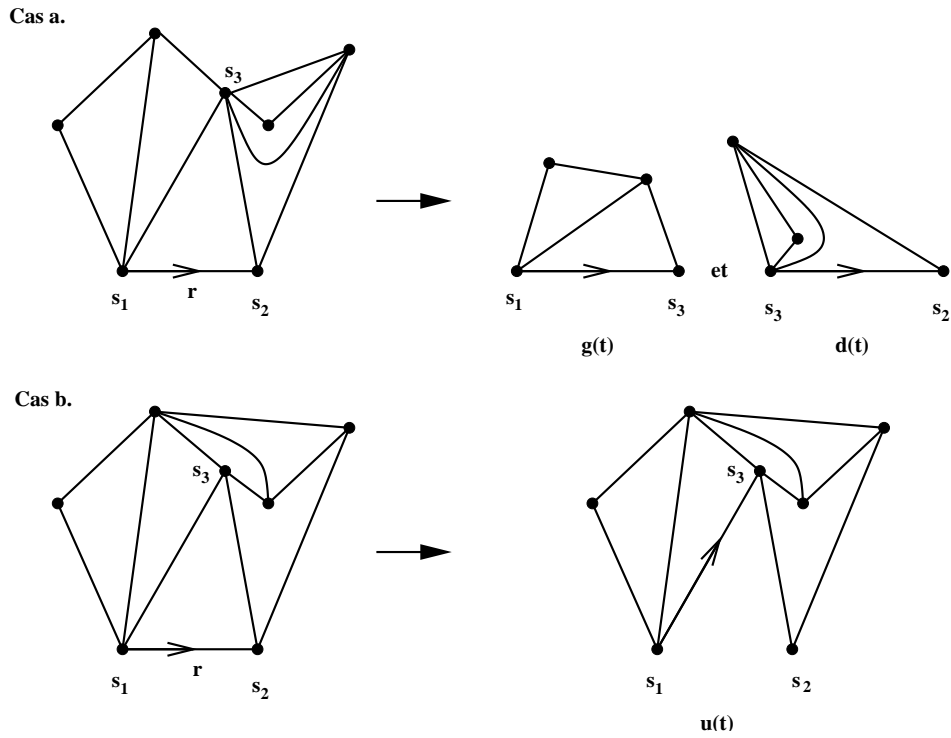


FIG. 1.2.3 – Les deux cas de décomposition d’une triangulation

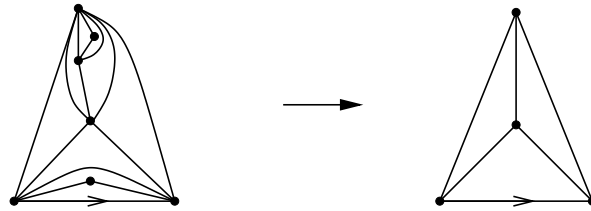


FIG. 1.2.4 – “Aplatissement” des arêtes multiples

Maintenant, essayons d’inverser cette construction. On veut construire un  $t \in \mathbf{T}_{u,v}$ . Choisissons  $q \leq v$ , et  $b \in \mathbf{B}_{u,q}$ . On va remplacer chaque arête de  $b$  par un élément quelconque de  $\mathbf{S}$ . Le nombre d’arêtes à remplacer est  $\frac{u+3q}{2}$ . Si la  $i$ -ème arête est remplacée par un élément de  $\mathbf{S}$  ayant  $k_i$  faces intérieures, on doit avoir :  $q + k_1 + \dots + k_{\frac{u+3q}{2}} = v$

On obtient donc la construction inversible :

$$\mathbf{T}_{u,v} \longrightarrow \bigcup_{\substack{0 \leq q \leq v \\ q + k_1 + \dots + k_{\frac{u+3q}{2}} = v}} \mathbf{B}_{u,q} \times \mathbf{S}_{k_1} \times \dots \times \mathbf{S}_{k_{\frac{u+3q}{2}}}$$

D'où la relation :

$$a_{u,v} = \sum_{\substack{0 \leq q \leq v \\ q+k_1+\dots+k_{\frac{u+3q}{2}}=v}} b_{u,q} s_{k_1} \dots s_{k_{\frac{u+3q}{2}}}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } T(x, y) &= \sum_{u,v \geq 0} \left( \sum_{\substack{0 \leq q \leq v \\ q+k_1+\dots+k_{\frac{u+3q}{2}}=v}} b_{u,q} s_{k_1} \dots s_{k_{\frac{u+3q}{2}}} \right) x^u y^v \\ &= \sum_{u,q \geq 0} b_{u,q} x^u \sum_{v \geq q} y^v \sum_{k_1+\dots+k_{\frac{u+3q}{2}}=v-q} s_{k_1} \dots s_{k_{\frac{u+3q}{2}}} \\ &= \sum_{u,q \geq 0} b_{u,q} x^u y^q S^{\frac{u+3q}{2}}(y) \end{aligned}$$

$$\text{et finalement : } T(x, y) = B(xS^{\frac{1}{2}}(y), yS^{\frac{3}{2}}(y)) \quad (1.2)$$

### 1.2.3 Résolution par la méthode quadratique et le théorème de Lagrange

On va maintenant isoler  $T$  et compléter le carré dans l'équation (1.1); on obtient :

$$(2yT + y - x)^2 = 4y^2x^2S + (y - x)^2 - 4yx^3 \quad (1.3)$$

C'est une équation de type classique, que l'on va résoudre avec la *méthode quadratique*.

Posons  $D(x, y) = 4y^2x^2S + (y - x)^2 - 4yx^3$ .

On introduit  $\alpha(y) \in \mathbb{R}[[y]]$ , vérifiant  $D(\alpha(y), y) = 0$ . [L'existence d'un tel  $\alpha$  peut se vérifier facilement, coefficient par coefficient, en utilisant l'égalité  $D(x, y) = (2yT + y - x)^2$ ]

Notons que la substitution de  $x$  par  $\alpha$  est admissible car  $D$  est bornée en  $x$ . Grâce au carré on a alors aussi :  $\frac{\partial D}{\partial x}(\alpha(y), y) = 0$ , ce qui donne le système d'équations suivant :

$$4\alpha^2y^2S + (y - \alpha)^2 - 4\alpha^3y = 0 \quad (1.4)$$

$$8\alpha y^2S + 2(\alpha - y) - 12\alpha^2y = 0 \quad (1.5)$$

En éliminant  $S$  on obtient après simplifications :

$$y = \alpha(1 - 2\alpha^2) \quad (1.6)$$

D'où, en remplaçant dans (1.2) :

$$S = \frac{1 - 3\alpha^2}{(1 - 2\alpha^2)^2} \quad (1.7)$$

Soit  $\varphi(t) = \frac{1}{1 - 2t^2}$ ;  $\varphi(t) \in \mathbb{R}[[t]]_1$ , donc d'après le théorème de Lagrange,  $\alpha$  est l'unique solution de l'équation  $\alpha = y\varphi(\alpha)$ , et  $\alpha \in \mathbb{R}[[y]]_0$ .

Soit  $f(t) = \frac{1 - 3t^2}{(1 - 2t^2)^2} \in \mathbb{R}[[t]]$ .

Comme  $\alpha \in \mathbb{R}[[y]]_0$ , la substitution de  $t$  par  $\alpha$  est admissible, et, vu (1.7), on a  $S(y) = f(\alpha(y))$ . Donc on va pouvoir calculer les coefficients de  $S(y)$  par le théorème de Lagrange, connaissant

l'équation  $\alpha = y\varphi(\alpha)$ .

On a déjà, par la remarque 1.2.1,  $[y^{2n+1}]S(y) = 0$ . Puis  $[y^0]S(y) = 1$ , et pour  $n > 0$  :

$$[y^{2n}]S(y) = \frac{1}{2n}[x^{2n+1}] \left( \left( \frac{1-3x^2}{(1-2x^2)^2} \right)' \left( \frac{1}{1-2x^2} \right)^{2n} \right)$$

Ceci se calcule en quelques lignes, et on obtient :

**Théorème 1.2.2.** *Le nombre de triangulations d'un 2-gone ayant  $2n$  faces intérieures ( $n \geq 0$ ) est :*

$$[y^{2n}]S(y) = \frac{(3n)!2^{n+1}}{n!(2n+2)!}$$

#### 1.2.4 Dénombrement des triangulations et triangulations strictes : calcul de $T$ et $B$

On commence par obtenir  $D(x, y)$  en fonction uniquement de  $\alpha$  et  $x$ , en remplaçant  $y$  et  $S$  à l'aide des équations (1.6) et (1.7). Après calculs :

$$D = (1-2\alpha^2)(x-\alpha)^2(1-2\alpha^2-4\alpha x)$$

D'où en reportant dans (1.3) :

$$\begin{aligned} T &= \frac{x-y}{2y} \pm \frac{1}{2y}(1-2\alpha^2)(x-\alpha) \left( 1 - \frac{4\alpha x}{1-2\alpha^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\alpha x}{1-2\alpha^2} + \frac{x-\alpha}{2\alpha} \left( 1 \pm \left( 1 - \frac{4\alpha x}{1-2\alpha^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \end{aligned}$$

Pour qu'il n'apparaisse pas de puissance négative de  $\alpha$ , et donc de  $y$  (ce qui est exclu par la définition de  $T$ ), il faut choisir le signe  $-$ . En développant :

$$T(x, y) = \frac{\alpha x}{1-2\alpha^2} + \frac{x-\alpha}{\alpha} \sum_{n \geq 0} \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} \left( \frac{\alpha x}{1-2\alpha^2} \right)^{n+1} \quad (1.8)$$

Donc pour  $k \geq 2$  :

$$[x^k]T(x, y) = \frac{(2k-4)!}{(k-2)!(k-1)!} \frac{\alpha^{k-2}}{(1-2\alpha^2)^{k-1}} - \frac{(2k-2)!}{(k-1)!k!} \frac{\alpha^k}{(1-2\alpha^2)^k}$$

Il reste à calculer les coefficients en  $y$  de cette expression. Comme  $\alpha = \frac{y}{1-2\alpha^2}$ , il vient :

$$[x^k]T(x, y) = \frac{(2k-4)!}{(k-2)!(k-1)!} \frac{y^{k-2}}{(1-2\alpha^2)^{2k-3}} - \frac{(2k-2)!}{(k-1)!k!} \frac{y^k}{(1-2\alpha^2)^{2k}}$$

D'après la remarque 1.2.1, on n'a besoin que des valeurs de  $[x^k y^{k+2j}]T(x, y)$ , où  $k \geq 2$  et  $j \geq -1$ . Or :

$$[x^k y^{k+2j}]T(x, y) = \frac{(2k-4)!}{(k-2)!(k-1)!} [y^{2j+2}](1-2\alpha^2)^{-(2k-3)} - \frac{(2k-2)!}{(k-1)!k!} [y^{2j}](1-2\alpha^2)^{-2k}$$

Grâce au théorème de Lagrange, comme  $\alpha = \frac{y}{1-2\alpha^2}$ , on sait que :

$$\begin{aligned} [y^{2r}](1-2\alpha^2)^{-s} &= \frac{1}{2^r} [t^{2r-1}] ((1-2t^2)^{-s})' (1-2t^2)^{-2r} \\ &= \frac{s(s+3r-1)!2^r}{r!(s+2r)!} \text{ après calculs.} \end{aligned}$$

D'où, en reportant, le résultat suivant :

**Théorème 1.2.3.** *Le nombre de triangulations d'un  $k$ -gone, ayant  $k+2j$  faces intérieures ( $k \geq 2$ ,  $j \geq -1$ ) est :*

$$[x^k y^{k+2j}]T(x, y) = \frac{2^{j+2}(2k+3j-1)!(2k-3)!}{(j+1)!(2k+2j)!((k-2)!)^2}$$

Pour le calcul de  $B$ , on va suivre la même trame, mais avec un changement de variable supplémentaire. En effet on a vu (équation 1.2) que  $T(x, y) = B(u, v)$ , avec  $u = xS^{\frac{1}{2}}(y)$ , et  $v = yS^{\frac{3}{2}}(y)$ . D'autre part,  $y = \alpha(1-2\alpha^2)$ . En remplaçant  $S(y)$  par son expression en  $\alpha$ , on a donc :

$$\alpha = vg(\alpha), \text{ avec } g(t) = \frac{(1-2t^2)^2}{(1-3t^2)^{\frac{3}{2}}} \in \mathbb{R}[[t]]_1.$$

Enfin,  $x = uS^{-\frac{1}{2}}(y) = uh(\alpha)$  avec  $h(t) = \frac{1-2t^2}{(1-3t^2)^{\frac{1}{2}}}$

L'équation 1.8 se transforme alors en :

$$\begin{aligned} B(u, v) &= \frac{\alpha h(\alpha)u}{1-2\alpha^2} + \sum_{n \geq 0} \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} \frac{\alpha^n}{(1-2\alpha^2)^{n+1}} h(\alpha)^{n+2} u^{n+2} \\ &\quad - \sum_{n \geq 0} \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} \frac{\alpha^{n+1}}{(1-2\alpha^2)^{n+1}} h(\alpha)^{n+1} u^{n+1} \end{aligned}$$

Ensuite on procède comme pour  $T$  :  $\alpha$  ne dépend pas de  $u$ , donc on calcule facilement le coefficient de  $u^k$  dans cette expression. C'est une série formelle en  $\alpha$ , donc en  $v$ . Puis pour simplifier on remplace  $\alpha$  par  $vg(\alpha)$ , ce qui donne (pour  $k \geq 2$ ) :

$$[u^k]B(u, v) = \frac{(2k-4)!}{(k-2)!(k-1)!} v^{k-2} \left( \frac{1-2\alpha^2}{1-3\alpha^2} \right)^{2k-3} - \frac{(2k-2)!}{(k-1)!k!} v^k \left( \frac{1-2\alpha^2}{1-3\alpha^2} \right)^{2k}, \text{ d'où :}$$

$$[u^k v^{k+2j}]B(u, v) = \frac{(2k-4)!}{(k-2)!(k-1)!} [v^{2j+2}] \left( \frac{1-2\alpha^2}{1-3\alpha^2} \right)^{2k-3} - \frac{(2k-2)!}{(k-1)!k!} [v^{2j}] \left( \frac{1-2\alpha^2}{1-3\alpha^2} \right)^{2k}$$

Les termes  $[v^{2r}] \left( \frac{1-2\alpha^2}{1-3\alpha^2} \right)^s$  sont donnés par la formule de Lagrange (vu que  $\alpha = vg(\alpha)$ ). Le

calcul est assez long et on trouve (pour  $r \geq 0$ ) :  $\frac{s(4r+s-1)!}{r!(3r+s)!}$ . D'où, en reportant, le résultat suivant :

**Théorème 1.2.4.** *Le nombre de triangulations strictes d'un  $k$ -gone, ayant  $k+2j$  faces intérieures est :*

$$[u^k v^{k+2j}]B(u, v) = \begin{cases} \frac{2(2k-3)!(2k+4j-1)!}{(k-1)!(k-3)!(j+1)!(2k+3j)!} & \text{si } k \geq 3, j \geq 0 \\ \frac{(2k-4)!}{(k-1)!(k-2)!} & \text{si } k \geq 2, j = -1 \end{cases}$$

Enfin, en modifiant les paramètres comme dans la proposition 1.2.2, on obtient la valeur de  $\phi_{n,m}$ , et le théorème 1.2.1 est démontré.  
(voir figure 1 en introduction pour un exemple)

N.B. : pour plus de détails, que ce soit sur les séries formelles ou les dénombrements de cartes planaires, voir [GoJa].

## Partie 2

# Triangulations aléatoires infinies uniformes

### 2.1 Définitions, notations et premières propriétés

**Définition 2.1.1.** *On considère maintenant qu'une triangulation  $T$  est la donnée d'une carte planaire enracinée et d'un ensemble de ses faces triangulaires. Les autres faces (qui ne sont pas forcément triangulaires) seront les faces extérieures de  $T$ . Par ailleurs, on regarde uniquement les triangulations strictes. On note  $S(T)$  le support de la triangulation  $T$ , c'est-à-dire l'union de son graphe et des faces de  $T$ . Si les faces de la carte planaire de  $T$  sont toutes triangulaires et qu'elles font toutes partie de  $S(T)$ , alors  $T$  est une triangulation de la sphère.*

On peut remarquer que cette définition d'une triangulation diffère de la précédente puisque toutes les faces du graphe n'appartiennent pas forcément à la triangulation.

On va aussi considérer des triangulations infinies (ayant un nombre infini de sommets). On exigera quand même qu'elles soient localement finies et que les points d'accumulation ne fassent pas partie de la triangulation.

**Définition 2.1.2.** *On note  $\mathcal{T}$  l'espace des triangulations (finies et infinies).*

**Définition 2.1.3.** *On définit par récurrence les sous-triangulations  $B_r$  d'une triangulation.  $B_0$  désigne le sommet racine.  $B_{r+1}$  est égal à l'union de  $B_r$  et des triangles (avec les sommets et arêtes de ceux-ci) ayant un sommet dans  $B_r$ .*

On voit facilement que les  $B_r$  peuvent être interprétées comme des boules de centre le sommet racine et de rayon  $r$ . Un exemple est donné par la figure 2.1.1.

**Définition 2.1.4.** *Pour tout entier  $N \geq 3$ , on note  $\tau_N$  la probabilité uniforme sur les triangulations de la sphère à  $N$  sommets.*

**Définition 2.1.5.** *On définit une distance sur l'ensemble des triangulations (finies et infinies) par  $d(T, T') = 1/k$ , où  $k$  est le rayon de la plus grande boule  $B_k$  sur laquelle  $T$  et  $T'$  soient égales.*

Muni de cette distance, l'espace des triangulations est donc un espace métrique. Cela nous permet de parler d'applications continues, ainsi que de munir l'ensemble des triangulations de la tribu borélienne  $\mathcal{B}(\mathcal{T})$ . On a donc un espace probabilisable  $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathcal{T}))$ .



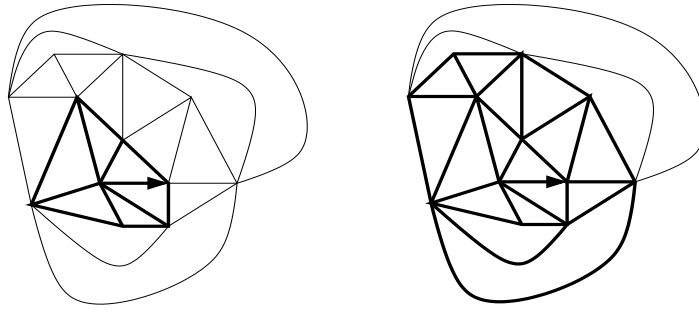


FIG. 2.1.1 – Les sous-graphes  $B_1$  et  $B_2$  d'une triangulation.

On remarque aussi au passage que les triangulations finies sont les points isolés de  $(\mathcal{T}, d)$  et que les triangulations infinies sont les points d'accumulation. Par ailleurs, on peut montrer qu'une suite de Cauchy pour  $d$  est convergente puisque, pour toute boule  $B_r$  aussi grande que l'on veut, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont égaux sur cette boule, et alors la limite de la suite correspond à  $B_r$  lorsque  $r$  tend vers l'infini. D'où  $(\mathcal{T}, d)$  est un espace métrique séparable et complet.

On termine cette section en démontrant deux lemmes d'invariance des triangulations finies. On y aura recours par la suite.

**Lemme 2.1.1.** *Soit  $T$  une triangulation choisie via  $\tau_N$  pour un certain  $N$  et conditionnellement à  $T$  soit  $R$  un triangle muni d'une arête racine choisi uniformément dans  $T$ . Alors  $T_R$  (la triangulation  $T$  dont on a remplacé le triangle racine par  $R$ ) est uniformément distribuée parmi les triangulations de taille  $N$ , et donc a même loi que  $T$ .*

*Démonstration.* On fait agir le groupe  $G$  des automorphismes de  $T$  (c'est-à-dire les automorphismes du graphe non enraciné de  $T$  qui préservent la position relative des triangles) sur l'ensemble des triangles racines probables pour  $R$ . Chaque orbite de cette action correspond à une triangulation différente. Et on remarque que le seul automorphisme qui préserve une racine est l'identité. Pour le voir, il suffit de raisonner de proche en proche : soit  $f$  un automorphisme de  $T$  et  $r = (a, b, c)$ , alors si  $f(a) = a$ ,  $f(b) = b$  et  $f(c) = c$ , on a  $f(d) = d$ , où  $d$  est le sommet opposé à  $c$  (i.e.  $d \neq c$  et  $(a, b, d)$  est un triangle de  $T$ ), et ainsi de suite pour tous les sommets de  $T$ . D'où, quel que soit  $r$ , si  $g_1$  et  $g_2$  sont des éléments de  $G$  tels que  $g_1(r) = g_2(r)$ , alors  $(g_1^{-1} \circ g_2)(r) = r$  et donc  $g_1^{-1} \circ g_2 = \text{id}$ , i.e.  $g_1 = g_2$ . Par conséquent, toutes les orbites ont même cardinal égal à  $\sharp G$ . D'où le résultat car  $\tau_N$  est uniforme.  $\square$

**Lemme 2.1.2.** *(Invariance par rapport à la marche aléatoire simple). Soit  $T$  une triangulation choisie via  $\tau_N$  pour un certain  $N$ . Soient  $X$  le sommet racine de  $T$ ,  $Y$  un sommet voisin de  $X$  choisi uniformément et  $(Y, Z, W)$  un triangle de  $T$  choisi uniformément parmi ceux contenant  $Y$ . Alors  $T_{(Y, Z, W)}$  (où l'ordre des lettres signifie que le sommet racine est  $Y$  et l'arête racine  $(Y, Z)$ ) a même loi que  $T$ .*

*Démonstration.* On cherche la probabilité  $P_{(y, z, w)}$  pour un  $(y, z, w)$  donné d'être la racine en procédant ainsi. Soient  $s$  un sommet de  $T$  et  $d_s$  son degré. Il existe  $2d_s$  triangles racines possibles dont le sommet racine est  $s$  ( $d_s$  choix de triangles et on multiplie par 2 pour le choix de l'arête). Or, par le lemme précédent, chaque triangle de  $T$  (considérée comme triangulation

non enracinée) a la même probabilité d'être la racine. D'où, la probabilité pour  $s$  d'être le sommet racine de  $T$  est un multiple de  $d_s$ . C'est donc la probabilité invariante pour la marche aléatoire simple sur le graphe de  $T$  (elle est invariante car  $\nu : s \rightarrow d_s$  est réversible et unique parce que le graphe est connexe et donc la chaîne de Markov associée irréductible). Notons-la  $\mu$ . On a  $\mu(s) = Cd_s$  pour une certaine constante  $C$ . Soient  $A_s$  l'événement "le sommet racine de départ est  $s$ " et  $Q(s, y)$  la probabilité de choisir  $y$  si la racine de départ est  $s$ . Ainsi la probabilité recherchée vérifie :

$$\begin{aligned} P_{(y,z,w)} &= \sum_{s \text{ adjacent à } y} P(A_s \cap \text{"on choisit } y\text{"}) \times \frac{1}{2d_y} \\ &= \sum_{s \text{ adjacent à } y} \mu(s)Q(s, y) \times \frac{1}{2d_y}, \end{aligned}$$

où l'on divise par  $d_y$  pour le choix de  $z$  et par 2 pour le choix de  $w$ . Comme  $\mu$  est invariante, on obtient

$$\begin{aligned} P_{(y,z,w)} &= \mu(y)/(2d_y) \\ &= C/2, \end{aligned}$$

qui ne dépend pas de  $(y, z, w)$ . Par conséquent, choisir comme ici la racine  $(Y, Z, W)$  revient au même que de la tirer au hasard parmi les racines possibles. D'où le résultat par le lemme précédent.  $\square$

## 2.2 Construction d'une probabilité sur les triangulations infinies

### 2.2.1 Objectifs

On dispose de probabilités uniformes sur les triangulations à  $N$  sommets :  $(\tau_N)_{N \geq 3}$ . On veut montrer que  $\tau_N$  converge étroitement vers une probabilité  $\tau$  sur les triangulations infinies. Pour ce faire, on procède en deux étapes :

1. On prouve que la suite  $(\tau_N)_{N \geq 3}$  est tendue, ce qui équivaut à dire que  $\{\tau_N, N \geq 3\}$  est d'adhérence compacte (pour la topologie de la convergence étroite). Ainsi  $(\tau_N)_{N \geq 3}$  admet des valeurs d'adhérence et celles-ci sont des probabilités car la convergence est étroite.
2. On montre que les valeurs d'adhérence sont toutes les mêmes. Comme  $\{\tau_N, N \geq 3\}$  est relativement compact, on en déduit que  $(\tau_N)_{N \geq 3}$  converge bien vers une unique limite  $\tau$ .

Une fois construite cette probabilité sur les triangulations infinies, on pourra considérer une triangulation prise au hasard au sens de cette probabilité. Un tel échantillon est appelé UIPT (Uniform Infinite Planar Triangulation). On verra ensuite une propriété de cette UIPT (le fait de n'avoir qu'un bout) qui permettra de dire que  $\tau$  est en fait une probabilité sur les triangulations du plan. Pour finir, on regardera le comportement de composantes séparées de l'UIPT.

## 2.2.2 Tension

Rappelons le résultat du théorème 1.2.1 concernant le nombre de triangulations du  $(m+2)$ -gone à  $n$  sommets internes. On a

$$\phi_{n,m} = \frac{2(2m+1)!(4n+2m-1)!}{(m-1)!(m+1)!n!(3n+2m+1)!}.$$

D'où, quand  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\phi_{n,m} \sim C_m \alpha^n n^{-5/2},$$

avec

$$\alpha = 256/27 \quad \text{et} \quad C_m = \frac{2(2m+1)!}{6\sqrt{6\pi}(m-1)!(m+1)!} (16/9)^m \sim C(64/9)^m m^{1/2}.$$

On définit la taille d'une triangulation du  $k$ -gone comme étant égale au nombre de sommets internes, et lorsque  $k = 3$  tous les sommets sont considérés comme internes.

**Lemme 2.2.1.** *Soit  $d_0$  le degré du sommet racine. Alors pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $c(\varepsilon)$  tel que, pour tous  $N$  et  $k$ ,*

$$\tau_N(d_0 = k) < c(\varepsilon) \left( \frac{3}{4} + \varepsilon \right)^k.$$

*Démonstration.* On construit une bijection entre les triangulations (de la sphère) de taille  $N$  ayant une racine de degré  $k$  et celles du  $k$ -gone de taille  $N - k - 1$ . Cette bijection consiste à effacer la sous-triangulation  $B_1$  (sauf les arêtes se trouvant sur la face externe de  $B_1$ ) et à placer la racine de la triangulation ainsi obtenue au bout de l'arête racine de la triangulation de départ (cf figure 2.2.1). Comme  $\tau_N$  est une probabilité uniforme, on obtient en divisant le nombre de cas favorables par le nombre de cas possibles

$$\begin{aligned} \tau_N(d_0 = k) &= \frac{\phi_{N-1-k,k-2}}{\phi_{N-3,1}} \\ &= \frac{(2k-3)!}{(k-3)!(k-1)!} \frac{(4N-2k-9)!(3N-6)!(N-3)!}{3(4N-11)!(3N-k-6)!(N-k-1)!}, \end{aligned}$$

pour tous  $N > k$ .

Soit maintenant  $\varepsilon > 0$ . On déduit du calcul précédent

$$\begin{aligned} \frac{\tau_N(d_0 = k+1)}{\tau_N(d_0 = k)} &= \frac{(2k-1)(2k-2)(3N-k-6)(N-k-1)}{k(k-2)(4N-2k-9)(4N-2k-10)} \\ &< \frac{3}{4} + \varepsilon \end{aligned}$$

pour tous  $N > k \geq k_\varepsilon$ , avec  $k_\varepsilon$  assez grand. Par ailleurs,  $\tau_N(d_0 = k)$  est toujours strictement inférieur à 1, et est nul si  $N < k$ . Pour obtenir la majoration pour  $k \geq k_\varepsilon$ , on remarque que

$$\begin{aligned} \tau_N(d_0 = k) &< \tau_N(d_0 = k_\varepsilon) \left( \frac{3}{4} + \varepsilon \right)^{k-k_\varepsilon} \\ &< \left( \frac{3}{4} + \varepsilon \right)^{k-k_\varepsilon}, \end{aligned}$$

et il suffit alors de prendre  $c(\varepsilon) = (3/4 + \varepsilon)^{-k_\varepsilon}$ . Pour  $k < k_\varepsilon$ , comme le nombre de valeurs prises par  $k$  est fini, il suffit de choisir  $c(\varepsilon)$  assez grand, par exemple  $c(\varepsilon) = (3/4 + \varepsilon)^{-k_\varepsilon}$  si  $\varepsilon < 1/4$  et  $c(\varepsilon) = 1$  sinon.  $\square$

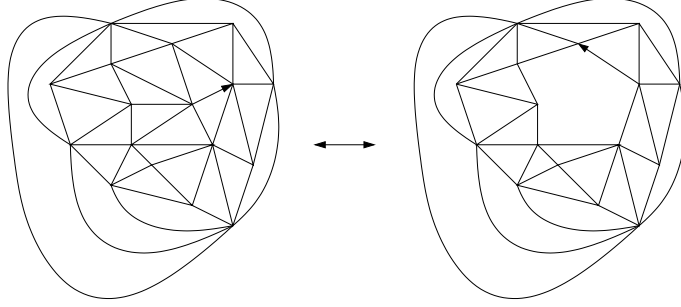


FIG. 2.2.1 – Bijection entre les triangulations de la sphère avec racine de degré  $k$  et les triangulations du  $k$ -gone (ici  $k = 6$ ).

**Proposition 2.2.1.** *Pour tout entier  $r$ , les variables aléatoires  $M_r = \max_{v \in B_r} (d_v)$  (où  $d_v$  est le degré du sommet  $v$ ) sur les espaces  $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathcal{T}), \tau_N)$  sont tendues par rapport à  $N$ , c'est-à-dire*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tau_N(M_r > t) = 0, \text{ uniformément en } N.$$

*Démonstration.* On raisonne par récurrence sur  $r$ .

$M_0 = d_0$ . D'où, par le lemme précédent avec  $\varepsilon = 1/8$ , il existe  $C$  tel que

$$\begin{aligned} \sup_N \tau_N(d_0 > t) &< C \left(\frac{7}{8}\right)^t \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{7}{8}\right)^i \\ &= 8C \left(\frac{7}{8}\right)^t \\ &\longrightarrow 0, \text{ quand } t \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que  $M_r$  soit tendue par rapport à  $N$ . Soit  $\mathbb{P}$  la probabilité sur les triangulations de taille  $N$  munies d'un trajet aléatoire partant de la racine (la triangulation étant un échantillon de  $\tau_N$  et le trajet étant obtenu par une marche aléatoire simple sur le graphe de la triangulation). On note  $(X_n)_{n \geq 0}$  la suite des sommets parcourus par le trajet aléatoire. Soit  $M' > M > 0$ . On se place sur l'ensemble  $\{M_r \leq M < M' < M_{r+1}\}$ . Alors on sait que les sommets appartenant à  $B_r$  sont tous de degré au plus  $M$ . D'où, la marche étant simple, la probabilité de passer d'un sommet de  $B_r$  à un sommet adjacent est supérieure ou égale à  $1/M$ . Par ailleurs, on sait qu'il y a au moins un sommet de  $B_{r+1} \setminus B_r$  qui a un degré strictement supérieur à  $M'$ . Par conséquent, la probabilité pour le sommet  $X_{r+1}$  d'être de degré au moins  $M' + 1$  vérifie

$$\mathbb{P}(d_{X_{r+1}} > M' \mid M_r \leq M < M' < M_{r+1}) \geq M^{-(r+1)},$$

et donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(d_{X_{r+1}} > M') &\geq \mathbb{P}(d_{X_{r+1}} > M', M_r \leq M < M' < M_{r+1}) \\ &\geq \mathbb{P}(M_r \leq M < M' < M_{r+1}) M^{-(r+1)}. \end{aligned}$$

Par le lemme 2.1.2,  $\mathbb{P}(d_{X_{r+1}} > M') = \tau_N(d_0 > M')$  et  $\mathbb{P}(M_r \leq M < M' < M_{r+1})$  ne dépend pas du trajet aléatoire. Ainsi, on a

$$M^{r+1} \tau_N(d_0 > M') \geq \tau_N(M_{r+1} > M') - \tau_N(M_r > M).$$

Par hypothèse de récurrence, quel que soit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $M$  tel que  $\tau_N(M_r > M) < \varepsilon/2$  pour tout  $N$ . Une fois ce  $M$  fixé, on peut ensuite trouver un  $M'$  tel que  $\tau_N(d_0 > M') < M^{-(r+1)}\varepsilon/2$  pour tout  $N$ . Il en résulte que  $\tau_N(M_{r+1} > M') < \varepsilon$  pour tout  $N$ .  $\square$

**Corollaire 2.2.1.** *Pour tout entier  $r$ , les variables aléatoires  $|B_r|$  (nombre de sommets de  $B_r$ ) sur  $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathcal{T}), \tau_N)$  sont tendues par rapport à  $N$ .*

*Démonstration.* Par définition de  $M_r$ , les sommets de  $B_r$  sont tous de degré inférieur ou égal à  $M_r$ . D'où la majoration :  $|B_r| < (1 + M_r)^r$ . Comme  $M_r$  est tendue, on obtient bien le résultat.  $\square$

Ce corollaire va nous permettre de montrer la tension de  $(\tau_N)_{N \geq 3}$ . On va aussi se servir du lemme suivant.

**Lemme 2.2.2.** *Soit un ensemble  $K \subseteq \mathcal{T}$ . Si pour tout  $r \geq 1$ , l'ensemble  $\{B_r(T), T \in K\}$  est fini, alors  $K$  est relativement compact dans  $(\mathcal{T}, d)$ .*

*Démonstration.* Supposons que pour tout  $r \geq 1$ , l'ensemble  $\{B_r(T), T \in K\}$  est fini. Soit  $(U_n)_{n \geq 0}$  une suite d'éléments de  $K$ . Comme il n'existe qu'un nombre fini de  $B_1(U_n)$  distincts lorsque  $n$  décrit  $\mathbb{N}$ , il existe une triangulation  $T_1$  telle qu'une infinité d'éléments de  $(U_n)_{n \geq 0}$  vérifient  $B_1(U_n) = T_1$ . Soit  $\psi_1$  l'extraction correspondante à ces éléments. On fait alors le même raisonnement avec la sous-suite  $(U_{\psi_1(n)})_{n \geq 0}$  et  $B_2$ . Ainsi de suite, on construit des extractions successives  $(\psi_n)_{n \geq 1}$  et une sous-suite  $V_n = U_{\psi_n(0)}$  telles que, pour tout  $N \geq 1$ ,  $B_N(V_p) = B_N(V_q)$  pour tous  $p$  et  $q$  supérieurs à  $N$ . Par conséquent, la suite  $(V_n)_{n \geq 1}$  est de Cauchy, donc elle converge car  $(\mathcal{T}, d)$  est complet. D'où  $K$  est relativement compact.  $\square$

**Proposition 2.2.2.** *La suite  $(\tau_N)_{N \geq 3}$  est tendue, i.e. quel que soit  $\varepsilon > 0$ , il existe un compact  $K \subseteq \mathcal{T}$  tel que, pour tout  $N \geq 3$ ,  $\tau_N(K) > 1 - \varepsilon$ .*

*Démonstration.* Comme les variables aléatoires  $|B_r|$  sont tendues, pour tous  $r \geq 1$  et  $\varepsilon > 0$ , il existe  $C_{\varepsilon, r} > 0$  tel que, pour tout  $N \geq 3$ ,

$$\tau_N(|B_r| > C_{\varepsilon, r}) < \frac{\varepsilon}{2^r}.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \tau_N(\cup_{r \geq 1} \{|B_r| > C_{\varepsilon, r}\}) &\leq \sum_{r \geq 1} \tau_N(|B_r| > C_{\varepsilon, r}) \\ &< \sum_{r \geq 1} \frac{\varepsilon}{2^r} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

En passant au complémentaire, on trouve

$$\tau_N(\cap_{r \geq 1} \{|B_r| \leq C_{\varepsilon, r}\}) > 1 - \varepsilon.$$

Or, par le lemme précédent, l'adhérence  $A$  de  $\cap_{r \geq 1} \{|B_r| \leq C_{\varepsilon, r}\}$  est compacte. D'où  $\tau_N(A) > 1 - \varepsilon$ , ce qui nous donne le résultat.  $\square$

### 2.2.3 Rigidité

Dans ce qui suit, nous allons considérer des triangulations ayant éventuellement plusieurs faces externes. Et nous allons aussi nous intéresser à l'événement " $A \subset T$ " pour une certaine triangulation  $A$  donnée. Pour que la probabilité de cet événement soit plus simple à évaluer, on aura besoin d'une condition sur  $A$ , qui est décrite dans la définition suivante.

**Définition 2.2.1.** *Une triangulation  $A$  est dite rigide s'il n'existe pas de triangulation contenant deux copies distinctes de  $A$  avec le même triangle racine. Un exemple de triangulation rigide est la triangulation  $B_r$  pour toute triangulation de la sphère et tout entier  $r \geq 1$  (on peut le voir en disant que le graphe dual du graphe de  $B_r$  est connexe, ce qui "impose la manière de construire"  $B_r$  en partant de la racine). Un contre-exemple est donné par la figure 2.2.2.*

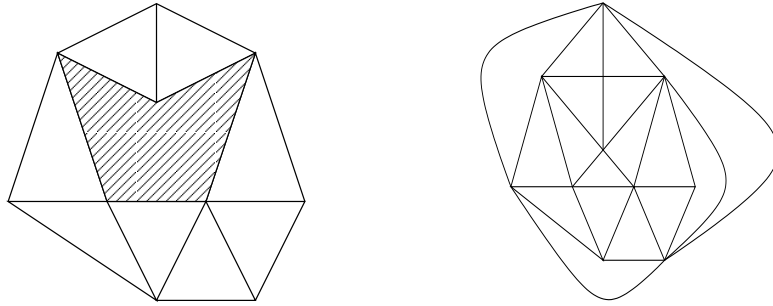


FIG. 2.2.2 – La triangulation de gauche n'est pas rigide car elle correspond à deux sous-triangulations de celle de droite distinctes.

D'après cette définition, si l'on remplit les faces externes d'une triangulation rigide  $A$  de manière à obtenir une triangulation de la sphère, alors deux façons distinctes de le faire correspondent à deux triangulations de la sphère différentes.

Afin d'alléger les notations de la prochaine proposition, on pose pour tout  $m \geq 1$

$$Z_m = \sum_{n \geq 0} \phi_{n,m} \alpha^{-n}.$$

Par ailleurs, on suppose admis qu'un échantillon de la limite  $\tau$  d'une sous-suite convergente de  $(\tau_N)_{N \geq 3}$  ne peut p.s. pas être découpé par une suite d'arête formant un polygone en deux graphes infinis. Ceci sera démontré dans la section suivante.

**Proposition 2.2.3.** *Soit  $A$  une triangulation rigide à  $n$  sommets, avec  $k$  faces externes et dont les seules arêtes entre des sommets se trouvant sur une face externe sont les arêtes formant cette face. On suppose que la  $i$ -ème face externe de  $A$  compte  $m_i + 2$  sommets, pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Alors toute limite  $\tau$  d'une sous-suite de  $(\tau_N)_{N \geq 3}$  vérifie*

$$\tau(A \subset T) = \frac{\alpha^{3-n}}{C_1} \left( \prod_{i=1}^k Z_{m_i} \right) \sum_{i=1}^k \frac{C_{m_i}}{Z_{m_i}},$$

où les constantes  $(C_m)_{m \geq 1}$  sont définies dans la section 2.2.2.

De plus, pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ , la probabilité pour la  $i$ -ème face externe de  $A$  de correspondre

à la sous-partie infinie de  $T$  vaut

$$\frac{\alpha^{3-n}}{C_1} C_{m_i} \prod_{j \neq i} Z_{m_j}.$$

*Démonstration.* Soit  $\tau$  la limite d'une sous-suite de  $(\tau_N)_{N \geq 3}$ . On note  $Q = Q(A, n_2, \dots, n_k)$  l'événement " $A \subset T$  (où  $A$  et  $T$  partagent la même racine) et la  $i$ -ème face externe de  $A$  contient dans sa partie interne  $n_i$  sommets de  $T$ ". Pour tout  $N$ , on note  $n_1 = N - n - \sum_{i=2}^k n_i$  le nombre de sommets internes de la première face externe de  $A$ , et on suppose que  $n_2, \dots, n_k$  sont finis. On cherche alors le nombre de triangulations  $T$  différentes satisfaisant les conditions précédentes. Comme  $A$  est rigide, cette valeur correspond au nombre de façons de "remplir" les faces externes de  $A$  pour obtenir une triangulation de taille  $N$ . On en déduit

$$\tau_N(Q) = \frac{\prod_{i=1}^k \phi_{n_i, m_i}}{\phi_{N-3, 1}}$$

et  $\tau_N(A \subset T)$  est donc égal à la somme de ces probabilités sur toutes les valeurs possibles des  $n_i$ . On fait maintenant tendre  $N$  vers l'infini :

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \tau_N(Q) &= \left( \prod_{i=2}^k \phi_{n_i, m_i} \right) \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\phi_{n_1, m_1}}{\phi_{N-3, 1}} \\ &= \left( \prod_{i=2}^k \phi_{n_i, m_i} \right) \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{C_{m_1} n_1^{-5/2} \alpha^{n_1}}{C_1 (N-3)^{-5/2} \alpha^{N-3}} \\ &= \left( \prod_{i=2}^k \phi_{n_i, m_i} \right) \frac{C_{m_1} \alpha^{-n - \sum_{i=2}^k n_i}}{C_1 \alpha^{-3}}. \end{aligned}$$

Or l'indicatrice de  $Q$  est bornée et continue. En effet, si une suite  $T_n$  de triangulations finies tend vers une triangulation infinie  $T$ , alors pour  $N$  assez grand, les  $(T_n)_{n \geq N}$  et  $T$  ne sont différentes qu'à l'intérieur de la première face externe de  $A$  (qui contient la partie infinie de  $T$ ); et comme  $Q$  ne fait pas intervenir la première face de  $A$ , l'indicatrice de  $Q$  reste constante à partir du rang  $N$ . Ainsi, comme la convergence de la sous-suite de  $\tau_N$  est étroite, on a

$$\tau(Q) = \frac{\alpha^{3-n}}{C_1} C_{m_1} \left( \prod_{i=2}^k \phi_{n_i, m_i} \alpha^{-n_i} \right).$$

Remarquons que si l'on échange le rôle de la première face externe avec une autre, on obtient le même genre d'égalité.

On note maintenant, pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $R_i = R_i(A)$  l'événement "la  $i$ -ème face externe contient la composante infinie". Ces événements vérifient tous une égalité semblable à celle concernant  $R_1$  :

$$R_1 = \bigcup_{n_2 < \infty, \dots, n_k < \infty} Q(A, n_2, \dots, n_k).$$

Cette union étant disjointe, on en déduit

$$\tau(R_1) = \frac{\alpha^{3-n}}{C_1} C_{m_1} \prod_{i=2}^k Z_{m_i}.$$

Et on a bien sûr une égalité similaire pour tous les  $R_i$ . De plus, pour tout  $i \neq j$ ,  $\tau(R_i \cap R_j) = 0$ , et  $\tau(\{A \subset T\} \setminus \cup_{i=1}^k R_i) = 0$ , puisque  $\tau$ -p.s. seule une face externe de  $A$  contient une composante infinie. D'où

$$\begin{aligned} \tau(A \subset T) &= \sum_{i=1}^k \tau(R_i) \\ &= \frac{\alpha^{3-n}}{C_1} \left( \prod_{i=1}^k Z_{m_i} \right) \sum_{i=1}^k \frac{C_{m_i}}{Z_{m_i}}. \end{aligned}$$

□

Avant de passer au résultat principal de cette partie, on énonce un lemme dont on aura besoin, et qui est en quelque sorte la réciproque du lemme 2.2.2.

**Lemme 2.2.3.** *Si un ensemble  $K \subseteq \mathcal{T}$  est un compact de  $(\mathcal{T}, d)$ , alors pour tout  $r \geq 1$ , l'ensemble  $\{B_r(T), T \in K\}$  est fini.*

*Démonstration.* On fait un raisonnement par l'absurde. Soit  $K \subseteq \mathcal{T}$  quelconque. Supposons qu'il existe un  $r \geq 1$  tel que l'ensemble  $\{B_r(T), T \in K\}$  soit infini. Alors il existe une suite  $(U_n)_{n \geq 0}$  d'éléments de  $K$  tels que, pour tous  $n \neq m$ ,  $B_r(U_n) \neq B_r(U_m)$ . Il en résulte que la suite  $(U_n)_{n \geq 0}$  n'admet pas de sous-suite convergente, et donc que  $K$  n'est pas compact. □

**Théorème 2.2.1.** *La suite  $(\tau_N)_{N \geq 3}$  converge étroitement vers une probabilité  $\tau$  portée par les triangulations infinies.*

*Démonstration.* Dans la section précédente, on a montré que la famille  $(\tau_N)_{N \geq 3}$  était tendue. D'où, il existe une probabilité  $\tau$  sur les triangulations infinies qui est une valeur d'adhérence de  $(\tau_N)_{N \geq 3}$ . Pour montrer que cette limite  $\tau$  ne dépend pas de la sous-suite de  $(\tau_N)_{N \geq 3}$  choisie, on commence par montrer qu'elle vérifie

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tau_N(B_r = M) = \tau(B_r = M),$$

pour tout choix de  $M \in \mathcal{T}$  et  $r \geq 1$ . Or, comme on l'a cité en exemple, la boule  $B_r(T)$  est une triangulation rigide quelle que soit  $T \in \mathcal{T}$ . De plus, elle satisfait bien la condition supplémentaire exigée par la proposition 2.2.3. Comme l'événement " $B_r(T) = M$ " est égal à l'événement " $M \subset T$  avec  $M$  et  $T$  partageant la même racine", cette même proposition nous permet de dire que la limite quand  $N$  tend vers l'infini de  $\tau_N(B_r = M)$  ne dépend pas de la sous-suite. Elle est donc bien toujours égale à  $\tau(B_r = M)$  car  $\tau$  est valeur d'adhérence de  $(\tau_N)_{N \geq 3}$  pour la convergence étroite.

Pour conclure, il suffit de montrer que la classe de fonction  $\mathcal{F}$  contenant les  $f_{M,r}(T) = \mathbb{1}_{B_r(T)=M}$  est dense dans l'ensemble des fonctions continues à support compact. On remarque tout d'abord que les fonctions de  $\mathcal{F}$  séparent les points. En effet, si  $T$  et  $T'$  sont deux triangulations différentes, alors il existe un  $r$  assez grand tel que, en prenant  $M = B_r(T)$  ou  $B_r(T')$ ,  $f_{M,r}(T) = 1$  et  $f_{M,r}(T') = 0$  ou le contraire. Soient maintenant  $K$  un compact de  $(\mathcal{T}, d)$  et  $\mathcal{F}_K$  la sous-famille de  $\mathcal{F}$  constituée des fonctions  $f_{M,r}$ , où  $M$  décrit l'ensemble des  $B_r(T)$  pour  $T \in K$ . L'ensemble  $\mathcal{E}_K$  des combinaisons linéaires d'éléments de  $\mathcal{F}_K$  est une sous-algèbre des fonctions continues sur  $K$ . En effet, on a bien la stabilité pour le produit car si on suppose



$B_r(T) = M$  et  $B_{r'}(T) = M'$ , alors le produit des indicatrices  $\mathbb{I}_{B_r(T)=M}\mathbb{I}_{B_{r'}(T)=M'}$  est égal soit à 0 car les conditions se contredisent, soit à l'une des deux car l'une des conditions implique l'autre. De plus,  $\mathcal{E}_K$  contient les fonctions constantes car il contient la fonction identiquement égale à 1. On peut voir cela en disant que la fonction 1 s'obtient comme limite de combinaisons linéaires de  $f_{M,r}$  car, comme  $K$  est compact, l'ensemble  $\{B_r(T), T \in K\}$  est fini pour tout  $r \geq 1$ . On peut donc appliquer le théorème de Stone-Weierstrass pour affirmer que  $\mathcal{F}_K$  est dense dans l'ensemble des fonctions continues de  $K$  et donc a fortiori dans l'ensemble des fonctions continues à support dans  $K$ . Ceci étant valable pour tout compact  $K$ , on a bien le résultat souhaité.  $\square$

## 2.3 Propriétés de l'UIPT

### 2.3.1 Unicité du bout

On commence par démontrer deux lemmes qui seront utiles par la suite.

**Lemme 2.3.1.** *Si on note*

$$S(k, N, a) = \sum_{\substack{n_1 + \dots + n_k = N \\ n_1, n_2 > a}} \left( \prod_{i=1}^k n_i \right)^{-5/2},$$

alors, pour tout  $k$ , il existe  $c = c(k)$  tel qu'on ait pour tout  $N$

$$S(k, N, a) \leq cN^{-5/2}a^{-3/2}.$$

*Démonstration.* On a

$$S(k, N, a) \leq k! \sum_{\substack{n_1 \geq \dots \geq n_k \\ n_1 + \dots + n_k = N \\ n_1, n_2 > a}} \left( \prod_{i=1}^k n_i \right)^{-5/2}.$$

En effet, chaque terme de la nouvelle somme correspond à au plus  $k!$  termes de la somme de départ, et on ordonne les  $n_i$  dans ce sens car les deux plus grands  $n_i$  sont supérieurs à  $a$  si et seulement si deux des  $n_i$  sont supérieurs à  $a$ . Maintenant, comme chaque choix de  $n_2, \dots, n_k$  détermine complètement  $n_1$  et qu'on a toujours  $n_1 \geq N/k$ , on obtient, en faisant ensuite la somme sur plus de termes,

$$\begin{aligned} S(k, N, a) &\leq k!(N/k)^{-5/2} \sum_{\substack{n_2 \geq \dots \geq n_k \\ n_2 > a}} \left( \prod_{i \neq 1} n_i \right)^{-5/2} \\ &\leq k!(N/k)^{-5/2} \left( \sum_{n_2 \geq a} n_2^{-5/2} \right) \prod_{i > 2} \left( \sum_{n_i} n_i^{-5/2} \right) \\ &\leq cN^{-5/2}a^{-3/2}. \end{aligned}$$

$\square$

Avant d'énoncer le second lemme, on rappelle que pour les triangulations du  $k$ -gone, la racine doit se trouver sur la frontière, c'est-à-dire que le sommet frontière (resp. l'arête frontière) doit être un sommet (resp. une arête) du  $k$ -gone.

**Lemme 2.3.2.** *Etant donnés  $k$  polygones disjoints (avec des nombres d'arêtes fixés égaux à  $m = (m_i + 2)_{i \in \{1 \dots k\}}$ ) et  $T$  une triangulation de ces polygones, on note  $n_i$  le nombre de sommets intérieurs du  $i^{\text{ème}}$  polygone. Alors on a, pour tous entiers  $a$  et  $N$ ,*

$$Q(N, a, k, m) := \#\{T : \sum n_i = N \text{ et } \exists i \neq j, n_i > a, n_j > a\} < C\alpha^N N^{-5/2} a^{-3/2},$$

où  $C$  ne dépend que de  $k$  et  $m$ .

*Démonstration.* Il suffit de traiter le cas où  $n_1$  et  $n_2$  sont plus grands que  $a$ . En effet, la majoration que l'on cherche sera alors la même à  $\mathbf{C}_k^2$  près (nombre de couples  $i \neq j$  possibles), qui dépend seulement de  $k$ . En vertu du rappel que l'on vient de faire, il existe un  $\beta_m$  tel que  $\phi_{n,m} \leq \beta_m (n+1)^{-5/2} \alpha^n$  (on rajoute 1 pour que le terme de droite soit encore défini lorsque  $n = 0$ ). On obtient ainsi les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} Q(N, a, k, m) &= \sum_{\substack{n_1 + \dots + n_k = N \\ n_1, n_2 > a}} \prod_{i=1}^k \phi_{n_i, m_i} \\ &\leq \sum_{\substack{n_1 + \dots + n_k = N \\ n_1, n_2 > a}} \prod_{i=1}^k \beta_{m_i} (n_i + 1)^{-5/2} \alpha^{n_i} \\ &= \alpha^N \prod_{j=1}^k \beta_{m_j} \sum_{\substack{n_1 + \dots + n_k = N \\ n_1, n_2 > a}} \prod_{i=1}^k (n_i + 1)^{-5/2} \\ &\leq c_1 \alpha^N \sum_{\substack{n_1 + \dots + n_k = N+k \\ n_1, n_2 > a}} \prod_{i=1}^k n_i^{-5/2} \\ &\leq c_2 \alpha^N N^{-5/2} a^{-3/2}, \quad \text{par le lemme précédent.} \end{aligned}$$

□

**Définition 2.3.1.** *On dit qu'un graphe  $G$  n'a qu'un bout si, quel que soit le sous-graphe fini  $H$  de  $G$ , une seule des parties connexes de  $G \setminus H$  est infinie.*

**Théorème 2.3.1.** *L'UIPT n'a p.s. qu'un bout.*

*Démonstration.* Supposons qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $\tau(\text{"}T \text{ n'a pas qu'un bout"}) > \varepsilon$ . Alors il existe une suite de  $k$  arêtes incidentes formant une boucle et qui partitionne l'UIPT en deux composantes infinies (cf figure 2.3.1) avec une probabilité supérieure à  $\varepsilon$ . Cette boucle découpe donc l'UIPT en deux composantes de taille  $a$  aussi grande que l'on veut. Or,  $\tau$  étant la limite des  $\tau_n$ , il existe  $N$  tel que, pour tout  $n \geq N$ , la probabilité (au sens de  $\tau_n$ )

qu'une boucle de taille  $k$  partitionne une triangulation en deux parties de taille au moins  $a$  est supérieure à  $\varepsilon/2$ . On peut supposer que la boucle passe par la racine de la triangulation. Alors par le lemme précédent, le nombre de triangulations admettant une telle boucle est en  $O(\alpha^n n^{-5/2} a^{-3/2})$ . Mais le nombre total de triangulations de taille  $n$  est  $\phi_{n-3,1} \sim C\alpha^n n^{-5/2}$ . D'où,  $\tau_n$  étant uniforme, on peut diviser pour obtenir que la probabilité d'existence de la boucle est en  $O(a^{-3/2})$ . Par conséquent, cette probabilité tend vers 0 lorsque  $a$  tend vers l'infini et est donc inférieure à  $\varepsilon/2$  pour  $a$  assez grand.  $\square$

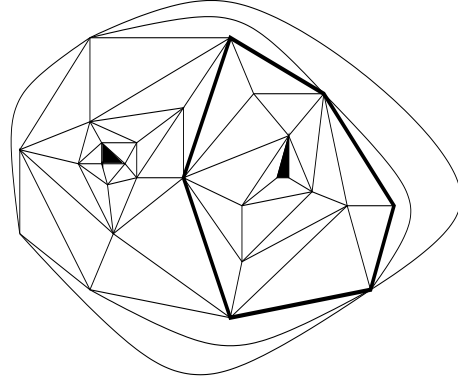


FIG. 2.3.1 – Les parties coloriées correspondent à des composantes infinies. Une boucle les séparant est surlignée en noir.

**Remarque 2.3.1.** *La définition d'un graphe infini implique que les points d'accumulation d'un graphe ne font pas partie de celui-ci. Donc, en considérant le point d'accumulation de l'UIPT comme un point à l'infini, on peut dire que p.s. l'UIPT est une triangulation du plan.*

### 2.3.2 Étude de composantes indépendantes

On donne une nouvelle définition avant de décrire un peu plus en détail le comportement de l'UIPT.

**Définition 2.3.2.** *Soit  $m$  un entier supérieur ou égal à 1. On appelle distribution libre de paramètre  $m$  et on note  $\mu_m$  la probabilité sur les triangulations enracinées telle que, pour toute triangulation  $T$  du  $(m+2)$ -gone de taille  $n$ ,*

$$\mu_m(\{T\}) = \frac{\alpha^{-n}}{Z_m},$$

où  $Z_m$  est défini comme dans la section 2.2.3.

On se replace maintenant dans les conditions de la proposition 2.2.2. On considère donc une triangulation finie rigide  $A$  sans arête entre des sommets se trouvant sur une face externe à part celles formant la face elle-même. Les  $k$  faces externes sont de tailles  $(m_j + 2)_{j \in \{1, \dots, k\}}$ . Les événements  $Q(A, n_2, \dots, n_k)$  et  $R_i(A)$  désignent les événements définis dans la démonstration de la proposition 2.2.2.

**Théorème 2.3.2.** Soit  $T_j$  la partie d'une UIPT se trouvant dans la  $j$ -ème face externe de  $A$  pour tout  $j \in \{1, \dots, k\}$ . Alors conditionnellement à  $R_i(A)$  pour n'importe quel  $i \in \{1, \dots, k\}$  :

1. Les  $(T_j)_{j \neq i}$  sont indépendantes.
2. Pour tout  $j \neq i$ ,  $T_j$  a pour loi la distribution libre de paramètre  $m_j + 2$ .
3.  $T_i$  suit la loi d'une UIPT du  $(m_i + 2)$ -gone, c'est-à-dire la loi limite quand  $N$  tend vers l'infini des probabilités uniformes sur les triangulations du  $(m_i + 2)$ -gone de taille  $N$ .

*Démonstration.* On suppose que  $i = 1$ , mais le raisonnement suivant s'applique à n'importe quel  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Dans la démonstration de la proposition 2.2.3, on a déjà vu que

$$\tau(R_1(A)) = \frac{\alpha^{3-n}}{C_1} C_{m_1} \prod_{j=2}^k Z_{m_j},$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} \tau(\cap_{j=2}^k \{|T_j| = n_j\} \mid R_1(A)) &= \frac{\tau(Q(A, n_2, \dots, n_k))}{\tau(R_1(A))} \\ &= \prod_{j=2}^k \frac{\phi_{n_j, m_j} \alpha^{-n_j}}{Z_{m_j}}. \end{aligned}$$

Or, pour tout  $N \geq 3$ , quelle que soit la manière  $M_2$  de remplir  $T_2$  avec des tailles  $(n_j)_{j \in \{2, \dots, k\}}$  fixées, la probabilité  $\tau_N(\{T_2 = M_2\} \cap (\cap_{j=3}^k \{|T_j| = n_j\}) \mid R_1(A))$  est la même, car  $\tau_N$  est uniforme et  $A$  est rigide. Ceci est aussi vrai pour  $\tau$  par convergence étroite de  $(\tau_N)_{N \geq 3}$ . D'où

$$\tau(\{T_2 = M_2\} \cap (\cap_{j=3}^k \{|T_j| = n_j\}) \mid R_1(A)) = \frac{\alpha^{-n_2}}{Z_{m_2}} \prod_{j=3}^k \frac{\phi_{n_j, m_j} \alpha^{-n_j}}{Z_{m_j}},$$

et de proche en proche, quelles que soient les triangulations  $M_j$  du  $(m_j + 2)$ -gone de taille  $n_j$  pour  $j \in \{2, \dots, k\}$ ,

$$\tau(\cap_{j=2}^k \{T_j = M_j\} \mid R_1(A)) = \prod_{j=2}^k \frac{\alpha^{-n_j}}{Z_{m_j}}.$$

Par conséquent, comme cette probabilité est sous forme de produit de fonctions  $f_j(M_j)$  (car  $n_j$  est la taille de  $M_j$ ), les variables aléatoires  $T_j$  pour  $j \in \{2, \dots, k\}$  sont indépendantes conditionnellement à  $R_1(A)$  et on a

$$\tau(T_j = M_j \mid R_1(A)) = \frac{\alpha^{-n_j}}{Z_{m_j}},$$

i.e.  $T_j$  a pour loi la distribution libre de paramètre  $m_j + 2$ .

La loi de  $T_1$  est uniforme quel que soit  $N \geq 3$  fixé car  $\tau_N$  est uniforme et  $A$  est rigide. En faisant tendre  $N$  vers l'infini, la taille de  $T_1$  tend aussi vers l'infini. Donc, conditionnellement à  $R_1(A)$ ,  $T_1$  suit la loi d'une UIPT du  $(m_1 + 2)$ -gone.  $\square$

# Bibliographie

- [AnSch] O. Angel et O. Schramm, *Uniform infinite planar triangulations*, Commun. Math. Phys. 241, p. 191-213, 2003.
- [Dud] R. M. Dudley, *Real analysis and probability*, Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Pacific Grove, CA, 1989.
- [GoJa] I.P. Goulden et D.M. Jackson, *Combinatorial enumeration*, Wiley, New-York, 1983, chap. 1 et 2.
- [Pit] J. Pitman, *Combinatorial Stochastic Process*, [http ://www.stat.berkeley.edu](http://www.stat.berkeley.edu), chap. 5.