Université Paris VII **2009-2010**
CM4 **Groupe concours**

Séries de Fourier

Exercice 1 —

1. Trouver le polynôme trigonométrique de degré au plus 6, qui donne la meilleur approximation quadratique de la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = |x|$.
2. Même question pour la fonction $f(x) = 1$ si $x \in]0, \pi]$ et $f(x) = 0$ si $x \in]\pi, 2\pi]$.

Exercice 2 — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie sur sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = x^2$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de f.
2. Étudier le convergence de la série de Fourier de f.
3. En déduire les sommes des séries suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx \ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Exercice 3 — Même questions pour que l'exercice précédent pour la fonctions 2π-périodiques définie sur $[0, 2\pi[$ par $f(x) = x^2$, et les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

Exercice 4 — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = |\cos x|$ si $x \in \mathbb{R}$.

1. Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.
2. Étudier le convergence de la série de Fourier de f.
3. En déduire les sommes des séries suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \ , \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{11}{(4n^2 - 1)^2}$$

Exercice 5 — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par :
$f(x) = x$ si $x \in [0, \pi/2]$, $f(x) = \pi - x$ si $x \in [\pi/2, \pi]$, $f(x) = -f(-x)$ si $x \in [-\pi, 0]$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de f.

2. Montrer que la série de Fourier de f converge vers f uniformément sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer le développement en série de Fourier de la primitive de f qui s'annule en 0.
4. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$.

Exercice 6 — Calculer les coefficients de Fourier des fonctions 2π-périodique suivantes :

1. $f(x) = x/2$ pour tout $x \in]-\pi, \pi]$.
2. $g(x) = \dfrac{1}{12}(\pi^2 x - x^3)$ pour tout $x \in]-\pi, \pi]$.

Exercice 7 — Soit f la fonction périodique de période 2 définie sur $[-1, 1]$ par $f(x) = |\sin(\pi x)|$. Montrer que f est égale en tout point la somme d'une série trigonométrique que l'on déterminera.

Exercice 8 — Soit f la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = \cosh(\alpha x)$ pour $x \in]-\pi, \pi]$ (avec $\alpha > 0$).

1. Calculer les coefficients de Fourier de f et étudier la convergence de la série de Fourier.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^2 + n^2}$.
3. En utilisant la formule de Parseval calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\alpha^2 + n^2)^2}$.
4. Déduire de ce qui précède les coefficients de Fourier de la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = \sinh(\alpha x)$ pour $x \in]-\pi, \pi]$ et calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1 + n^2}$.

Exercice 9 — Soit f une fonction continue par morceaux 2π-périodique et $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite de ses coefficients de Fourier.

1. Exprimer en fonction des c_n les coefficients de Fourier de la fonction $g(t) = f(t + a)$ avec $a \in \mathbb{R}$.
2. Exprimer $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t + a) - f(t)|^2 \, dt$ en fonction des c_n.