Discriminants d’un groupe de réflexion et factorisations d’un élément de Coxeter

Vivien Ripoll

École Normale Supérieure
Département de Mathématiques et Applications

10 juin 2010
Séminaire Algèbre et Théorie des Nombres
Besançon

1. Nombres de Fuss-Catalan pour les groupes de réflexion
   - Groupes de réflexion complexes
   - Treillis des partitions non-croisées
   - Factorisations par blocs d'un élément de Coxeter
2. Géométrie du discriminant
   - Le revêtement de Lyashko-Looijenga
   - Factorisations géométriques et fibres de LL
   - Combinatoire des factorisations sous-maximales
3. Discriminants et Jacobiens de groupes de réflexion « virtuels »
   - Extensions polynomiales finies « bien ramifiées »
   - Extensions de Lyashko-Looijenga
4. Perspectives

Groupe de réflexion complexe

Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel (de dimension n).

Définition

Un groupe de réflexion complexe (fini) est un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(V)$ engendré par des réflexions complexes.

Groupe de réflexion complexe

Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel (de dimension n).

Définition

Un groupe de réflexion complexe (fini) est un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(V)$ engendré par des réflexions complexes.
Une réflexion complexe est un élément $s \in \mathrm{GL}(V)$ d'ordre fini, et tel que $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_V)$ soit un hyperplan :

$$s \underset{\mathcal{B}}{\leftrightarrow} \text{matrice} \, \mathrm{Diag}(\zeta, 1, \ldots, 1) \ , \ \text{avec } \zeta \text{ racine de l'unité.}$$

Groupe de réflexion complexe

Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel (de dimension n).

Définition

Un groupe de réflexion complexe (fini) est un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(V)$ engendré par des réflexions complexes.
Une réflexion complexe est un élément $s \in \mathrm{GL}(V)$ d'ordre fini, et tel que $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_V)$ soit un hyperplan :

$$s \underset{\mathcal{B}}{\leftrightarrow} \text{matrice}\, \mathrm{Diag}(\zeta, 1, \ldots, 1) \ , \ \text{avec } \zeta \text{ racine de l'unité.}$$

Classification de Shephard-Todd (1954) :

- une série infinie à 3 paramètres $G(de, e, r)$;
- 34 groupes exceptionnels.

Théorie des invariants

Soit W un groupe de réflexion complexe.
W agit sur $S(V^*)$ (algèbre de polynômes $\mathbb{C}[v_1, \ldots, v_n]$).

Théorie des invariants

Soit W un groupe de réflexion complexe.
W agit sur $S(V^*)$ (algèbre de polynômes $\mathbb{C}[v_1, \ldots, v_n]$).

Théorème (Chevalley-Shephard-Todd)

Il existe des invariants fondamentaux $f_1, \ldots, f_n$, homogènes, tels que

$$S(V^*)^W = \mathbb{C}[f_1, \ldots, f_n] .$$

Leurs degrés $d_1 \leq \cdots \leq d_n$ ne dépendent pas du choix de $f_1, \ldots, f_n$ (degrés invariants de W).

Théorie des invariants

Soit W un groupe de réflexion complexe.
W agit sur $S(V^*)$ (algèbre de polynômes $\mathbb{C}[v_1, \dots, v_n]$).

Théorème (Chevalley-Shephard-Todd)

Il existe des invariants fondamentaux $f_1, \dots, f_n$, homogènes, tels que

$$S(V^*)^W = \mathbb{C}[f_1, \dots, f_n] .$$

Leurs degrés $d_1 \leq \dots \leq d_n$ ne dépendent pas du choix de $f_1, \dots, f_n$ (degrés invariants de W).

$\rightsquigarrow$ isomorphisme :
$$\begin{array}{rcl} W\backslash V & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{C}^n \\ \bar{v} & \mapsto & (f_1(v), \dots, f_n(v)). \end{array}$$

Sur la classification

Classification beaucoup moins satisfaisante que pour les groupes de Coxeter.

Sur la classification

Classification beaucoup moins satisfaisante que pour les groupes de Coxeter.

- pas de théorie de Coxeter : pas d'ensemble naturel S de réflexions fondamentales ;

Sur la classification

Classification beaucoup moins satisfaisante que pour les groupes de Coxeter.

- pas de théorie de Coxeter : pas d'ensemble naturel S de réflexions fondamentales ;
- pas de modèle combinatoire satisfaisant ;

Sur la classification

Classification beaucoup moins satisfaisante que pour les groupes de Coxeter.

- pas de théorie de Coxeter : pas d'ensemble naturel S de réflexions fondamentales ;
- pas de modèle combinatoire satisfaisant ;
- trouver de « bonnes » présentations de ces groupes est un problème difficile ;

Sur la classification

Classification beaucoup moins satisfaisante que pour les groupes de Coxeter.

- pas de théorie de Coxeter : pas d'ensemble naturel S de réflexions fondamentales ;
- pas de modèle combinatoire satisfaisant ;
- trouver de « bonnes » présentations de ces groupes est un problème difficile ;
- nombreuses preuves au cas par cas, pas éclairantes.

Sur la classification

Classification beaucoup moins satisfaisante que pour les groupes de Coxeter.

- pas de théorie de Coxeter : pas d'ensemble naturel S de réflexions fondamentales ;
- pas de modèle combinatoire satisfaisant ;
- trouver de « bonnes » présentations de ces groupes est un problème difficile ;
- nombreuses preuves au cas par cas, pas éclairantes.

Sur la classification

Classification beaucoup moins satisfaisante que pour les groupes de Coxeter.

- pas de théorie de Coxeter : pas d'ensemble naturel S de réflexions fondamentales ;
- pas de modèle combinatoire satisfaisant ;
- trouver de « bonnes » présentations de ces groupes est un problème difficile ;
- nombreuses preuves au cas par cas, pas éclairantes.

Bessis, $\sim$ 2003 : construction d'un bon substitut au monoïde de tresses d'Artin-Tits : le monoïde de tresses dual.

Sur la classification

Classification beaucoup moins satisfaisante que pour les groupes de Coxeter.

- pas de théorie de Coxeter : pas d'ensemble naturel S de réflexions fondamentales ;
- pas de modèle combinatoire satisfaisant ;
- trouver de « bonnes » présentations de ces groupes est un problème difficile ;
- nombreuses preuves au cas par cas, pas éclairantes.

Bessis, $\sim$ 2003 : construction d'un bon substitut au monoïde de tresses d'Artin-Tits : le monoïde de tresses dual.
$\rightsquigarrow$ se plonge dans le groupe de tresses $B(W)$, et on peut appliquer les méthodes de Deligne et Brieskorn-Saito (monoïde de Garside).

Ordre absolu sur W

Point de départ : remplacer (W, S) par $(W, \mathcal{R})$ où $\mathcal{R}$ est l'ensemble de toutes les réflexions de W.

Ordre absolu sur W

Point de départ : remplacer (W, S) par $(W, \mathcal{R})$ où $\mathcal{R}$ est l'ensemble de toutes les réflexions de W.

Définition

Longueur absolue : $\ell_{\mathcal{R}}(w)$: longueur minimale d'un mot représentant w.

Ordre absolu sur W

Point de départ : remplacer (W, S) par $(W, \mathcal{R})$ où $\mathcal{R}$ est l'ensemble de toutes les réflexions de W.

Définition

Longueur absolue : $\ell_{\mathcal{R}}(w)$: longueur minimale d'un mot représentant w.

Ordre absolu : $u \preccurlyeq_{\mathcal{R}} v$ ssi $\ell_{\mathcal{R}}(u) + \ell_{\mathcal{R}}(u^{-1}v) = \ell_{\mathcal{R}}(v)$.

Ordre absolu sur W

Point de départ : remplacer (W, S) par $(W, \mathcal{R})$ où $\mathcal{R}$ est l'ensemble de toutes les réflexions de W.

Définition

Longueur absolue : $\ell_{\mathcal{R}}(w)$: longueur minimale d'un mot représentant w.

Ordre absolu : $u \preccurlyeq_{\mathcal{R}} v$ ssi $\ell_{\mathcal{R}}(u) + \ell_{\mathcal{R}}(u^{-1}v) = \ell_{\mathcal{R}}(v)$.

Le monoïde dual est construit à partir de l'intervalle $[1, c] \subseteq (W, \preccurlyeq_{\mathcal{R}})$, qui est un treillis pour cet ordre (pour c un élément de Coxeter).

1. Nombres de Fuss-Catalan pour les groupes de réflexion
   - Groupes de réflexion complexes
   - Treillis des partitions non-croisées
   - Factorisations par blocs d'un élément de Coxeter
2. Géométrie du discriminant
   - Le revêtement de Lyashko-Looijenga
   - Factorisations géométriques et fibres de LL
   - Combinatoire des factorisations sous-maximales
3. Discriminants et Jacobiens de groupes de réflexion « virtuels »
   - Extensions polynomiales finies « bien ramifiées »
   - Extensions de Lyashko-Looijenga
4. Perspectives

Treillis des partitions non-croisées

On fixe un **élément de Coxeter** c (élément $e^{2i\pi/h}$-régulier, où $h = d_n$).

Treillis des partitions non-croisées

On fixe un **élément de Coxeter** c
(élément $e^{2i\pi/h}$-régulier, où $h = d_n$).

Définition (Treillis des partitions non-croisées de type W)

$$\mathrm{NCP}_W(c) := \{w \in W \mid w \preccurlyeq c\}$$

Remarque : la structure ne dépend pas du choix de c.

Treillis des partitions non-croisées

On fixe un **élément de Coxeter** c (élément $e^{2i\pi/h}$-régulier, où $h = d_n$).

Définition (Treillis des partitions non-croisées de type W)

$$\mathrm{NCP}_W(c) := \{w \in W \mid w \preccurlyeq c\}$$

Remarque : la structure ne dépend pas du choix de c.

Exemple premier

Si $W = A_{n-1}$, $\mathrm{NCP}_W = \{$partitions non-croisées d'un n-gone$\}$.

Treillis des partitions non-croisées

On fixe un **élément de Coxeter** c (élément $e^{2i\pi/h}$-régulier, où $h = d_n$).

Définition (Treillis des partitions non-croisées de type W)

$$\mathrm{NCP}_W(c) := \{w \in W \mid w \preccurlyeq c\}$$

Remarque : la structure ne dépend pas du choix de c.

Exemple premier

Si $W = A_{n-1}$, $\mathrm{NCP}_W = \{$partitions non-croisées d'un n-gone$\}$.

Objet combinatoire très riche.

Chaînes dans NCP_W

Formule de Chapoton

Le nombre de chaînes (larges) $w_1 \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq w_N \preccurlyeq c$ dans NCP_W est :

$$Z_W(N+1) = \prod_{i=1}^{n} \frac{d_i + Nh}{d_i}.$$

Chaînes dans NCP_W

Formule de Chapoton

Le nombre de chaînes (larges) $w_1 \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq w_N \preccurlyeq c$ dans NCP_W est :

$$Z_W(N+1) = \prod_{i=1}^{n} \frac{d_i + Nh}{d_i}.$$

Appelés nombres de Fuss-Catalan de type W : $\text{Cat}^{(N)}(W)$.

Chaînes dans NCP_W

Formule de Chapoton

Le nombre de chaînes (larges) $w_1 \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq w_N \preccurlyeq c$ dans NCP_W est :

$$Z_W(N+1) = \prod_{i=1}^{n} \frac{d_i + Nh}{d_i}.$$

Appelés nombres de Fuss-Catalan de type W : $\mathrm{Cat}^{(N)}(W)$.

Preuve (Athanasiadis, Reiner, Bessis) : cas par cas avec la classification... même pour le cas $N = 1$ (qui donne $|\,\mathrm{NCP}_W\,|$).

1. Nombres de Fuss-Catalan pour les groupes de réflexion
   - Groupes de réflexion complexes
   - Treillis des partitions non-croisées
   - Factorisations par blocs d'un élément de Coxeter
2. Géométrie du discriminant
   - Le revêtement de Lyashko-Looijenga
   - Factorisations géométriques et fibres de LL
   - Combinatoire des factorisations sous-maximales
3. Discriminants et Jacobiens de groupes de réflexion « virtuels »
   - Extensions polynomiales finies « bien ramifiées »
   - Extensions de Lyashko-Looijenga
4. Perspectives

Factorisations par blocs de c

Comment voir les chaînes de $\mathtt{NCP}_W$ dans la géométrie de W ?

Factorisations par blocs de c

Comment voir les chaînes de NCP_W dans la géométrie de W ?

Définition

$(w_1, \ldots, w_p)$ est une factorisation par blocs de c si :

Factorisations par blocs de c

Comment voir les chaînes de NCP_W dans la géométrie de W ?

Définition

$(w_1, \ldots, w_p)$ est une factorisation par blocs de c si :

- $w_1, \ldots, w_p \in W - \{1\}$;

Factorisations par blocs de c

Comment voir les chaînes de NCP_W dans la géométrie de W ?

Définition

$(w_1, \ldots, w_p)$ est une factorisation par blocs de c si :

- $w_1, \ldots, w_p \in W - \{1\}$;
- $w_1 \ldots w_p = c$;

Factorisations par blocs de c

Comment voir les chaînes de NCP_W dans la géométrie de W ?

Définition

$(w_1, \ldots, w_p)$ est une factorisation par blocs de c si :

- $w_1, \ldots, w_p \in W - \{1\}$;
- $w_1 \ldots w_p = c$;
- $\ell(w_1) + \cdots + \ell(w_p) = \ell(c) = n$.

Factorisations par blocs de c

Comment voir les chaînes de NCP_W dans la géométrie de W ?

Définition

$(w_1, \ldots, w_p)$ est une factorisation par blocs de c si :

- $w_1, \ldots, w_p \in W - \{1\}$;
- $w_1 \ldots w_p = c$;
- $\ell(w_1) + \cdots + \ell(w_p) = \ell(c) = n$.

Factorisations par blocs de c

Comment voir les chaînes de NCP_W dans la géométrie de W ?

Définition

$(w_1, \ldots, w_p)$ est une factorisation par blocs de c si :

- $w_1, \ldots, w_p \in W - \{1\}$;
- $w_1 \ldots w_p = c$;
- $\ell(w_1) + \cdots + \ell(w_p) = \ell(c) = n$.

$\mathrm{FACT}_p(c) := \{\text{factorisations en } p \text{ blocs}\}$

Factorisations par blocs de c

Comment voir les chaînes de NCP_W dans la géométrie de W ?

Définition

$(w_1, \ldots, w_p)$ est une factorisation par blocs de c si :

- $w_1, \ldots, w_p \in W - \{1\}$;
- $w_1 \ldots w_p = c$;
- $\ell(w_1) + \cdots + \ell(w_p) = \ell(c) = n$.

$\mathrm{FACT}_p(c) := \{\text{factorisations en } p \text{ blocs}\}$
$\rightsquigarrow$ détermine une partition de n, et même une composition (partition ordonnée) de n.
Ex. : $\mathrm{FACT}_n(c) = \mathrm{FACT}_{1^n}(c) = \mathrm{Red}_{\mathcal{R}}(c)$.

Factorisations de c et chaînes de NCP_W

Factorisation $w_1 \dots w_p = c$
$\mapsto$ chaîne $w_1 \preccurlyeq w_1 w_2 \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq w_1 \dots w_{p-1} \preccurlyeq c$.
Et inversement.

Factorisations de c et chaînes de NCP_W

Factorisation $w_1 \dots w_p = c$
$\mapsto$ chaîne $w_1 \preccurlyeq w_1 w_2 \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq w_1 \dots w_{p-1} \preccurlyeq c$.
Et inversement.

Cependant : Factorisations **strictes**, vs. chaînes **larges**.

Factorisations de c et chaînes de NCP_W

Factorisation $w_1 \dots w_p = c$
$\mapsto$ chaîne $w_1 \preccurlyeq w_1 w_2 \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq w_1 \dots w_{p-1} \preccurlyeq c$.
Et inversement.

Cependant : Factorisations **strictes**, vs. chaînes **larges**.

Formules de passage

$$\mathrm{Cat}^{(N)}(W) = \sum_{k=1}^{n} \binom{N+1}{k} |\,\mathrm{FACT}_k(c)|$$

$$|\,\mathrm{FACT}_p(c)| = \Delta^p Z_W(0) = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} \mathrm{Cat}^{(k)}(W)$$

$(\Delta : P \mapsto P(X+1) - P(X).)$

Discriminant

$\mathcal{A} := \{$hyperplans de réflexions de $W\}$. Pour $H \in \mathcal{A}$:

- α_H : forme linéaire de noyau H
- e_H : ordre du sous-groupe parabolique W_H

Définition

Discriminant de W : $$\Delta_W := \prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H^{e_H}.$$

Discriminant

$\mathcal{A} := \{$hyperplans de réflexions de $W\}$. Pour $H \in \mathcal{A}$:

- α_H : forme linéaire de noyau H
- e_H : ordre du sous-groupe parabolique W_H

Définition

Discriminant de W : $$\Delta_W := \prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H^{e_H}.$$

- $\Delta_W \in \mathbb{C}[V]^W = \mathbb{C}[f_1, \ldots, f_n]$
- Δ_W est l'équation de l'hypersurface $\mathcal{H}$, quotient de $\bigcup_{H \in \mathcal{A}} H$ dans $W \backslash V$.

Cas basique du type **A** :

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2 = \mathrm{Disc}(T^n - \sigma_1 T^{n-1} + \cdots + (-1)^n \sigma_n ; T)$$

Discriminant d'un groupe bien engendré

On suppose que W agit de façon **irréductible** sur le $\mathbb{C}$-e.v. V de dimension n, et est **bien engendré** (*i.e.* peut être engendré par n réflexions).

Discriminant d'un groupe bien engendré

On suppose que W agit de façon **irréductible** sur le $\mathbb{C}$-e.v. V de dimension n, et est **bien engendré** (*i.e.* peut être engendré par n réflexions).

Proposition

*Si W est bien engendré, le discriminant Δ_W est **monique de degré** n **en** f_n. On peut choisir les invariants fondamentaux $f_1, \ldots, f_n$ de sorte que :*

$$\Delta_W = f_n^n + a_2 f_n^{n-2} + a_3 f_n^{n-3} + \cdots + a_{n-1} f_n + a_n,$$

avec $a_i \in \mathbb{C}[f_1, \ldots, f_{n-1}]$ (polynôme homogène, de degré ih).

Morphisme de Lyashko-Looijenga de W

Définition (Morphisme de Lyashko-Looijenga de W)

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{LL} : & \mathbb{C}^{n-1} & \to & \mathbb{C}^{n-1} \\ & (f_1, \dots, f_{n-1}) & \mapsto & (a_2, \dots, a_n) \end{array}$$

C'est un morphisme algébrique, quasi-homogène pour les poids : $\deg(f_j) = d_j$, $\deg(a_i) = ih$.

Morphisme de Lyashko-Looijenga de W

Définition (Morphisme de Lyashko-Looijenga de W)

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{LL}: & \mathbb{C}^{n-1} & \to & \mathbb{C}^{n-1} \\ & (f_1, \dots, f_{n-1}) & \mapsto & (a_2, \dots, a_n) \end{array}$$

C'est un morphisme algébrique, quasi-homogène pour les poids : $\deg(f_j) = d_j$, $\deg(a_i) = ih$.

On pose $Y := \operatorname{Spec} \mathbb{C}[f_1, \dots, f_{n-1}]$.
$\rightsquigarrow W \backslash V \simeq Y \times \mathbb{C}$.

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{LL}: & Y & \to & E_n = \{\text{configurations de } n \text{ points centrés de } \mathbb{C}\} \\ & y & \mapsto & \{\text{racines, avec multiplicités, de } \Delta_W(y, f_n) \text{ en } f_n\} \end{array}$$

Un revêtement ramifié

$$E_n^{\text{reg}} := \{\text{configurations de } n \text{ points } \textbf{distincts}\} \subseteq E_n$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &:= \mathrm{LL}^{-1}(E_n - E_n^{\text{reg}}) \\ &= \{y \in Y \mid \Delta_W(y, f_n) \text{ a des racines multiples en } f_n\} \\ &= \{y \in Y \mid D_{\mathrm{LL}}(y) = 0\} \ , \end{aligned}$$

Un revêtement ramifié

$$E_n^{\mathrm{reg}} := \{\text{configurations de } n \text{ points } \textbf{distincts}\} \subseteq E_n$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &:= \mathrm{LL}^{-1}(E_n - E_n^{\mathrm{reg}}) \\ &= \{y \in Y \mid \Delta_W(y, f_n) \text{ a des racines multiples en } f_n\} \\ &= \{y \in Y \mid D_{\mathrm{LL}}(y) = 0\}\ , \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} D_{\mathrm{LL}} &:= \mathrm{Disc}(\Delta_W(y, f_n); f_n) \\ &= \mathrm{Disc}(f_n^n + a_2 f_n^{n-2} + \cdots + a_n; f_n). \end{aligned}$$

Un revêtement ramifié

$$E_n^{\mathrm{reg}} := \{\text{configurations de } n \text{ points } \textbf{distincts}\} \subseteq E_n$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} &:= \mathrm{LL}^{-1}(E_n - E_n^{\mathrm{reg}}) \\
&= \{y \in Y \mid \Delta_W(y, f_n) \text{ a des racines multiples en } f_n\} \\
&= \{y \in Y \mid D_{\mathrm{LL}}(y) = 0\}\ ,
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
D_{\mathrm{LL}} &:= \mathrm{Disc}(\Delta_W(y, f_n); f_n) \\
&= \mathrm{Disc}(f_n^n + a_2 f_n^{n-2} + \cdots + a_n; f_n).
\end{aligned}$$

Théorème (Looijenga, Lyashko, Bessis)

- *L'extension d'anneaux* $\mathbb{C}[a_2, \ldots, a_n] \subseteq \mathbb{C}[f_1, \ldots, f_{n-1}]$ *est libre, de rang* $n!h^n/|W|$.
- LL *est un morphisme fini, et un revêtement ramifié.*
- *sa restriction* $Y - \mathcal{K} \twoheadrightarrow E_n^{\mathrm{reg}}$ *est un revêtement non ramifié de degré* $n!h^n/|W|$.

1 Nombres de Fuss-Catalan pour les groupes de réflexion
- Groupes de réflexion complexes
- Treillis des partitions non-croisées
- Factorisations par blocs d'un élément de Coxeter

2 Géométrie du discriminant
- Le revêtement de Lyashko-Looijenga
- **Factorisations géométriques et fibres de LL**
- Combinatoire des factorisations sous-maximales

3 Discriminants et Jacobiens de groupes de réflexion « virtuels »
- Extensions polynomiales finies « bien ramifiées »
- Extensions de Lyashko-Looijenga

4 Perspectives

Factorisations issues de la topologie

Hypersurface $\mathcal{H} \subseteq W \backslash V \simeq Y \times \mathbb{C}$.

$$(y, x) \in \mathcal{H} \iff x \in \mathrm{LL}(y)$$

Factorisations issues de la topologie

Hypersurface $\mathcal{H} \subseteq W \backslash V \simeq Y \times \mathbb{C}$.

$$(y, x) \in \mathcal{H} \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \mathrm{LL}(y)$$

Constructions topologiques de Bessis (« tunnels »)

$\rightsquigarrow$ une application $\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \rightarrow & W \\ (y, x) & \mapsto & c_{y,x} \end{array}$

Factorisations issues de la topologie

Hypersurface $\mathcal{H} \subseteq W \backslash V \simeq Y \times \mathbb{C}$.

$$(y, x) \in \mathcal{H} \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \mathrm{LL}(y)$$

Constructions topologiques de Bessis (« tunnels »)

$\rightsquigarrow$ une application $\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \rightarrow & W \\ (y, x) & \mapsto & c_{y,x} \end{array}$

telle que, si $(x_1, \ldots, x_p)$ est le support ordonné de $\mathrm{LL}(y)$ (pour l'ordre lex. sur $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$), alors :

$(c_{y,x_1}, \ldots, c_{y,x_p}) \in \mathrm{FACT}_p(c)$.

Factorisations issues de la topologie

Hypersurface $\mathcal{H} \subseteq W\backslash V \simeq Y \times \mathbb{C}$.

$$(y, x) \in \mathcal{H} \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \mathrm{LL}(y)$$

Constructions topologiques de Bessis (« tunnels »)

$\rightsquigarrow$ une application $\begin{array}{rcl} \mathcal{H} & \to & W \\ (y, x) & \mapsto & c_{y,x} \end{array}$

telle que, si $(x_1, \ldots, x_p)$ est le support ordonné de $\mathrm{LL}(y)$ (pour l'ordre lex. sur $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$), alors :

$(c_{y,x_1}, \ldots, c_{y,x_p}) \in \mathrm{FACT}_p(c)$.

Notation : $\underline{\mathrm{fact}}(y) := (c_{y,x_1}, \ldots, c_{y,x_p})$.

Factorisations issues de la topologie

Hypersurface $\mathcal{H} \subseteq W \backslash V \simeq Y \times \mathbb{C}$.

$$(y, x) \in \mathcal{H} \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \mathrm{LL}(y)$$

Constructions topologiques de Bessis (« tunnels »)

$\rightsquigarrow$ une application $\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \to & W \\ (y, x) & \mapsto & c_{y,x} \end{array}$

telle que, si $(x_1, \dots, x_p)$ est le support ordonné de $\mathrm{LL}(y)$ (pour l'ordre lex. sur $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$), alors :

$(c_{y,x_1}, \dots, c_{y,x_p}) \in \mathrm{FACT}_p(c)$.

Notation : $\underline{\mathrm{fact}}(y) := (c_{y,x_1}, \dots, c_{y,x_p})$.

Longueur et classe de conjugaison de $c_{y,x}$ dépendent de la position de (y, x) dans $\mathcal{H}$ ...

Stratification de $W \backslash V$ et éléments de Coxeter paraboliques

Stratification de V par les plats (**treillis d'intersection**) :
$\mathcal{L} := \{\bigcap_{H \in \mathcal{B}} H \mid \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}\}$.

Stratification de $W \backslash V$ et éléments de Coxeter paraboliques

Stratification de V par les plats (**treillis d'intersection**) :
$\mathcal{L} := \{\bigcap_{H \in \mathcal{B}} H \mid \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}\}$.
Quotient par $W \rightsquigarrow$ stratification $\bar{\mathcal{L}} = W \backslash \mathcal{L} = (W \cdot L)_{L \in \mathcal{L}}$.

Stratification de $W \backslash V$ et éléments de Coxeter paraboliques

Stratification de V par les plats (**treillis d'intersection**) : $\mathcal{L} := \{\bigcap_{H \in \mathcal{B}} H \mid \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}\}$.
Quotient par $W \rightsquigarrow$ stratification $\bar{\mathcal{L}} = W \backslash \mathcal{L} = (W \cdot L)_{L \in \mathcal{L}}$.
Pour $\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}$, $\Lambda^0 := \Lambda$ privée de ses strates intérieures.

Stratification de $W \backslash V$ et éléments de Coxeter paraboliques

Stratification de V par les plats (**treillis d'intersection**) :
$\mathcal{L} := \{\bigcap_{H \in \mathcal{B}} H \mid \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}\}$.
Quotient par $W \rightsquigarrow$ stratification $\bar{\mathcal{L}} = W \backslash \mathcal{L} = (W \cdot L)_{L \in \mathcal{L}}$.
Pour $\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}$, $\Lambda^0 := \Lambda$ privée de ses strates intérieures.

Bijection [Steinberg] :
$\mathcal{L} \leftrightarrow \{$sous-groupes paraboliques de $W\} =: SGP(W)$.

Stratification de $W\backslash V$ et éléments de Coxeter paraboliques

Stratification de V par les plats (**treillis d'intersection**) : $\mathcal{L} := \{\bigcap_{H\in\mathcal{B}} H \mid \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}\}$.
Quotient par $W \rightsquigarrow$ stratification $\bar{\mathcal{L}} = W\backslash\mathcal{L} = (W\cdot L)_{L\in\mathcal{L}}$.
Pour $\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}$, $\Lambda^0 := \Lambda$ privée de ses strates intérieures.

Bijection [Steinberg] :
$\mathcal{L} \leftrightarrow \{$sous-groupes paraboliques de $W\} =: SGP(W)$.
$\rightsquigarrow$ bijections naturelles :

$$\bar{\mathcal{L}} \quad \leftrightarrow \quad SGP(W)/\text{conj.}$$

Stratification de V par les plats (**treillis d'intersection**) :
$\mathcal{L} := \{\bigcap_{H\in\mathcal{B}} H \mid \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}\}$.
Quotient par $W \rightsquigarrow$ stratification $\bar{\mathcal{L}} = W\backslash\mathcal{L} = (W\cdot L)_{L\in\mathcal{L}}$.
Pour $\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}$, $\Lambda^0 := \Lambda$ privée de ses strates intérieures.

Bijection [Steinberg] :
$\mathcal{L} \leftrightarrow \{$sous-groupes paraboliques de $W\} =: SGP(W)$.
$\rightsquigarrow$ bijections naturelles :

$$\bar{\mathcal{L}} \quad \leftrightarrow \quad SGP(W)/\text{conj.} \quad \leftrightarrow \quad \text{Cox-parab}(W)/\text{conj.}$$

Cox-parab(W) : éléments de Coxeter paraboliques,
i.e. éléments de Coxeter d'un s.g.p. de W.

Stratification de $W\backslash V$ et éléments de Coxeter paraboliques

Stratification de V par les plats (**treillis d'intersection**) :
$\mathcal{L} := \{\bigcap_{H \in \mathcal{B}} H \mid \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}\}$.
Quotient par $W \rightsquigarrow$ stratification $\bar{\mathcal{L}} = W\backslash\mathcal{L} = (W \cdot L)_{L \in \mathcal{L}}$.
Pour $\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}$, $\Lambda^0 := \Lambda$ privée de ses strates intérieures.

Bijection [Steinberg] :
$\mathcal{L} \leftrightarrow \{\text{sous-groupes paraboliques de } W\} =: SGP(W)$.
$\rightsquigarrow$ bijections naturelles :

$$\begin{array}{ccccc} \bar{\mathcal{L}} & \leftrightarrow & SGP(W)/\text{conj.} & \leftrightarrow & \text{Cox-parab}(W)/\text{conj.} \\ \text{codim}(\Lambda) & \leftrightarrow & \text{rang}(W') & \leftrightarrow & \ell(c') \end{array}$$

Cox-parab(W) : éléments de Coxeter paraboliques,
i.e. éléments de Coxeter d'un s.g.p. de W.

Factorisations et LL

Proposition

*Soit $y \in Y$. Pour tout $x \in \mathrm{LL}(y)$, $c_{y,x}$ est un élément de Coxeter parabolique de W. Sa **longueur** est égale à la multiplicité de x dans $\mathrm{LL}(y)$; sa **classe de conjugaison** correspond à l'unique strate Λ de $\bar{\mathcal{L}}$ telle que $(y, x) \in \Lambda^0$.*

Factorisations et LL

Proposition

*Soit $y \in Y$. Pour tout $x \in \mathrm{LL}(y)$, $c_{y,x}$ est un élément de Coxeter parabolique de W. Sa **longueur** est égale à la multiplicité de x dans $\mathrm{LL}(y)$; sa **classe de conjugaison** correspond à l'unique strate Λ de $\bar{\mathcal{L}}$ telle que $(y, x) \in \Lambda^0$.*

Factorisation par blocs $\rightsquigarrow$ **composition** de n

$\omega \in E_n \rightsquigarrow$ **composition** de n (multiplicités dans l'ordre lex.)

Factorisations et LL

Proposition

*Soit $y \in Y$. Pour tout $x \in \mathrm{LL}(y)$, $c_{y,x}$ est un élément de Coxeter parabolique de W. Sa **longueur** est égale à la multiplicité de x dans $\mathrm{LL}(y)$; sa **classe de conjugaison** correspond à l'unique strate Λ de $\bar{\mathcal{L}}$ telle que $(y, x) \in \Lambda^0$.*

Factorisation par blocs $\rightsquigarrow$ **composition** de n

$\omega \in E_n \rightsquigarrow$ **composition** de n (multiplicités dans l'ordre lex.)

Prop. $\Rightarrow$ compatibilité de $\underline{\mathrm{fact}}(y)$ et $\mathrm{LL}(y)$ (même composition)

Factorisations et LL

Proposition

*Soit $y \in Y$. Pour tout $x \in \mathrm{LL}(y)$, $c_{y,x}$ est un élément de Coxeter parabolique de W. Sa **longueur** est égale à la multiplicité de x dans $\mathrm{LL}(y)$; sa **classe de conjugaison** correspond à l'unique strate Λ de $\bar{\mathcal{L}}$ telle que $(y, x) \in \Lambda^0$.*

Factorisation par blocs $\rightsquigarrow$ **composition** de n
$\omega \in E_n \rightsquigarrow$ **composition** de n (multiplicités dans l'ordre lex.)
Prop. $\Rightarrow$ compatibilité de $\underline{\mathrm{fact}}(y)$ et $\mathrm{LL}(y)$ (même composition)

Théorème (Bessis)

*L'application $Y \xrightarrow{\mathrm{LL} \times \underline{\mathrm{fact}}} E_n \times \mathrm{FACT}(c)$ est **injective**, et son image est l'ensemble des paires compatibles.*

Factorisations et LL

Proposition

Soit $y \in Y$. Pour tout $x \in \mathrm{LL}(y)$, $c_{y,x}$ est un élément de Coxeter parabolique de W. Sa ***longueur*** *est égale à la multiplicité de x dans $\mathrm{LL}(y)$; sa* ***classe de conjugaison*** *correspond à l'unique strate Λ de $\bar{\mathcal{L}}$ telle que $(y,x) \in \Lambda^0$.*

Factorisation par blocs $\rightsquigarrow$ **composition** de n

$\omega \in E_n \rightsquigarrow$ **composition** de n (multiplicités dans l'ordre lex.)

Prop. $\Rightarrow$ compatibilité de $\underline{\mathrm{fact}}(y)$ et $\mathrm{LL}(y)$ (même composition)

Théorème (Bessis)

L'application $Y \xrightarrow{\mathrm{LL} \times \underline{\mathrm{fact}}} E_n \times \mathrm{FACT}(c)$ est ***injective****, et son image est l'ensemble des paires compatibles.*

$\forall \omega \in E_n$, $\underline{\mathrm{fact}}$ induit $\mathrm{LL}^{-1}(\omega) \xrightarrow{\sim} \mathrm{FACT}_\mu(c)$, où $\mu = \mathrm{compo}(\omega)$.

Décompositions réduites de c

$$|\mathrm{Red}_{\mathcal{R}}(c)| \quad = \quad |\,\mathrm{FACT}_{\mu}(c)| \quad \text{pour } \mu = (1, \ldots, 1)$$

Décompositions réduites de c

$$
\begin{aligned}
|\operatorname{Red}_{\mathcal{R}}(c)| &= |\operatorname{FACT}_{\mu}(c)| \quad \text{pour } \mu = (1, \dots, 1) \\
&= |\operatorname{LL}^{-1}(\omega)| \quad \text{pour } \omega \in E_n^{\mathrm{reg}}
\end{aligned}
$$

Décompositions réduites de c

$$\begin{aligned} |\operatorname{Red}_{\mathcal{R}}(c)| &= |\operatorname{FACT}_{\mu}(c)| \quad \text{pour } \mu = (1, \ldots, 1) \\ &= |\operatorname{LL}^{-1}(\omega)| \quad \text{pour } \omega \in E_n^{\mathrm{reg}} \\ &= \deg(\operatorname{LL}) \\ &= \frac{n!\,h^n}{|W|} \end{aligned}$$

Décompositions réduites de c

$$
\begin{aligned}
|\operatorname{Red}_{\mathcal{R}}(c)| &= |\operatorname{FACT}_{\mu}(c)| \quad \text{pour } \mu = (1, \ldots, 1) \\
&= |\operatorname{LL}^{-1}(\omega)| \quad \text{pour } \omega \in E_n^{\mathrm{reg}} \\
&= \deg(\operatorname{LL}) \\
&= \frac{n!\, h^n}{|W|}
\end{aligned}
$$

Peut-on calculer de même $|\operatorname{FACT}_{n-1}(c)| = |\operatorname{FACT}_{2^1 1^{n-2}}(c)|$?

1. Nombres de Fuss-Catalan pour les groupes de réflexion
   - Groupes de réflexion complexes
   - Treillis des partitions non-croisées
   - Factorisations par blocs d'un élément de Coxeter
2. Géométrie du discriminant
   - Le revêtement de Lyashko-Looijenga
   - Factorisations géométriques et fibres de LL
   - **Combinatoire des factorisations sous-maximales**
3. Discriminants et Jacobiens de groupes de réflexion « virtuels »
   - Extensions polynomiales finies « bien ramifiées »
   - Extensions de Lyashko-Looijenga
4. Perspectives

Composantes irréductibles de $\mathcal{K}$

Partie ramifiée de LL : $\mathcal{K} \twoheadrightarrow E_n - E_n^{\mathrm{reg}}$.
$\mathcal{K} = \{y \in Y \mid D_{\mathrm{LL}}(y) = 0\}$.

Composantes irréductibles de $\mathcal{K}$

Partie ramifiée de LL : $\mathcal{K} \twoheadrightarrow E_n - E_n^{\mathrm{reg}}$.
$\mathcal{K} = \{y \in Y \mid D_{\mathrm{LL}}(y) = 0\}$.

$\bar{\mathcal{L}}_2 := \{\text{strates de } \bar{\mathcal{L}} \text{ de codimension } 2\}$

Composantes irréductibles de $\mathcal{K}$

Partie ramifiée de LL : $\mathcal{K} \twoheadrightarrow E_n - E_n^{\mathrm{reg}}$.
$\mathcal{K} = \{y \in Y \mid D_{\mathrm{LL}}(y) = 0\}$.

$\bar{\mathcal{L}}_2 := \{$strates de $\bar{\mathcal{L}}$ de codimension 2$\}$

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & W\backslash V \simeq Y \times \mathbb{C} & \to & Y \\ & \bar{v} = (y, x) & \mapsto & y \end{array}$$

Composantes irréductibles de $\mathcal{K}$

Partie ramifiée de LL : $\mathcal{K} \twoheadrightarrow E_n - E_n^{\mathrm{reg}}$.
$\mathcal{K} = \{y \in Y \mid D_{\mathrm{LL}}(y) = 0\}$.

$\bar{\mathcal{L}}_2 := \{\text{strates de } \bar{\mathcal{L}} \text{ de codimension } 2\}$

$$\varphi : \begin{array}{ccc} W\backslash V \simeq Y \times \mathbb{C} & \to & Y \\ \bar{v} = (y, x) & \mapsto & y \end{array}$$

Proposition

Les composantes irréductibles de $\mathcal{K}$ sont les $\varphi(\Lambda)$, pour $\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2$.

Restriction de LL à une composante de $\mathcal{K}$

On écrit $D = \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda}$, avec D_Λ irréductibles de $\mathbb{C}[f_1, \ldots, f_{n-1}]$ tels que $\varphi(\Lambda) = \{D_\Lambda = 0\}$.

Restriction de LL à une composante de $\mathcal{K}$

On écrit $D = \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda}$, avec D_Λ irréductibles de $\mathbb{C}[f_1, \ldots, f_{n-1}]$ tels que $\varphi(\Lambda) = \{D_\Lambda = 0\}$.
On définit la restriction

$$\mathrm{LL}_\Lambda : \varphi(\Lambda) \to E_n - E_n^{\mathrm{reg}} .$$

Restriction de LL à une composante de $\mathcal{K}$

On écrit $D = \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda}$, avec D_Λ irréductibles de $\mathbb{C}[f_1, \dots, f_{n-1}]$ tels que $\varphi(\Lambda) = \{D_\Lambda = 0\}$.
On définit la restriction

$$\mathrm{LL}_\Lambda : \varphi(\Lambda) \to E_n - E_n^{\mathrm{reg}} \ .$$

LL_Λ correspond à l'extension

$$\mathbb{C}[a_2, \dots, a_n]/(D) \subseteq \mathbb{C}[f_1, \dots, f_{n-1}]/(D_\Lambda) \ .$$

Restriction de LL à une composante de $\mathcal{K}$

On écrit $D = \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda}$, avec D_Λ irréductibles de $\mathbb{C}[f_1, \ldots, f_{n-1}]$ tels que $\varphi(\Lambda) = \{D_\Lambda = 0\}$.
On définit la restriction

$$\mathrm{LL}_\Lambda : \varphi(\Lambda) \to E_n - E_n^{\mathrm{reg}} \ .$$

LL_Λ correspond à l'extension

$$\mathbb{C}[a_2, \ldots, a_n]/(D) \subseteq \mathbb{C}[f_1, \ldots, f_{n-1}]/(D_\Lambda) \ .$$

$$\frac{\prod \deg(a_i)}{\deg(D)} \Big/ \frac{\prod \deg(f_j)}{\deg(D_\Lambda)} = \frac{(n-2)!h^{n-2}}{|W|} \deg D_\Lambda$$

Factorisations « de type Λ »

Théorème (R.)

Pour toute strate Λ de $\bar{\mathcal{L}}_2$:

- LL_Λ *est un morphisme fini de degré* $\frac{(n-2)!\ h^{n-1}}{|W|} \deg D_\Lambda$;

Factorisations « de type Λ »

Théorème (R.)

Pour toute strate Λ *de* $\bar{\mathcal{L}}_2$ *:*

- LL_Λ *est un morphisme fini de* degré $\frac{(n-2)!\ h^{n-1}}{|W|} \deg D_\Lambda$;
- *le nombre de factorisations de* c *en* $n-2$ *réflexions + un élément de longueur* 2 *et de classe de conjugaison correspondant à* Λ *(dans un ordre quelconque) est :*

$$|\operatorname{FACT}^{\Lambda}_{n-1}(c)| = \frac{(n-1)!\ h^{n-1}}{|W|} \deg D_\Lambda \ .$$

Calculer $\sum \deg(D_\Lambda)$?

Corollaire

$|\,\mathrm{FACT}_{n-1}(c)|$ *s'exprime en fonction de* $\sum_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} \deg(D_\Lambda)$.

Comment calculer ceci **de manière uniforme** (sans cas-par-cas) ?

Calculer $\sum \deg(D_\Lambda)$?

Corollaire

$|\,\mathrm{FACT}_{n-1}(c)|$ *s'exprime en fonction de* $\sum_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} \deg(D_\Lambda)$.

Comment calculer ceci **de manière uniforme** (sans cas-par-cas) ?

$D_{\mathrm{LL}} = \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda}$

Calculer $\sum \deg(D_\Lambda)$?

Corollaire

$|\mathrm{FACT}_{n-1}(c)|$ *s'exprime en fonction de* $\sum_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} \deg(D_\Lambda)$.

Comment calculer ceci **de manière uniforme** (sans cas-par-cas) ?

$D_{\mathrm{LL}} = \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda}$

Soit $J_{\mathrm{LL}} = \mathrm{Jac}((a_2, \ldots, a_n)/(f_1, \ldots, f_{n-1}))$.

Calculer $\sum \deg(D_\Lambda)$?

Corollaire

$|\mathrm{FACT}_{n-1}(c)|$ *s'exprime en fonction de* $\sum_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} \deg(D_\Lambda)$.

Comment calculer ceci **de manière uniforme** (sans cas-par-cas) ?

$D_{\mathrm{LL}} = \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda}$

Soit $J_{\mathrm{LL}} = \mathrm{Jac}((a_2, \ldots, a_n)/(f_1, \ldots, f_{n-1}))$.

Expérimentalement (et déjà observé par K. Saito pour les cas réels)

$$J_{\mathrm{LL}} \stackrel{?}{=} \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda - 1}$$

Calculer $\sum \deg(D_\Lambda)$?

Corollaire

$|\mathrm{FACT}_{n-1}(c)|$ *s'exprime en fonction de* $\sum_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} \deg(D_\Lambda)$.

Comment calculer ceci **de manière uniforme** (sans cas-par-cas) ?

$$D_{\mathrm{LL}} = \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda} \qquad\qquad J_{\mathrm{LL}} \stackrel{?}{=} \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda - 1}$$

Calculer $\sum \deg(D_\Lambda)$?

Corollaire

$|\mathrm{FACT}_{n-1}(c)|$ *s'exprime en fonction de* $\sum_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} \deg(D_\Lambda)$.

Comment calculer ceci **de manière uniforme** (sans cas-par-cas) ?

$$D_{\mathrm{LL}} = \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda} \qquad J_{\mathrm{LL}} \overset{?}{=} \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda - 1}$$

$$\Delta_W = \prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H^{e_H} \qquad J_W = \prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H^{e_H - 1}$$

Calculer $\sum \deg(D_\Lambda)$?

Corollaire

$|\mathrm{FACT}_{n-1}(c)|$ *s'exprime en fonction de* $\sum_{\Lambda\in\bar{\mathcal{L}}_2} \deg(D_\Lambda)$.

Comment calculer ceci **de manière uniforme** (sans cas-par-cas) ?

$$D_{\mathrm{LL}} = \prod_{\Lambda\in\bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda} \qquad J_{\mathrm{LL}} \stackrel{?}{=} \prod_{\Lambda\in\bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda - 1}$$

?

$$\Delta_W = \prod_{H\in\mathcal{A}} \alpha_H^{e_H} \qquad J_W = \prod_{H\in\mathcal{A}} \alpha_H^{e_H - 1}$$

Extension finie graduée d'anneaux de polynômes

$$A = \mathbb{C}[f_1, \ldots, f_n] \subseteq \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n] = B .$$

Extension finie graduée d'anneaux de polynômes

$A = \mathbb{C}[f_1, \ldots, f_n] \subseteq \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n] = B$.

On suppose :

- $f_1, \ldots, f_n$ homogènes ;

Extension finie graduée d'anneaux de polynômes

$A = \mathbb{C}[f_1, \ldots, f_n] \subseteq \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n] = B$.
On suppose :

- $f_1, \ldots, f_n$ homogènes ;
- $A \subseteq B$ est une extension finie d'anneaux.

Extension finie graduée d'anneaux de polynômes

$A = \mathbb{C}[f_1, \ldots, f_n] \subseteq \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n] = B$.
On suppose :

- $f_1, \ldots, f_n$ homogènes ;
- $A \subseteq B$ est une extension finie d'anneaux.

Extension finie graduée d'anneaux de polynômes

$A = \mathbb{C}[f_1, \ldots, f_n] \subseteq \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n] = B$.
On suppose :

- $f_1, \ldots, f_n$ homogènes ;
- $A \subseteq B$ est une extension finie d'anneaux.

Théorème

Si $A \subseteq B$ est une telle extension, alors :

$$J_{B/A} = \mathrm{Jac}((f_1, \ldots, f_n)/(X_1, \ldots, X_n)) \doteq \prod_{Q \in \mathrm{Spec}_1^{\mathrm{ram}}(B)} Q^{e_Q - 1}.$$

Extension « bien ramifiée »

On pose $U = \operatorname{Spec} A$ et $V = \operatorname{Spec} B$
$\rightsquigarrow$ l'extension $A \subseteq B$ correspond à $f : V \twoheadrightarrow U$.

Extension « bien ramifiée »

On pose $U = \operatorname{Spec} A$ et $V = \operatorname{Spec} B$
$\rightsquigarrow$ l'extension $A \subseteq B$ correspond à $f : V \twoheadrightarrow U$.
Lieu de ramification : $V_{\text{ram}} := Z(J) = \bigcup_{Q \in \operatorname{Spec}_1^{\mathrm{ram}}(B)} Z(Q)$

Extension « bien ramifiée »

On pose $U = \operatorname{Spec} A$ et $V = \operatorname{Spec} B$
$\rightsquigarrow$ l'extension $A \subseteq B$ correspond à $f : V \twoheadrightarrow U$.
Lieu de ramification : $V_{\mathrm{ram}} := Z(J) = \bigcup_{Q \in \operatorname{Spec}_1^{\mathrm{ram}}(B)} Z(Q)$
Lieu de branchement : $U_{\mathrm{br}} := \left\{ u \in U \, , \, \left| f^{-1}(u) \right| < \deg(f) \right\}$

Extension « bien ramifiée »

On pose $U = \operatorname{Spec} A$ et $V = \operatorname{Spec} B$
$\rightsquigarrow$ l'extension $A \subseteq B$ correspond à $f : V \twoheadrightarrow U$.
Lieu de ramification : $V_{\text{ram}} := Z(J) = \bigcup_{Q \in \operatorname{Spec}_1^{\mathrm{ram}}(B)} Z(Q)$
Lieu de branchement : $U_{\text{br}} := \left\{ u \in U \, , \, \left| f^{-1}(u) \right| < \deg(f) \right\}$
On a toujours : $f(V_{\text{ram}}) = U_{\text{br}}$.

Extension « bien ramifiée »

On pose $U = \operatorname{Spec} A$ et $V = \operatorname{Spec} B$
$\rightsquigarrow$ l'extension $A \subseteq B$ correspond à $f : V \twoheadrightarrow U$.
Lieu de ramification : $V_{\text{ram}} := Z(J) = \bigcup_{Q \in \operatorname{Spec}_1^{\text{ram}}(B)} Z(Q)$
Lieu de branchement : $U_{\text{br}} := \left\{ u \in U \,,\, \left| f^{-1}(u) \right| < \deg(f) \right\}$
On a toujours : $f(V_{\text{ram}}) = U_{\text{br}}$.

Définition (Extension bien ramifiée)

On dit que l'extension $A \subseteq B$ est bien ramifiée si $V_{\text{ram}} = f^{-1}(U_{\text{br}})$.

$\Leftrightarrow$ s'il existe Q_0 ramifié au-dessus de $P \in \operatorname{Spec}_1(A)$, alors tout autre $Q \in \operatorname{Spec}_1(B)$ au-dessus de P est aussi ramifié.

Ex. : toute extension galoisienne est bien ramifiée.

Groupe de réflexion virtuel

Corollaire

Soit $A \subseteq B$ une extension polynomiale finie graduée, et ***bien ramifiée****, correspondant à un morphisme* $f : V \to U$*. Alors :*

Groupe de réflexion virtuel

Corollaire

Soit $A \subseteq B$ une extension polynomiale finie graduée, et ***bien ramifiée****, correspondant à un morphisme $f : V \to U$. Alors :*

- *le lieu de ramification V_{ram} a pour équation* $J \doteq \prod_{Q \in \mathrm{Spec}_1^{\mathrm{ram}}(B)} Q^{e_Q - 1}$ *(****Jacobien****) ;*

Groupe de réflexion virtuel

Corollaire

Soit $A \subseteq B$ une extension polynomiale finie graduée, et ***bien ramifiée****, correspondant à un morphisme $f : V \to U$. Alors :*

- *le lieu de ramification V_{ram} a pour équation* $J \doteq \prod_{Q \in \mathrm{Spec}_1^{\mathrm{ram}}(B)} Q^{e_Q - 1}$ *(**Jacobien**) ;*
- *le lieu de branchement U_{br} a pour équation* $D := \prod_{Q \in \mathrm{Spec}_1^{\mathrm{ram}}(B)} Q^{e_Q}$ *(« **discriminant** » **?**).*

Groupe de réflexion virtuel

Corollaire

Soit $A \subseteq B$ une extension polynomiale finie graduée, et ***bien ramifiée****, correspondant à un morphisme $f : V \to U$. Alors :*

- *le lieu de ramification V_{ram} a pour équation* $J \doteq \prod_{Q \in \mathrm{Spec}_1^{\mathrm{ram}}(B)} Q^{e_Q - 1}$ *(**Jacobien**) ;*
- *le lieu de branchement U_{br} a pour équation* $D := \prod_{Q \in \mathrm{Spec}_1^{\mathrm{ram}}(B)} Q^{e_Q}$ *(« **discriminant** » **?**).*

$\rightsquigarrow$ ressemble à une extension galoisienne ($A = B^W$ avec W groupe de réflexion).

Groupe de réflexion virtuel

Corollaire

Soit $A \subseteq B$ une extension polynomiale finie graduée, et ***bien ramifiée****, correspondant à un morphisme $f : V \to U$. Alors :*

- *le lieu de ramification V_{ram} a pour équation* $J \doteq \prod_{Q \in \mathrm{Spec}_1^{\mathrm{ram}}(B)} Q^{e_Q - 1}$ *(**Jacobien**) ;*
- *le lieu de branchement U_{br} a pour équation* $D := \prod_{Q \in \mathrm{Spec}_1^{\mathrm{ram}}(B)} Q^{e_Q}$ *(« **discriminant** » **?**).*

$\rightsquigarrow$ ressemble à une extension galoisienne ($A = B^W$ avec W groupe de réflexion).

$\rightsquigarrow$ possible définition de « groupe de réflexion virtuel » ?

1. Nombres de Fuss-Catalan pour les groupes de réflexion
   - Groupes de réflexion complexes
   - Treillis des partitions non-croisées
   - Factorisations par blocs d'un élément de Coxeter
2. Géométrie du discriminant
   - Le revêtement de Lyashko-Looijenga
   - Factorisations géométriques et fibres de LL
   - Combinatoire des factorisations sous-maximales
3. Discriminants et Jacobiens de groupes de réflexion « virtuels »
   - Extensions polynomiales finies « bien ramifiées »
   - Extensions de Lyashko-Looijenga
4. Perspectives

Retour à LL

Rappel : $D_{\mathrm{LL}} = \mathrm{Disc}(\Delta_W(y, f_n); f_n) = \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda}$.

Retour à LL

Rappel : $D_{\mathrm{LL}} = \mathrm{Disc}(\Delta_W(y, f_n); f_n) = \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda}$.

Théorème (R.)

- *Les* $(D_\Lambda)_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2}$ *sont les polynômes ramifiés de l'extension* LL, *et* $r_\Lambda = e_{D_\Lambda}$.

Retour à LL

Rappel : $D_{\mathrm{LL}} = \mathrm{Disc}(\Delta_W(y, f_n); f_n) = \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda}$.

Théorème (R.)

- *Les* $(D_\Lambda)_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2}$ *sont les polynômes ramifiés de l'extension* LL, *et* $r_\Lambda = e_{D_\Lambda}$.
- *Pour* $\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2$, *soit* $w \in \text{Cox-parab}(W)$ *(de longueur* 2*), de classe de conjugaison correspondant à* Λ *; alors* $r_\Lambda = |\mathrm{Red}_{\mathcal{R}}(w)|$ *(= ordre de* w *si* W *est un groupe de* 2*-réflexions).*

Retour à LL

Rappel : $D_{\mathrm{LL}} = \mathrm{Disc}(\Delta_W(y, f_n); f_n) = \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda}$.

Théorème (R.)

- *Les* $(D_\Lambda)_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2}$ *sont les polynômes ramifiés de l'extension* LL, *et* $r_\Lambda = e_{D_\Lambda}$.
- *Pour* $\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2$*, soit* $w \in \text{Cox-parab}(W)$ *(de longueur* 2*), de classe de conjugaison correspondant à* Λ *; alors* $r_\Lambda = |\mathrm{Red}_{\mathcal{R}}(w)|$ *(= ordre de* w *si* W *est un groupe de* 2*-réflexions).*
- LL *est une extension bien ramifiée.*

Retour à LL

Rappel : $D_{\mathrm{LL}} = \mathrm{Disc}(\Delta_W(y, f_n); f_n) = \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda}$.

Théorème (R.)

- *Les* $(D_\Lambda)_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2}$ *sont les polynômes ramifiés de l'extension* LL, *et* $r_\Lambda = e_{D_\Lambda}$.
- *Pour* $\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2$, *soit* $w \in$ Cox-parab(W) *(de longueur* 2*), de classe de conjugaison correspondant à* Λ *; alors* $r_\Lambda = |\mathrm{Red}_{\mathcal{R}}(w)|$ *(= ordre de* w *si* W *est un groupe de* 2*-réflexions).*
- LL *est une extension bien ramifiée.*
- $J_{\mathrm{LL}} \doteq \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda - 1}$.

Retour à LL

Rappel : $D_{\mathrm{LL}} = \mathrm{Disc}(\Delta_W(y, f_n); f_n) = \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda}$.

Théorème (R.)

- *Les* $(D_\Lambda)_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2}$ *sont les polynômes ramifiés de l'extension* LL*, et* $r_\Lambda = e_{D_\Lambda}$.
- *Pour* $\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2$*, soit* $w \in \text{Cox-parab}(W)$ *(de longueur* 2*), de classe de conjugaison correspondant à* Λ *; alors* $r_\Lambda = |\mathrm{Red}_{\mathcal{R}}(w)|$ *(= ordre de* w *si* W *est un groupe de* 2*-réflexions).*
- LL *est une extension bien ramifiée.*
- $J_{\mathrm{LL}} \doteq \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda - 1}$.

Retour à LL

Rappel : $D_{\mathrm{LL}} = \mathrm{Disc}(\Delta_W(y, f_n); f_n) = \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda}$.

Théorème (R.)

- *Les* $(D_\Lambda)_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2}$ *sont les polynômes ramifiés de l'extension* LL, *et* $r_\Lambda = e_{D_\Lambda}$.
- *Pour* $\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2$, *soit* $w \in \mathrm{Cox\text{-}parab}(W)$ *(de longueur 2), de classe de conjugaison correspondant à* Λ *; alors* $r_\Lambda = |\mathrm{Red}_{\mathcal{R}}(w)|$ *(= ordre de* w *si* W *est un groupe de 2-réflexions).*
- LL *est une extension bien ramifiée.*
- $J_{\mathrm{LL}} \doteq \prod_{\Lambda \in \bar{\mathcal{L}}_2} D_\Lambda^{r_\Lambda - 1}$.

Ingrédients de la preuve : interprétation combinatoire de la ramification, propriétés de LL topologiques (revêtement) et combinatoires (fact), cadre général vu plus haut.

Enfin une formule explicite pour $|\operatorname{FACT}_{n-1}(c)|$

Corollaire

*Soit W un groupe de réflexion complexe irréductible bien engendré, de rang n. Le nombre de **factorisations d'un élément de Coxeter** c **en** $n-1$ **blocs** est :*

Enfin une formule explicite pour $|\,\mathrm{FACT}_{n-1}(c)|$

Corollaire

*Soit W un groupe de réflexion complexe irréductible bien engendré, de rang n. Le nombre de **factorisations d'un élément de Coxeter** c **en** $n-1$ **blocs** est :*

$$|\,\mathrm{FACT}_{n-1}(c)| = \frac{(n-1)!\ h^{n-1}}{|W|}\left(\frac{(n-1)(n-2)}{2}h + \sum_{i=1}^{n-1} d_i\right).$$

Enfin une formule explicite pour $|\,\mathrm{FACT}_{n-1}(c)|$

Corollaire

Soit W un groupe de réflexion complexe irréductible bien engendré, de rang n. Le nombre de ***factorisations d'un élément de Coxeter*** *c* ***en*** *$n-1$* ***blocs*** *est :*

$$|\,\mathrm{FACT}_{n-1}(c)| = \frac{(n-1)!\ h^{n-1}}{|W|}\left(\frac{(n-1)(n-2)}{2}h + \sum_{i=1}^{n-1} d_i\right).$$

Preuve : calcul de $\deg(D) - \deg(J)$.

Enfin une formule explicite pour $|\operatorname{FACT}_{n-1}(c)|$

Corollaire

Soit W un groupe de réflexion complexe irréductible bien engendré, de rang n. Le nombre de ***factorisations d'un élément de Coxeter** c **en** $n-1$ **blocs** est :*

$$|\operatorname{FACT}_{n-1}(c)| = \frac{(n-1)!\ h^{n-1}}{|W|}\left(\frac{(n-1)(n-2)}{2}h + \sum_{i=1}^{n-1} d_i\right).$$

Preuve : calcul de $\deg(D) - \deg(J)$.

C'est bien le résultat prédit par la formule de Chapoton.

Conclusion, perspectives

- Formules combinatoires plus fines (fonction de la classe de conjugaison du facteur de longueur 2) ; (nouveaux ?) invariants des groupes de réflexion (les $\deg(D_\Lambda)$).

Conclusion, perspectives

- Formules combinatoires plus fines (fonction de la classe de conjugaison du facteur de longueur 2) ; (nouveaux ?) invariants des groupes de réflexion (les $\deg(D_\Lambda)$).
- On retrouve de façon géométrique des résultats combinatoires connus dans le cas réel (Krattenthaler).

Conclusion, perspectives

- Formules combinatoires plus fines (fonction de la classe de conjugaison du facteur de longueur 2) ; (nouveaux ?) invariants des groupes de réflexion (les $\deg(D_\Lambda)$).
- On retrouve de façon géométrique des résultats combinatoires connus dans le cas réel (Krattenthaler).
- Pas de nouveaux « cas-par-cas » dans la preuve ; mais on utilise les résultats du cas non ramifié ($|\operatorname{Red}_{\mathcal{R}}(c)|$).

Conclusion, perspectives

- Formules combinatoires plus fines (fonction de la classe de conjugaison du facteur de longueur 2) ; (nouveaux ?) invariants des groupes de réflexion (les $\deg(D_\Lambda)$).
- On retrouve de façon géométrique des résultats combinatoires connus dans le cas réel (Krattenthaler).
- Pas de nouveaux « cas-par-cas » dans la preuve ; mais on utilise les résultats du cas non ramifié ($|\operatorname{Red}_{\mathcal{R}}(c)|$).
- Peut-on aller plus loin (calcul de $|\mathrm{FACT}_k(c)|$) ? Problème de complexité des formules. Faut-il voir la formule de Chapoton comme une formule de ramification de LL ?

Conclusion, perspectives

- Formules combinatoires plus fines (fonction de la classe de conjugaison du facteur de longueur 2) ; (nouveaux ?) invariants des groupes de réflexion (les $\deg(D_\Lambda)$).
- On retrouve de façon géométrique des résultats combinatoires connus dans le cas réel (Krattenthaler).
- Pas de nouveaux « cas-par-cas » dans la preuve ; mais on utilise les résultats du cas non ramifié ($|\operatorname{Red}_{\mathcal{R}}(c)|$).
- Peut-on aller plus loin (calcul de $|\mathrm{FACT}_k(c)|$) ? Problème de complexité des formules. Faut-il voir la formule de Chapoton comme une formule de ramification de LL ?
- Qu'est-ce qu'un groupe de réflexion virtuel ?

Conclusion, perspectives

- Formules combinatoires plus fines (fonction de la classe de conjugaison du facteur de longueur 2) ; (nouveaux ?) invariants des groupes de réflexion (les $\deg(D_\Lambda)$).
- On retrouve de façon géométrique des résultats combinatoires connus dans le cas réel (Krattenthaler).
- Pas de nouveaux « cas-par-cas » dans la preuve ; mais on utilise les résultats du cas non ramifié ($|\operatorname{Red}_{\mathcal{R}}(c)|$).
- Peut-on aller plus loin (calcul de $|\mathrm{FACT}_k(c)|$) ? Problème de complexité des formules. Faut-il voir la formule de Chapoton comme une formule de ramification de LL ?
- Qu'est-ce qu'un groupe de réflexion virtuel ?

Conclusion, perspectives

- Formules combinatoires plus fines (fonction de la classe de conjugaison du facteur de longueur 2) ; (nouveaux ?) invariants des groupes de réflexion (les $\deg(D_\Lambda)$).
- On retrouve de façon géométrique des résultats combinatoires connus dans le cas réel (Krattenthaler).
- Pas de nouveaux « cas-par-cas » dans la preuve ; mais on utilise les résultats du cas non ramifié ($|\operatorname{Red}_{\mathcal{R}}(c)|$).
- Peut-on aller plus loin (calcul de $|\mathrm{FACT}_k(c)|$) ? Problème de complexité des formules. Faut-il voir la formule de Chapoton comme une formule de ramification de LL ?
- Qu'est-ce qu'un groupe de réflexion virtuel ?

Merci !