**Université Paris 7** — **Premier semestre 2007-2008**
**Licence 1ère année** — **MK1 - Maple**

# Exercices sur les fonctions

---

**Exercice 1.** On considère le polynôme $P = z^{10} + z^2 + 1$ et ses racines complexes. Donner les commandes Maple qui permettent d'afficher la liste des valeurs approchées des modules de ces racines. Même question avec la liste des valeurs approchées des arguments.

**Exercice 2.** Ecrire une procédure qui prend en entrée un polynôme $P$ de degré 2 et qui affiche en sortie ses racines réelles éventuelles.

*Instructions à suivre :* la procédure devra vérifier que $P$ est de degré 2 et afficher un message d'erreur le cas échéant. Elle devra traiter tous les cas et ne devra pas utiliser les commandes de résolution d'équation comme *solve*, *fsolve*, ...

*Commandes utiles :* $degree(P, X)$ donne le degré en $X$ de $P$
$coeff(P, X, k)$ donne le coefficient de $X^k$ dans $P$

**Exercice 3. Approximation d'intégrale**

Soit $f$ une fonction continue positive de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Le but de l'exercice est d'approcher l'intégrale $J = \int_a^b f(x)dx$ par deux méthodes classiques.

1) **Méthode des rectangles**

On découpe $[a, b]$ en $n$ intervalles égaux. On approche l'intégrale de $f$ sur chacun de ces intervalles par l'aire du rectangle ayant pour base cet intervalle et pour hauteur la valeur de $f$ en l'extrémité gauche de l'intervalle.

(a) En vous aidant d'un dessin, exprimer l'aire totale $Jrect(f, a, b, n)$ calculée ainsi entre $a$ et $b$, en fonction de $f, a, b$ et $n$.

(b) Dans Maple, écrire une fonction ou une procédure *rectangle*, qui prend en entrée $f, a, b$ et $n$ et calcule $Jrect(f, a, b, n)$. On utilisera la commande *sum* plutôt que *add*.

Pour les trois questions suivantes, on prendra $f(x) = x^2 \ln(x+1)$, $a = 0$, $b = 5$.

(c) Tester *rectangle* sur cet exemple en prenant différentes valeurs pour $n$. Comparer les valeurs approchées de vos résultats à ceux de la commande Maple qui calcule la méthode des rectangles : commande *leftsum* de la librairie *student*.

(d) Vérifier que
$$\lim_{n\to\infty} Jrect(f, a, b, n) = J.$$

(e) Expliquer pourquoi il existe un entier $m$ tel que :
$$|J - Jrect(f, a, b, m)| \leq 0.3$$

A l'aide d'une boucle *while*, trouver le plus petit entier $m$ vérifiant cette propriété.

2) **Méthode des trapèzes**

On découpe $[a, b]$ en $n$ intervalles égaux. On approche l'intégrale de $f$ sur chacun de ces intervalles par l'aire du trapèze ayant pour sommets les extrémités de l'intervalle et les images par $f$ de ces extrémités.

(a) En vous aidant d'un dessin, exprimer l'aire totale $Jtrap(f, a, b, n)$ calculée ainsi entre $a$ et $b$, en fonction de $f, a, b$ et $n$. On rappelle que l'aire d'un trapèze de bases $B_1, B_2$ et de hauteur $h$ est donnée par $(B_1 + B_2)h/2$.

(b) Dans Maple, écrire une fonction ou une procédure *trapeze*, qui prend en entrée $f, a, b$ et $n$ et calcule $Jtrap(f, a, b, n)$. On utilisera la commande *sum* plutôt que *add*.

Pour les trois questions suivantes, on prendra $f(x) = x^2 \ln(x+1)$, $a = 0$, $b = 5$.

(c) Tester *trapeze* sur cet exemple en prenant différentes valeurs pour $n$. Comparer les valeurs approchées de vos résultats à ceux de la commande Maple qui calcule la méthode des trapèzes : commande *trapezoid* de la librairie *student*.

(d) Vérifier que

$$\lim_{n\to\infty} Jtrap(f, a, b, n) = J.$$

(e) Expliquer pourquoi il existe un entier $p$ tel que :

$$|J - Jtrap(f, a, b, p)| \leq 0.3$$

A l'aide d'une boucle *while*, trouver le plus petit entier $p$ vérifiant cette propriété. Comparer ce résultat à celui obtenu à la question 1.e . Qu'en pensez-vous ?