"Calcul formel" Maple
L1/MK1 2007-2008

Approximation des zéros d'une fonction

Dans les 3 exercices de cette feuille, on va chercher des solutions approchées d'une équation de la forme $f(x) = 0$. On se placera sur un intervalle $[a, b]$ et on supposera que f est une fonction continue sur cet intervalle et s'annule une seule fois en changeant de signe. On notera x_0 le point d'annulation (ie $f(x_0) = 0$). On ne connaît pas la valeur de x_0, et, sans utiliser *fsolve*, on veut trouver une façon d'en déterminer une valeur approchée.

Exercice 1 (Méthode de la sécante)
Pour la méthode de la sécante, on procède par dichotomie: soit c_1 le milieu du segment $[a, b]$, on remplace $[a, b]$ par $[a, c_1]$ si $[a, c_1]$ contient x_0 et par $[c_1, b]$ sinon (comment le savoir sans connaître la valeur de x_0 ? penser au théorème des valeurs intermédiaires...). Et on recommence cette opération (c'est-à-dire, on prend c_2 le milieu de $[a, c_1]$ (resp. de $[c_1, b]$) si $[a, c_1]$ (resp. $[c_1, b]$) contient x_0)...

1. (sans Maple) Faire un dessin comprenant une fonction f et des points a et b satisfaisant les conditions de l'énoncé. On placera également c_1, c_2 et c_3.

2. Ecrire une procédure **dichotomie** qui prend en entrée une fonction, les points a et b et le nombre n et qui renvoie la n-ième valeur de c. (i.e. c_n)

   - On utilisera un test pour savoir si $x_0 \in [a, c]$ ou $x_0 \in [c, b]$.
   - On pourra écrire la fonction de manière récursive.

3. Tester la procédure avec la fonction $f(x) = x^2 - 3$, en partant de l'intervalle $[1, 4]$ et avec 20 itérations. [Remarque: on pourra écrire **a:=1.0;** et non pas **a:=1;**, pour forcer Maple à faire les calculs en valeurs approchées (type *float*, flottant) et non pas en valeurs exactes.]

   Quelle précision obtient-on?

Exercice 2 (Méthode de Regula-Falsi)
La méthode de Regula-Falsi (fausse-position) consiste à choisir pour point c non le milieu de $[a, b]$, mais le point tel que:

$$\frac{f(a)}{a-c} = \frac{f(b)}{b-c}$$

$$\text{c'est-à-dire } c = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a)$$

1. Que représente géométriquement le point c? (interpréter en terme de coefficient directeur)

2. (sans Maple) Faire un dessin comprenant une fonction f et des points a et b satisfaisant les conditions de l'énoncé. On placera également c_1, c_2 et c_3.

3. Adapter la procédure **dichotomie** pour écrire une procédure **regula** qui prend en entrée une fonction f, les points a et b, et le nombre d'itérations n et qui renvoie la n-ième valeur de c.

4. Tester la procédure **regula** avec la fonction $f(x) = x^2 - 3$, en partant de l'intervalle $[1, 4]$ et avec 20 itérations.

   Quelle précision obtient-on? Commentaires ?

Exercice 3 (Méthode de la tangente ou méthode de Newton)
Pour cette question, on suppose de plus que f est dérivable sur $[a, b]$.
On part du point $c_0 = a$ et on définit alors par récurrence, pour tout $n \geq 0$:

$$c_{n+1} = c_n - \frac{f(c_n)}{f'(c_n)}$$

1. Que représente géométriquement le point c_1?

2. (sans Maple) Faire un dessin comprenant une fonction f et des points a et b satisfaisant les conditions de l'énoncé. On placera également c_1, c_2 et c_3.

3. Ecrire une procédure **newton** qui prend en entrée une fonction f, le point a et le nombre d'itérations n et qui renvoie la valeur de c_n.

4. Tester la procédure **newton** avec la fonction $f(x) = x^2 - 3$, en partant de $a = 1$ et avec juste 10 itérations.

   Quelle précision obtient-on? Commentaires ?