"Calcul formel" Maple
L1/MK1 2007-2008

9 janvier 2008
durée : 1h55min

Examen

Nom, prénom :	Groupe :

Les réponses aux exercices 1 et 4 sont à écrire directement sur cette feuille. Pour le reste, vous répondrez sur une copie personnelle. Vous devez obligatoirement rendre une copie contenant la feuille d'examen, avec votre nom sur chaque feuille.

On ne rendra pas d'impression de la feuille de travail. Sauf mention du contraire, dans chaque question on demande une (ou plusieurs) ligne(s) de commande Maple (même si ce n'est pas indiqué explicitement). Il est évidemment indispensable de tester ces commandes sur l'ordinateur, mais vous n'avez pas besoin de recopier le résultat affiché par Maple en réponse à la commande tapée (en particulier lorsque ce résultat est très volumineux).

L'utilisation de l'**aide** de Maple est très fortement conseillée : les noms des commandes non habituelles vous sont donnés.

Aucun document n'est autorisé. Les portables et autres matériels électroniques doivent être éteints.
Le barême est donné à titre indicatif.

Une attention particulière sera apportée à la syntaxe de Maple et à la rédaction !

Exercice 1 (Échauffement (2,5 pts))

1. Soit
$$f(x) = \frac{\sin(x)^{\sin(|x|)} - 1}{\tan(x)^{\tan(x)} - 1}$$
Calculer la limite de f en 0, à gauche.

2. Trouver un développement limité (ou de Taylor) de $(\exp(t) + t)^{\frac{1}{t}}$, en 0, à l'ordre (mathématique) 5.

3. Soit $z = 2e^{2i\pi/5}$. Donner la commande Maple permettant d'écrire z sous forme cartésienne. Calculer l'argument de $z + 1$.

Exercice 2 (Algèbre linéaire (4,5 pts))

1. Charger la bibliothèque habituelle d'algèbre linéaire.

2. On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$$

   (a) Calculer l'inverse de A.

   (b) Donner la liste des puissances k-ièmes de A pour k variant de 0 à 4.

3. Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ \quad\quad\ y - z = 0 \\ x + 5y + z = 0 \end{cases}$$

   (a) Le résoudre en utilisant la commande *solve*.

   (b) Le résoudre en utilisant la commande *linsolve*.

   (c) Que peut-on en déduire pour la famille de vecteurs

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ? (expliquez)}$$

Exercice 3 (Programmation (5 pts))

1. Écrire une procédure qui prend en entrée un nombre complexe z et renvoie une liste à deux éléments, formée de sa partie réelle et de sa partie imaginaire.

2. Quelques erreurs se sont glissées dans le programme ci-dessous. Recopiez-le en corrigeant toutes les erreurs de syntaxe, et expliquez l'effet que doit avoir la procédure quand on lui donne en entrée une matrice.

```
> with(Linalg):
> machin:=proc(M);
  A=copy(M):a:=rowdim(A):b:=coldim(A):
  if a:=b then
     do for i from 1 to a
       A[i;i]:=A[i;i]^2;
  else
     return for k from 1 to b
       A[a;k]:=A[a;k]/3;
     end do;
  return evalf(A);
  end;
```

3. À l'aide d'une boucle *while*, trouver le plus petit entier $n \geq 0$ tel que $\mathrm{E}(2008 \cdot (\frac{3}{2})^n)$ soit premier. ($\mathrm{E}(x)$ désigne la partie entière de x, *i.e.* le plus grand entier inférieur ou égal à x). On pourra utiliser l'une des commandes *ceil* ou *floor*, et la commande *isprime*.

Exercice 4 (fonction et tracé (7 pts))
Soit f la fonction définie par:

$$f(x) = \arccos(4x^3 - 3x)$$

1. Définir la fonction f dans Maple. Trouver le domaine de définition D_f de f (on pourra se souvenir du domaine de définition de la fonction arccos, et demander à Maple de résoudre des inéquations).

2. Vérifier que f est continue sur D_f.

3. Calculer la dérivée de f. Etudier son signe (en résolvant des inéquations). Tracer (à la main) le tableau de variations de f, en calculant les valeurs intéressantes avec Maple.

4. Donner la commande pour obtenir une primitive de f.

5. Tracer la courbe de f sur le domaine D_f.

6. Expliquer pourquoi l'équation $f(x) = 1/2$ a une unique solution qui soit *positive* (on la notera a).

7. En consultant l'aide sur la commande *fsolve* (voir *fsolve/details*), donner une valeur approchée de a.

Exercice 5 (Suite récurrente (3 pts))
Soit f la fonction définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R} \; f(x) = \frac{11x - 10 - x^2}{4}$$

Soient u et v les suites définies par :

$$\left\{ \begin{array}{lll} u_0 = 9/5 & \text{et } u_n = f(u_{n-1}) & \text{si } n \geq 1 \\ v_0 = 11/5 & \text{et } v_n = f(v_{n-1}) & \text{si } n \geq 1 \end{array} \right.$$

1. Définir f.

2. En utilisant f, écrire une procédure prenant en entrée un entier naturel n, et renvoyant le n-ième terme de la suite u. Faire de même pour v (on ne copiera qu'une des deux procédures, mais on définira les deux dans Maple car on les utilise dans la question suivante).

3. Afficher la séquence des valeurs approchées des 10 premiers termes de u ; de même pour v. Que constatez-vous ?

Exercice 6 (supplémentaire, à chercher uniquement si vous avez fini tout le reste)
On appelle p la fonction qui à $x \in \mathbb{R}^+$ associe le nombre d'entiers naturels premiers inférieurs ou égaux à x. En d'autres termes :

$$\mathrm{p}(x) = \mathrm{card}\{n \in \mathbb{N},\ n \leq x,\ n \text{ premier}\}$$

Écrire une procédure prenant en entrée un réel positif x et renvoyant $\mathrm{p}(x)$ (on pourra utiliser une boucle *while* et la commande *nextprime*).