Université Paris VII **CM4**
2009-2010 **Groupe ENSI**

Corrigé du partiel 2 (16/04/2010)

Exercice 1.

1) On veut montrer que l'application N de E dans $\mathbb{R}$ définie par $N(A) = \sqrt{\mathrm{Tr}({}^tAA)}$ est une norme. Le plus simple est de remarquer que N est la norme associée à un produit scalaire. En effet, posons

$$\varphi(A, B) = \mathrm{Tr}({}^tAB).$$

– φ est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.
– elle est symétrique : $\varphi(B, A) = \mathrm{Tr}({}^tBA) = \mathrm{Tr}({}^t({}^tAB)) = \mathrm{Tr}({}^tAB) = \varphi(A, B)$, grâce aux propriétés de la trace et de la transposée.
– en utilisant les propriétés de bilinéarité du produit de matrices, et la linéarité de la trace, on obtient que $\varphi(A, B)$ est linéaire par rapport à B ; comme elle est symétrique, elle est aussi linéaire par rapport à A, donc φ est une forme bilinéaire symétrique.
– en utilisant les définitions du produit de matrices et de la trace, on calcule aisément

$$\varphi(A, A) = \sum_{i,j} a_{i,j}^2.$$

Donc : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi(A, A) \geq 0$. De plus, comme c'est une somme de carrés de nombres réels, $\varphi(A, A) = 0$ si et seulement si $\forall i, j,\ a_{i,j} = O$, *i.e.* si $A = 0$. Donc φ est définie positive.

Conclusion : φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, donc un produit scalaire. Comme $N(A) = \sqrt{\varphi(A, A)}$, c'est la norme associée à ce produit scalaire.

Remarque : de manière explicite, on a

$$\varphi(A, B) = \sum_{i,j} a_{i,j} b_{i,j},$$

donc φ est en fait le produit scalaire usuel (somme des produits des coordonnées) dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vu comme $\mathbb{R}^{n^2}$. Et la norme N est donc la "norme 2" de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'inégalité triangulaire pour N provient de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour φ.

2) Comme E est de dimension finie, les parties compactes sont les parties fermées et bornées de E. Montrons donc que $\mathrm{O}(n)$ est fermée et bornée.
Si $A \in \mathrm{O}(n)$, ${}^tAA = I_n$, donc $N(A) = \sqrt{\mathrm{Tr}(I_n)} = \sqrt{n}$. Donc $\mathrm{O}(n)$ est bornée (elle est incluse dans la sphère de centre 0_E et de rayon $\sqrt{n}$).
Pour montrer que $\mathrm{O}(n)$ est fermé, notons d'abord que si l'on considère l'application $f : E \to E,\ A \mapsto^t AA$, alors $\mathrm{O}(n) = f^{-1}(\{I_n\})$. Or f est continue : on peut la voir comme une application de $\mathbb{R}^{n^2}$ dans $\mathbb{R}^{n^2}$, et chaque coefficient de ${}^tAA$ est une somme de produit des coefficients de A, donc chaque composante de $f(A)$ est continue par rapport à A. De plus, le singleton $\{I_n\}$ est fermé. Donc $\mathrm{O}(n)$ est la préimage d'un fermé par une fonction continue, c'est donc un fermé de E.

3) Comme E est de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. En particulier, les parties bornées pour N sont bornées pour N', et les fermés pour N sont des fermés pour N' (et vice-versa). Donc $\mathrm{O}(n)$ est aussi un compact de (E, N').

Exercice 2.

1) $(\Rightarrow)$: si φ est continue sur E, cela signifie par définition qu'elle est continue en tout point de E. En particulier, φ est donc continue en 0.

   $(\Leftarrow)$: supposons que φ est continue en 0. Comme φ est linéaire, $\varphi(0) = 0$. On a par définition de la continuité :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall u \in E, \|u\| \leq \delta \Longrightarrow \|\varphi(u)\| \leq \varepsilon. \qquad (*)$$
   Soit $x_0 \in E$, fixé. Montrons la continuité de φ en x_0. Soit $\varepsilon > 0$. D'après la propriété (*), il existe un $\delta > 0$ tel que $\|\varphi(u)\| \leq \varepsilon$ dès que $\|u\| \leq \delta$. Or, si $x \in E$, comme φ est linéaire on a
$$\varphi(x - x_0) = \varphi(x) - \varphi(x_0).$$
   Donc, dès que $\|x - x_0\| \leq \delta$, $\|\varphi(x) - \varphi(x_0)\| = \|\varphi(x - x_0)\| \leq \varepsilon$. On a donc montré que
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E, \|x - x_0\| \leq \delta \Longrightarrow \|\varphi(x) - \varphi(x_0)\| \leq \varepsilon,$$
   c'est-à-dire φ est continue en x_0. Ceci étant valable pour tout x_0, φ est bien continue sur E.

2) [N.B. : dans l'énoncé il faut lire $\Longrightarrow$ au lieu de $\Longleftrightarrow$.] Supposons que φ est continue en 0. Prenons $\varepsilon = 1$ dans la définition de la continuité rappelée plus haut (*). On obtient qu'il existe $\eta > 0$ tel que
$$\|x\| \leq \eta \Longrightarrow \|\varphi(x)\| \leq 1.$$
   Si maintenant x est quelconque, pour majorer $\|\varphi(x)\|$ on va essayer de ramener x à un vecteur de norme $\leq \eta$. Pour cela, si $x \neq 0$, posons $y = \eta \frac{x}{\|x\|}$. On a $\|y\| = \eta$ donc $\|\varphi(y)\| \leq 1$. Or :
$$x = \frac{\|x\|}{\eta} y \ \text{ donc } \ \varphi(x) = \frac{\|x\|}{\eta} \varphi(y).$$
   Donc, si l'on pose $C = 1/\eta$, on obtient
$$\forall x \in E - \{0\}, \ \|\varphi(x)\| \leq C\|x\|.$$
   La formule est clairement vraie pour $x = 0$ aussi.

3) Supposons que $\forall x \in E, 0 \leq \|\varphi(x)\| \leq C\|x\|$. Si x tend vers 0_E, alors $\|x\|$ tend vers 0, donc par théorème des gendarmes, $\|\varphi(x)\|$ tend vers 0, *i.e.* $\varphi(x)$ tend vers 0_F. Or $\varphi(0_E) = 0_F$, donc on a $\lim\limits_{x \to 0_E} \varphi(x) = \varphi(0_E)$, *i.e.* φ est continue en 0. D'après la question 1, φ est alors continue sur E.

4) Fixons une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E, et une norme N sur F. Si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ (avec les $x_i \in \mathbb{R}$), on a $\varphi(x) = \sum x_i \varphi(e_i)$, donc
$$N(\varphi(x)) \leq \sum_{i=1}^n N(x_i \varphi(e_i)) = \sum_{i=1}^n |x_i| N(\varphi(e_i)) \leq \max_{1 \leq i \leq n} (N(\varphi(e_i))) \sum_{i=1}^n |x_i| = \max_{1 \leq i \leq n} (N(\varphi(e_i))) \|x\|_1,$$

où $\|\cdot\|_1$ est la "norme 1" relative à la base $\mathcal{B}$ sur E. Donc en posant $C = \max_{1\leq i\leq n}(N(\varphi(e_i)))$, C est indépendant de x, et $\forall x \in E, N(\varphi(x)) \leq C\|x\|_1$. Donc φ est continue, d'après la question 3.

Remarque : on a choisi la norme 1 sur E, mais comme E est de dimension finie, toutes ses normes sont équivalentes et la continuité de φ est vérifiée pour toute norme de E. On aurait pu par exemple majorer $N(\varphi(x))$ plutôt par $\max_i(|x_i|)\sum_{i=1}^n N(\varphi(e_i))$, et poser $C = \sum_{i=1}^n N(\varphi(e_i))$ en considérant la norme $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$.

5) Montrons que $\|\cdot\|$ est une norme sur $E = \mathbb{R}[X]$:
   - $\|\cdot\|$ est une application de E vers $\mathbb{R}^+$.
   - si $\|P\| = 0$, alors $\forall x \in [0,1], P(x) = 0$, donc P est un polynôme qui admet une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul. (attention, cet argument ne marche que parce qu'on est dans $\mathbb{R}[X]$: remarquez que $\|\cdot\|$ n'est pas une norme sur l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, par exemple).
   - pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda P\| = |\lambda|\|P\|$. (clair)
   - inégalité triangulaire : $\|P+Q\| = \sup_{x\in[0,1]}|P(x)+Q(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]}|P(x)| + \sup_{x\in[0,1]}|Q(x)| = \|P\| + \|Q\|$.

   Donc $\|\cdot\|$ est bien une norme sur E.

   L'application $\varphi : E \longrightarrow E, P \mapsto P'$ est clairement linéaire (la dérivation est une opération linéaire). Pour montrer qu'elle n'est pas continue, supposons par l'absurde qu'elle vérifie la propriété (1) : il existe une constante $C > 0$, telle que $\forall P \in E, \|P'\| \leq C\|P\|$. Si on pose $P_n = X^n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a clairement $\|P_n\| = 1$, et $\|P_n'\| = \sup_{x\in[0,1]}(nx^{n-1}) = n$. Donc si φ est continue, la propriété (1) donne : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \leq C$, ce qui est impossible. Par conséquent, φ n'est pas continue sur E.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.

1) On calcule
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4(x^3 - x + y) \qquad , \text{ et } \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4(y^3 + x - y).$$
   Donc les points critiques sont les (x,y) qui vérifient l'équation
$$\begin{cases} x^3 = x - y \\ y^3 = y - x \end{cases}.$$
   On tire $x^3 = -y^3$, d'où $x = -y$, puis $x^3 = 2x$, d'où $x = 0$ ou $\pm\sqrt{2}$. Les points critiques sont donc $(0,0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

2) On calcule les dérivées partielles d'ordre 2, et on obtient :
$$Hf(a,b) = \begin{pmatrix} 12a^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12b^2 - 4 \end{pmatrix}.$$

3)
$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix},$$
   donc la forme quadratique associée est $q(x,y) = -4x^2 - 4y^2 + 8xy = -4(x-y)^2$. Sa signature est $(0,1)$.

$$Hf(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix},$$

de forme quadratique associée $q(x,y) = 20x^2 + 20y^2 + 8xy$. Utilisant la méthode de Gauss, on obtient $q(x,y) = 20(x+\frac{y}{5})^2 + \frac{96}{5}y^2$. La signature est $(2,0)$.

Enfin, $Hf(-\sqrt{2},\sqrt{2}) = Hf(\sqrt{2},-\sqrt{2})$, donc le résultat est le même pour le dernier point critique.

4) Pour les points $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ et $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$, la forme quadratique associée à la Hessienne est définie positive d'après la question 3. Donc ces points sont des minimums locaux pour f.

   En $(0,0)$, la forme quadratique associée est dégénérée, donc on ne peut pas directement conclure. Comme la signature est $(0,1)$, il y a une direction où q est strictement négative. Donc au voisinage de $(0,0)$, dans cette direction, $f(x,y)$ est strictement inférieur à $f(0,0)$, et $(0,0)$ ne peut pas être un minimum local. D'autre part, si $x=y=t$, $f(x,y) = 2t^4$, donc est strictement positif au voisinage de 0, et $(0,0)$ ne peut pas non plus être un maximum local.

   Conclusion : comme les extrema locaux dans $\mathbb{R}^2$ sont toujours des points critiques, les seuls extrema locaux de f sont les minimums $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ et $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$.

   Remarque : Lorsque la Hessienne d'une fonction f en un point est dégénérée, on ne peut pas conclure directement sans étudier plus précisément f. Par exemple, si la signature de Hf en un point u est $(1,0)$, alors u peut être un minimum ou un point-selle (ni minimum ni maximum). On peut s'en convaincre en étudiant en $(0,0)$ les exemples $g(x,y) = x^2 + y^4$ et $h(x,y) = x^2 - y^4$.

5) (simple calcul).

6) D'après la question 5, on a : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) \geq -8$. Donc -8 est un *minorant* de f. De plus, d'après la formule, $f(x,y) = -8$ si et seulement si $x^2-2 = y^2-2 = x+y = 0$, *i.e.* si $(x,y) = (-\sqrt{2},\sqrt{2})$ ou $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$. Donc le minorant -8 est atteint, c'est un minimum. La fonction f admet un minimum $m=-8$, atteint en $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ et $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$.

7) Pour $a \in \mathbb{R}$, la ligne de niveau a de f est définie par :

$$L_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = a\}.$$

   Pour montrer que L_a est compacte, il suffit de montrer qu'elle est fermée et bornée.

   On a $L_a = f^{-1}(\{a\})$, avec $\{a\}$ fermé de $\mathbb{R}$, et f continue, donc L_a est toujours fermée.

   Si $(x,y) \in L_a$, d'après la formule de la question 5 on obtient :

$$(x^2-2)^2 + (y^2-2)^2 + 2(x+y)^2 = a+8.$$

   Si $a = 8 < 0$, la ligne de niveau L_a est vide (donc est bornée). Dans le cas contraire, on peut écrire $(x^2-2)^2 \leq a+8$, d'où $|x^2-2| \leq \sqrt{a+8}$, et $|x| \leq \sqrt{2+\sqrt{a+8}} = M$. Le même calcul fonctionne avec y, d'où $|y| \leq M$. Donc il existe une constante M telle que $\forall (x,y) \in L_a, \|(x,y)\|_\infty \leq M$, et L_a est bien une partie bornée.

Exercice 4.

1) Si $(x,y) \in S_1$:

$$\left|\frac{xy^4}{x^2+y^6}\right| \leq \left|\frac{xy^4}{x^2}\right| = \frac{y^4}{|x|} \leq \frac{|x||y|}{|x|} = |y|,$$

donc $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) = 0$.

Si $(x,y) \in S_2$:

$$\left|\frac{xy^4}{x^2+y^6}\right| \leq \left|\frac{xy^4}{y^6}\right| = \frac{|x|}{y^2} \leq \frac{|y|^3}{y^2} = |y|,$$

donc $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) = 0$.

Remarque : une méthode astucieuse permet de se passer de l'étude selon S_1 et S_2 pour calculer la limite de f en $(0,0)$. On utilise l'inégalité classique : $|ab| \leq \frac{a^2+b^2}{2}$, qu'on applique ici à $a = x$, $b = y^3$. Cela implique :

$$|f(x,y)| = |xy^3|\frac{|y|}{x^2+y^6} \leq \frac{x^2+y^6}{2}\frac{|y|}{x^2+y^6} = \frac{|y|}{2},$$

d'où $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

2) On a $S_1 \cup S_2 = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Or d'après la question 1, f a la même limite selon S_1 et selon S_2. Donc $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. On peut par conséquent prolonger f par continuité en $(0,0)$ en posant : $f(0,0) = 0$.

3) Il s'agit de calculer, si elle existe, la limite de $\frac{f((0,0)+tu)-f(0,0)}{t-0}$ lorsque t tend vers 0. On a

$$\frac{f(tu)}{t} = \frac{t^2ab^4}{a^2+t^4b^6}.$$

Si $a = 0$, ce quotient vaut 0. Si $a \neq 0$, il est équivalent, quand t tend vers 0, à t^2b^4/a, donc tend vers 0. Ainsi le taux d'accroissement dans la direction u tend vers 0, donc f est dérivable en $(0,0)$ dans la direction u et $D_uf(0,0) = 0$. Cela signifie aussi que $df_{(0,0)}(u) = 0$ pour tout u : l'application linéaire $df_{(0,0)}$ est l'application nulle.

4) La fonction f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si elle est différentiable en tout point, *i.e.* si df_X existe pour tout X, ou encore si les dérivées partielles existent partout.
Sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, f est un quotient de deux fonctions polynomiales (dont le dénominateur ne s'annule pas), donc est différentiable (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$). En $(0,0)$, les dérivées partielles existent d'après la question 3 : on a $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = D_{(1,0)}f(0,0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = D_{(0,1)}f(0,0) = 0$. Donc f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

5) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si ses dérivées partielles existent et sont continues. On sait que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, donc ses dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Il faut donc étudier si les dérivées partielles sont continues en $(0,0)$. On a vu que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ et $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$. On calcule que pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^4(y^6-x^2)}{(x^2+y^6)^2}.$$

En particulier, on a pour $y \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = \frac{y^{10}}{y^{12}} = \frac{1}{y^2}$, qui ne tend pas vers 0 quand (x, y) tend vers $(0, 0)$. Par conséquent, f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ en $(0, 0)$.
Remarque : si l'on veut étudier la continuité de $\frac{\partial f}{\partial y}$ (ce qui n'est pas nécessaire ici), c'est un peu plus subtil, mais on peut montrer par exemple que $\frac{\partial f}{\partial y}(t^3, t) = \frac{1}{2}$, donc $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas non plus continue en $(0, 0)$.