Feuille 6
Calcul différentiel

Exercice 1 — Soient E, F des espaces vectoriels normés et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.

1. Montrer que f est continue ssi f est continue en 0.
2. Montrer que f est continue ss'il existe C tel que, pour tout $x \in E$, on ait $\|f(x)\| \leq C\|x\|$.
3. En déduire que si E est de dimension finie alors f est continue.
4. On pose $E = \mathbb{R}[X]$ et, pour $P \in E$, $\|P\| = \sup_{x\in[0,1]}|P(x)|$. Montrer que $\| \ \|$ est une norme et que $f : E \longrightarrow E, P \mapsto P'$ est linéaire et non continue pour cette norme .

Exercice 2 — Soit q une forme quadratique sur un espace vectoriel E de dimension finie.

1. Montrer que q est continue sur E. En déduire qu'il existe deux constantes $m, M \geq 0$ telles que pour tout $x \in E$ on a :
$$m\|x\|^2 \leq |q(x)| \leq M\|x\|^2.$$
2. Montrer que si q est définie positive alors m peut être choisie strictement positive.
3. Montrer que q est différentiable sur E et donner sa différentielle en terme de sa forme polaire b.
4. Supposons que $E = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel. Donner le gradient de q en tout point a de E.
5. Supposons que q est définie posive sur $E = \mathbb{R}^n$ et munissons E du produit scalaire b associé à q. Donner le gradient de q en tout point a dans cet espace euclidien.
6. Conclure

Exercice 3 — Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$, si $(x,y) \neq (0,0),\ f(0,0) = 0$.

1. Montrer que f est dérivable en $(0,0)$ suivant tout vecteur $u = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ et donner $D_u f(0,0)$.
2. Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$ et conclure.

Exercice 4 — Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$, pour $(x,y) \neq (0,0), f(0,0) = 0$.

1. Montrer que f est continue et est dérivable en $(0,0)$ suivant tout vecteur $u = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ et donner $D_u f(0,0)$.
2. Montrer que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 5 — Prolonger par continuité la fonction $f : \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \mapsto \mathbb{R},\ f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4}$. Le prolongement est-il différentiable, de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 6 — Prolonger par continuité la fonction $f : \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \mapsto \mathbb{R},\ f(x,y) = \dfrac{x^2y^3}{x^2+y^4}$. Le prolongement est-il différentiable, de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 7 — Prolonger par continuité la fonction $f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto |x|^y$ au plus grand ouvert de $\mathbb{R}^2$ possible. Etudier l'existence et la continuité des dérivées partielles ; les calculer.

Exercice 8 — Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels, et l'application $\Delta : E \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $\Delta(A) = \det A$.

1. Montrer que Δ est continue sur E.
2. Montrer que le sous ensemble $GL_2(\mathbb{R})$ de E formé des matrices inversibles est un ouvert de E. Est-il borné ?
3. Le complémentaire de $GL_2(\mathbb{R})$ est-il compact ?
4. Montrer que le sous ensembles $O(2)$ de E formé des matrices orthogonales est compact dans E.
5. Soit $A \in E$ et notons comA sa comatrice. Montrer que l'application $l : E \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $l(H) = \mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}(\mathrm{comA})\mathrm{H})$ est linéaire.
6. Montrer que l'application $f = \Delta_{|_{GL_2}} : GL_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $\Delta(A) = \det A$ est différentiable et donner sa différentielle en tout point A de $GL_2(\mathbb{R})$.
7. Mêmes questions avec $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ GL_3(\mathbb{R})$ et $O(3)$.

Exercice 9 — Pour chacune des fonctions f_j suivantes, déterminer son domaine de définition D_j et montrer que f_j est continue sur D_j. Déterminer le plus grand ouvert $V_j \subset D_j$ sur lequel f_j est différentiable et calculer ∇f_j (ici $\mathbb{R}^2$ est le plan euclidien usuel).

$f_1(x,y) = x^3 + y^2, \qquad f_2(x,y) = \sin(x^2 - \mathrm{Log} y),$

$f_3(x,y) = \mathrm{Log}(1 - x^2 + y^2), \qquad f_4(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1},$

$f_5(x,y) = \sqrt{(a-x)^2 + (y-b)^2}$, avec $(a,b) \in R^2$ donné,

$f_6(x,y) = \dfrac{\sin x - \sin y}{x - y}$, si $x \neq y$ et $f_6(x,x) = \cos x$.

Exercice 10 — Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, différentiable. On définit la fonction $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, h(x,y) = \sin(x + f(y^2, x))$. Exprimer les dérivées partielles de h en fonction de celles de f.

Exercice 11 — Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.

1. Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\varphi(t) = f(t^2, t^4, e^t)$. Montrer que φ est dérivable. Pour tout nombre réel t, exprimer $\varphi'(t)$ au moyen des dérivées partielles de f.
2. Soit $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x, y) = f(x\sin(y), xy^2, x + y^2)$. Montrer que g est de classe C^1 et calculer les dérivées partielles de g.

Exercice 12 — Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y, z) = x^3y + \cos(xz)$. Soit $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x, y) = f(x^2 + y^2, xy, x - y)$. Montrer que la fonction g est de classe C^1 et calculer les dérivées partielles de g.

Exercice 13 — Soit $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y, z) = x^{y^z}$.

1. Montrer que la fonction f est de classe C^1 et calculer les dérivées partielles de f.
2. Soit $g :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = x^{x^x}$. Montrer que g est dérivable et calculer $g'(x)$ pour tout $x > 0$.

Exercice 14 — Le but de cet exercice est de chercher les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telles que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0. \qquad (*)$$

1. Soient g et h deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = g(x) + h(y)$. Montrer que f est de classe C^2 et que f est solution de $(*)$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 qui vérifie $(*)$.
   (a) Montrer qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que

   $$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \varphi(y) \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

   (b) Montrer qu'il existe des fonctions $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telles que $f(x, y) = g(x) + h(y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 15 — On cherche les fonctions f de classe C^1 telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 2x\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \qquad (E)$$

Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x, y + x^2)$.

1. Montrer que ϕ est de classe C^1 et écrire sa matrice jacobienne. Montrer que ϕ est bijective et que ϕ^{-1} est de classe C^1.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ classe C^1. On pose $g = f \circ \phi$. Montrer que g est de classe C^1. Calculer ses dérivées partielles .
3. Montrer que f est solution de (E) ssi l'on a $\dfrac{\partial g}{\partial x} = 0$.

4. Montrer que f est solution de (E) ss'il existe $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe C^1, telle que $f(x,y) = h(y - x^2)$, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 16 — Considérons l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - (x+1)e^x \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0. \qquad (*)$$

1. Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = h(y + xe^x)$. Montrer que f est de classe C^1 et que f est solution de $(*)$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 qui vérifie $(*)$. Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(t) = f(0,t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que la fonction h est de classe C^1.
   (b) Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $h(t) = f(x, t - xe^x)$.
   (c) En déduire que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a $f(x,y) = h(y + xe^x)$.
3. Donner toutes les solutions de $(*)$.

Exercice 17 — Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe C^1.
2. Montrer que les dérivées partielles secondes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

   existent. Les calculer.
3. La fonction f est-elle de classe C^2 ?

Exercice 18 — Soit $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = u\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$. Montrer que la fonction f est de classe C^2 et que pour tout $(x,y) \neq (0,0)$ on a l'égalité :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = u''(r) + \frac{1}{r}u'(r) \qquad \text{où } r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Exercice 19 — Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = y^2 - x^3 + 3x$.

1. Calculer les dérivées partielles de f et trouver les points critiques de f.
2. Soit (x_0, y_0) un point de $\mathbb{R}^2$ qui n'est pas un point critique de f. Posons $a = f(x_0, y_0)$. Soit L la ligne de niveau a de f. Ecrire l'équation de la tangente à L au point (x_0, y_0).

3. Soit a un nombre réel.
   (a) Etudier la fonction $x \longmapsto x^3 - 3x + a$.
   (b) Dessiner les différentes allures de la ligne de niveau a de la fonction f.

Exercice 20 — Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$. Pour tout nombre réel a, notons L_a la ligne de niveau a de la fonction f.

1. Trouver les points critiques de f.
2. Soit a un nombre réel. Supposons que L_a n'est pas vide et que $a \neq 0$ et $a \neq -8$. Montrer que la courbe L_a a une tangente en tout point.
3. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x, y) + 8 = (x^2 - 2)^2 + (y^2 - 2)^2 + 2(x + y)^2$.
4. En déduire que la fonction f admet un minimum m et préciser les points (x, y) en lesquels ce minimum est atteint.
5. Montrer que les lignes de niveau de f sont des parties compactes de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 21 — Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = xy(x^2 + y^2 + xy - 1)$.

1. Que valent $f(y, x)$ et $f(-x, -y)$? Que peut-on en déduire sur les points critiques de f ?
2. Déterminer les points critiques de f.
3. Déterminer les extrema locaux de f.
4. La fonction f est-elle majorée ? Est-elle minorée ?

Exercice 22 — Etudier les extrema locaux des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ suivantes :

(a) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$ $\quad$ (b) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$
(c) $f(x, y) = (4x - 3y)e^{-(x^2+y^2)}$ $\quad$ (d) $f(x, y) = (x - y)e^{xy}$.

Exercice 23 — Soit S la surface d'équation $z = x - 2(x^2 + y^2)^2$, c'est-à-dire soit

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\, z = x - 2(x^2 + y^2)^2\}.$$

1. Soit $(a, b, c) \in S$. Ecrire l'équation du plan tangent à S au point (a, b, c). En quels points le plan tangent à S est-il horizontal ?
2. Montrer qu'au point $(0, 0, 0)$, la surface est en dessous de son plan tangent.

Exercice 24 — Soit S la surface d'équation $z = (1 + x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2$, c'est-à-dire soit

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\, z = (1 + x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2\}.$$

1. En quels points le plan tangent à S est-il horizontal ?
2. En chacun de ces points, quelle est la position de S par rapport à son plan tangent ?

Exercice 25 — Etudier les extrema locaux des fonctions $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ suivantes :

(a) $f(x, y, z) = z^2(1 + xy) + xy$ $\quad$ (b) $f(x, y, z) = (x + y)e^{x+y-z^2}$.