TD 9 : Nombres réels, limites, croissances comparées

---

1 Nombres réels

Exercice 1. Montrer que les ensembles suivants admettent des bornes supérieure et inférieure, les déterminer et préciser à chaque fois s'il s'agit (respectivement) d'un maximum et d'un minimum.

a) $\left\{\dfrac{n-\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{n}}; n \in \mathbf{N}^*\right\}$.

b) $\{\frac{1}{n} + (-1)^n; n \in \mathbf{N}^*\}$.

c) $\{x \in \mathbf{R}; -2 < x + \frac{1}{2x} \leq 2\}$ (commencer par montrer que cet ensemble est la réunion de deux intervalles).

Exercice 2. Soit $(u_n)_n$ une suite telle que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n^2 = 4$. Que peut-on dire de $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$?

Exercice 3. Pour $n \geq 1$, on définit :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$$

a) Donner le sens de variation des suites (u_n) et (v_n). Ces suites sont-elles bornées ?

b) En déduire que (u_n) et (v_n) sont convergentes, et ont même limite.

c) La limite commune est notée e ($e = \exp 1$ est la constante de Neper). Montrer que pour tout n, $u_n < e < v_n$ (*). En déduire (sans calculatrice) un rationnel qui approche e à 10^{-2} près.

d) Montrer que e est irrationnel. [On pourra utiliser l'encadrement (*) et procéder par l'absurde].

2 Définition de la limite

Exercice 4. Démontrer (à partir de la définition) que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$.

Exercice 5. Soit $\varepsilon > 0$. Donner un entier N tel que

$$n \geq N \Longrightarrow \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \leq \varepsilon.$$

Exercice 6. Soit $A > 0$. Donner un entier N tel que
$$n \geq N \Longrightarrow 2^n \geq A.$$

Exercice 7. On pose
$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$. En déduire que pour tout $k \geq 0$, $S_{2^k} \geq \frac{k+1}{2}$.

b) En utilisant la question a), calculer la limite de la suite S_n.

c) Donner un entier N tel que

   1) $S_N \geq 10$;

   2) $S_N \geq 100$;

   3) $S_N \geq 1000$;

3 Calculs de limites

Exercice 8. Parmi les expressions ci-dessous, lesquelles sont des formes indéterminées dans la situation indiquée ? (On ne demande pas de lever l'indétermination.)

$n^{n/2} - n!,\ n \to \infty$	$x^{1/x},\ x \to +\infty$	$x^{\ln x},\ x \to 1$
$x^3 - x^2,\ x \to +\infty$	$x^3 - x^2,\ x \to -\infty$	$x \ln x,\ x \to 0$
$x \ln x,\ x \to +\infty$	$xe^x,\ x \to +\infty$	$xe^x,\ x \to -\infty$
$\dfrac{x^2 - a^2}{x - a},\ x \to a$	$\dfrac{\cos x}{\sin x},\ x \to 0$	$\dfrac{\cos x}{\sin x},\ x \to \dfrac{\pi}{2}$
$x \sin x,\ x \to 0$	$x \sin(e^{-x}),\ x \to +\infty$	$\sqrt{x+1} - \sqrt{x},\ x \to 0$
$\sqrt{x+1} - \sqrt{x},\ x \to +\infty$	$x^x,\ x \to 0$	$x^x,\ x \to +\infty$
$x^{-x},\ x \to +\infty$	$xe^{-1/x},\ x \to 0+$	$xe^{-1/x},\ x \to +\infty$

Exercice 9. Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2}, \quad \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right), \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(\ln n)}{\ln n}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{2 + \sin x}$$
$$\lim_{x\to+\infty} x^{\sin x}, \quad \lim_{x\to+\infty} (x + e^x), \quad \lim_{x\to-\infty} (x + e^x)$$

Exercice 10. Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{e^x - 1}, \quad \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{e^x - e}.$$

Exercice 11. Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :
$$\lim_{x\to 0+} x^x, \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x^\alpha}{x^\beta}, \quad \lim_{x\to 0+} \frac{(\sin x)^\alpha}{x^\beta},$$
$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right), \quad \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^\alpha + 1} - \sqrt{x^\alpha}\right)$$

4 Croissances comparées

EXERCICE 12. Classer pour la relation d'ordre «$f(x)$ est négligeable devant $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$» les fonctions suivantes :

$$x^x, \quad e^{-x}, \quad x^2, \quad e^{x^2}, \quad \ln x, \quad e^{-x}, \quad x, \quad \frac{1}{x}, \quad \sqrt{x}, \quad x \ln x.$$

On écrira $f(x) \ll g(x)$ pour dire que $f(x)$ est négligeable devant $g(x)$.

EXERCICE 13. Même exercice, en ajoutant à la liste précédente les fonctions

$$e^{\sqrt{x}}, \quad , xe^{-x}, \quad x^{1/x}, \quad (\ln x)^2, \quad \frac{1}{\ln x}.$$

Expliquer pourquoi les fonctions $x \sin^2 x$ et $x^{\sin x}$ ne peuvent pas trouver place dans ce classement.

EXERCICE 14. Démontrer les équivalences suivantes

a) $\sum_{k=1}^n k \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^2}{2}$

b) $\tan x \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\sim} \frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}$

c) $\frac{e^x-1}{\ln(1+x^2)} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$

d) $n\left(e^{\frac{1}{n}} - \frac{n+1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$