Université Paris 7 | **Premier semestre 2008-2009**
L1 MASS - Groupe 1M4 | **MA1 - Algèbre et Analyse élémentaires**

TD 8 : Logique, ensembles et applications

Rappel : Les archives des TD sont disponibles sur la page :

`http://www.dma.ens.fr/~vripoll/enseignement.html`

1 Logique

Exercice 1. Dire si les formules suivantes sont vraies ou fausses :

a) $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall p \in \mathbb{N}\ n > p$

b) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists p \in \mathbb{N}\ n > p$

c) $\exists n \in \mathbb{N}\ \forall p \in \mathbb{N}\ n > p$

d) $\exists n \in \mathbb{N}\ \exists p \in \mathbb{N}\ n > p$

Exercice 2. On considère un professeur et l'ensemble de ses étudiants. Que pensez-vous des affirmations suivantes :

(a) A chaque fois que le professeur pose une question, il existe un étudiant $\mathcal{E}$ tel que si $\mathcal{E}$ possède la réponse à cette question, alors tous les autres étudiants la possèdent également.

(b) Il existe un étudiant $\mathcal{E}$ tel qu'à chaque fois que le professeur pose une question, si $\mathcal{E}$ possède la réponse à cette question, alors tous les autres étudiants la possèdent également.

Exercice 3. Soient A et B deux assertions. On rappelle que $A \Rightarrow B$ signifie $\text{non}(A)\text{ou}B$, i.e. "A est fausse ou B est vraie". Montrer qu'une implication est vraie si et seulement si sa contraposée est vraie, c'est-à-dire : $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\text{non}(B) \Rightarrow \text{non}(A))$.

Exercice 4. Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses (et le démontrer) :

a) $(1 = 2) \Rightarrow$ "mon voisin s'appelle Anastase".

b) $\forall x \in \mathbb{R}, (x = 3 \Rightarrow x^2 = 9)$.

c) $\forall x \in \mathbb{R}, (x^2 = 9 \Rightarrow x = 3)$.

d) $(\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = 9) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, x = 3)$.

e) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{N}^*, n$ pair $\Rightarrow n^a$ multiple de 2^a.

f) $\forall n \in \mathbb{N}, n$ pair $\Rightarrow n+1$ premier.

g) $\forall n \in \mathbb{N}, n$ pair $\Rightarrow n+1$ ou $n+3$ ou $n+5$ premier.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque. Ecrire avec des quantificateurs les assertions suivantes , ainsi que leurs négations :

- la fonction f est majorée ;
- la fonction f est minorée ;
- la fonction f est bornée.

Exercice 6. Soit (u_n) une suite de réels. On dit que (u_n) tend vers $+\infty$ lorsque pour tout réel, il y a un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont plus grands que ce réel.

a) Ecrire la définition de "(u_n) tend vers $+\infty$" en langage mathématique (avec quantificateurs).

b) Ecrire en langage mathématique la négation de cette formule, i.e. la définition de "(u_n) ne tend pas vers $+\infty$".

c) Montrer que (u_n) ne tend pas vers $+\infty$ si et seulement si il existe un réel inférieur à une infinité de termes de la suite.

d) On suppose ici que (u_n) est une suite croissante. Montrer que soit (u_n) tend vers $+\infty$, soit (u_n) est une suite majorée. [Remarque : on peut montrer que dans le second cas, (u_n) tend vers un réel qui est la borne supérieure des valeurs de (u_n).]

Exercice 7. Alice s'est perdue au pays des merveilles. Pour en sortir elle doit choisir l'une des deux portes face à elle. Mais si l'une des deux permet de sortir de ce rêve, l'autre mène à un cauchemar encore plus terrifiant.

Les portes sont gardées par deux jumeaux. L'un d'entre eux dit toujours la vérité et l'autre ne peut s'empêcher de mentir systématiquement. Alice ne sait malheureusement pas lequel des deux est le menteur, lequel des deux est de bonne foi.

a) Montrer que, si Alice a le droit de poser deux questions à l'un des jumeaux, elle peut savoir quelle porte est la bonne.

b) Montrer que même si Alice n'a le droit de poser qu'une seule question elle peut encore déterminer la bonne porte.

2 Ensembles

Exercice 8. Déterminer $[0,2]^2 \cap [1,3]^2$

Exercice 9. Démontrer les résultats suivants, où A, B et C désignent des ensembles.

a) $A \subset {}^cB \Leftrightarrow B \subset {}^cA$

b) ${}^c({}^cA) = A$

c) ${}^c(A \cup B) = {}^cA \cap {}^cB$

d) ${}^c(A \cap B) = {}^cA \cup {}^cB$

e) ${}^c(A \cup B) \cap {}^c(C \cup {}^cA) = \emptyset$

f) $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$

g) $A \cap B = B \Leftrightarrow B \subset A$.

Exercice 10. Soit (A_n) une suite de parties de $\mathbb{R}$.

a) Expliquer pourquoi : $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{N},\ x \in A_p$.

b) Expliquer pourquoi : $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{N},\ x \in A_p$.

c) (difficile) Expliquer ce que sont "concrètement" les ensembles

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} A_k \quad \text{et} \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k\ .$$

3 Applications

Exercice 11. Soit $f : E \to F$ une fonction, A et B deux parties de E, et C et D deux parties de F. Les égalités suivantes sont-elles vraies :

a) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

c) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

d) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

Exercice 12. Donner des exemples de fonctions f bijectives, respectivement injectives mais pas surjectives, respectivement surjectives mais pas injectives, et respectivement ni injectives ni surjectives dans chacun des cas suivants :

a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

b) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

d) $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$

Exercice 13. Soient E, F et G trois ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications. Montrer que :

a) si f et g sont injectives, $g \circ f$ est injective.

b) si f et g sont surjectives, $g \circ f$ est surjective.

c) si $g \circ f$ est injective, f est injective.

d) si $g \circ f$ est surjective, g est surjective.

Exercice 14. (difficile) Soit X un ensemble. On rappelle que l'on note $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X.

Soit $f : X \to \mathcal{P}(X)$ une application. Montrer que f n'est pas surjective (on pourra raisonner par l'absurde et considérer $Y \in \mathcal{P}(X)$ défini par $Y = \{x \in X, x \notin f(x)\}$).

Exercice 15. (difficile) Montrer qu'il n'existe pas de bijection entre $\mathbb{N}$ et $[0, 1]$.