Université Paris 7 **Premier semestre 2008-2009**
L1 MASS - Groupe 1M4 **MA1 - Algèbre et Analyse élémentaires**

TD 3 : Récurrence et géométrie

Exercice 1.

Démontrez les résultats suivants.

1) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $2^n > n$.
2) Pour tout $n \geq 1$, le produit de n entiers impairs est impair.
3) Pour tout $n \geq 2$, $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + (n-1) \cdot n = \frac{1}{3}n(n-1)(n+1)$.
4) Pour tout $n \geq 2$, $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

Exercice 2.

On considère n droites dans le plan, telles qu'il n'y en ait pas deux parallèles ni trois concourantes (on dit alors que les droites sont en position générale). On cherche une formule donnant le nombre de régions R_n du plan délimitées par ces n droites.

1) Faire un dessin pour $n = 2, 3, 4$.
2) Conjecturer une formule donnant R_n en fonction de R_{n-1}. La démontrer.
3) Conjecturer une formule donnant R_n en fonction de n. La démontrer.

Exercice 3.

Au guichet de la gare des gens font la queue pour acheter leur billet. Si la première personne est une femme et la dernière est un homme, montrer que quelque part dans la file une femme est juste devant un homme.

Exercice 4.

1) Donnez une interprétation géométrique de la formule $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (on pourra tracer un carré de côté bien choisi). En déduire, par un raisonnement géométrique, que $a^2 + b^2 \leq (a+b)^2$ pour a, $b \geq 0$.
2) Donnez une interprétation géométrique de la formule $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. En déduire, par un raisonnement géométrique, que $a^3 + b^3 \leq (a+b)^3$ pour a, $b \geq 0$.
3) Soient $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$ des nombres réels. Vérifier que

$$(\sum_{1 \leq i \leq n} a_i)(\sum_{1 \leq j \leq m} b_j) = \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} a_i b_j$$

Donnez une interprétation géométrique de cette égalité dans le cas où tous les a_i et tous les b_j sont positifs.

Exercice 5.

1) "Le prix d'un certain article en magasin a augmenté de 50% l'année dernière, et encore de 10% cette année ; soit une augmentation moyenne annuelle d'environ 28,5%". Expliquez cette affirmation ; de quel type de moyenne s'agit-il ?
2) Si le prix de cet article augmente encore l'année prochaine de 20%, quelle sera l'augmentation moyenne annuelle sur la période des 3 ans ?

Exercice 6.

Écrire avec un ou plusieurs $\sum$ les expressions suivantes :
$3+3+3+\cdots+3$ (n fois) ; $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}$; $1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+(n-1)\cdot n$; $(a_1+\cdots+a_n)(\frac{1}{a_1}+\ldots\frac{1}{a_n})$; $1-1+1-1+\ldots$ (n termes) ; $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\ldots$ (n termes) ; $a^n+\ldots a^{n-1}b+\cdots+ab^{n-1}+b^n$.

Exercice 7. Calculer $\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\right)$.

Exercice 8. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, 5^n est la somme de 1 et d'un multiple de 4. [Il y a (au moins) trois démonstrations différentes]

Exercice 9. En utilisant le développement de $(1+x)^{2n}$, démontrer la formule :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$$

Interpréter cette formule en utilisant la définition combinatoire des coefficients binomiaux.

Exercice 10. Démontrer que si θ n'est pas un multiple de π, alors :

$$1+\cos\theta+\cos(2\theta)+\cdots+\cos(n\theta)=\frac{\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\cos(\theta/2)$$

Exercice 11. Montrer que pour tout $n\geq 1$, on a :

$$\cos(n\theta)=P_n(\cos\theta)$$
$$\sin(n\theta)=\sin\theta Q_n(\cos\theta)$$

où P_n est un polynôme de degré n et Q_n de degré $n-1$. [On pourra utiliser le développement de $(\cos\theta+i\sin\theta)^n$.] Pour quelles valeurs de n peut-on écrire $\sin(n\theta)$ comme un polynôme en $\sin\theta$?

Exercice 12. Soit q un nombre complexe de module 1, avec $q\neq 1$. Montrer que pour $n\in\mathbb{N}$, les nombres complexes

$$z_n=1+q+q^2+\cdots+q^n$$

sont situés sur un même cercle. Centre et rayon de ce cercle ?