TD 12 : Systèmes linéaires

Exercice 1. Les matrices suivantes sont-elles échelonnées ?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Déterminer les inconnues principales, les inconnues secondaires et le rang des systèmes linéaires suivants :

a) Le système linéaire d'inconnues réelles (x, y, z, t),

$$-y - 2x - t = 0$$

b) Le système linéaire d'inconnues réelles (x, y, z, t),

$$\begin{cases} t - x = 0 \\ 4t - 4x = 0 \end{cases}$$

c) Le système linéaire d'inconnues réelles (x, y, z),

$$2z - y + 4x = 0$$

.

d) Le système linéaire d'inconnues réelles (x, y, z),

$$\begin{cases} z - 2y - 3x = 0 \\ -4z + 7y + 15x = 0 \\ -2z + y + 15x = 0 \\ 4z - 5y - 21x = 0 \end{cases}$$

e) Le système linéaire d'inconnues réelles (x, y, z, t),

$$-4z - y + 2x + t = 0$$

.

f) Le système linéaire d'inconnues réelles (x, y, z, t, s)

$$\begin{cases} y + x - 4t + 4s = 0 \\ z - y + 3x - 2t - 2s = 0 \\ -7z + 3y - 21x + 22t - 10s = 0 \\ -6z + 2y - 18x + 20t - 12s = 0 \end{cases}$$

Exercice 3. Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u+16 \\ -u+2 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer son rang.

b) Donner le nombre de conditions de compatibilité. Préciser les valeurs de u pour lesquelles le système est compatible.

c) Dans le cas où le système est compatible, donner la dimension et une base de l'ensemble des solutions.

d) Donner une solution particulière du système.

Exercice 4. Mêmes questions que l'exercice précédent avec les systèmes linéaires suivants :

a)

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u+2 \\ -u-1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4u+11 \\ -3u+6 \\ -2u+4 \\ -u+2 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 5. Soient (e_1, e_2, e_3, e_4) une base de $\mathbb{R}^4$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4) est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Donner une base du noyau de f.

Exercice 6. Soient (e_1, e_2, e_3, e_4) une base de $\mathbb{R}^4$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4) est :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 3 & 1 \\ 10 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer le rang de f.

b) Déterminer une base de l'image de f.

c) Déterminer une base du noyau de f.