Université du Québec à Montréal **Session d'automne 2011**
Groupe-cours 51 **MAT1112 - Calcul I**
Vivien Ripoll

Résumé des cours 1 et 2 (9 et 12 septembre)

---

*N.B. : ce document est un résumé succinct de ce que nous avons fait en cours ; il peut contenir des remarques supplémentaires. Il est à considérer comme un complément du cours, et sa lecture ne dispense évidemment pas l'étudiant de relire attentivement ses notes personnelles du cours ainsi que le recueil de notes de Robert Bédard. Ce recueil est désigné par la suite « **[RB]** ».*

* Distribution du plan de cours et d'une feuille d'exercices supplémentaires sur le chapitre 1.

* Présentation du cours et du plan de cours. Présentation de l'évaluation prévue.

* Chapitre 1 : Rappels sur le calcul différentiel à une variable.

I Fonctions et domaines de définition

Définition d'une fonction, domaines de définition, opérations sur les fonctions... Voir **[RB]**.

Quelques exemples donnés :

- Domaine de définition de
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x-3}}$$
Il s'agit d'étudier le signe d'un polynôme du second degré...
On obtient $D =]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[$.
- Composition des fonctions :
$$f(x) = \sin(x+4) \; ; \; g(x) = x^3 - 2.$$
On obtient :
$fog(x) = f(g(x)) = \sin(g(x)+4) = \sin((x^3-2)+4) = \sin(x^3+2)$; et
$gof(x) = g(f(x)) = f(x)^3 - 2 = \sin^3(x+4) - 2$.
- Réciproque de $f(x) = e^{-2x+3}$:
$$y = f(x) \Leftrightarrow y = e^{-2x+3} \Leftrightarrow \ln(y) = -2x+3 \Leftrightarrow x = \frac{3-\ln(y)}{2}$$
Donc la réciproque est $g(y) = \frac{3-\ln(y)}{2}$ (pour $y > 0$). On peut vérifier que $gof(x) = x$ et $fog(y) = y$.

II Limites

La définition précise n'est pas exigible des étudiants. Je la donne ici pour ceux qui seraient intéressés ; c'est plus compréhensible avec les dessins d'« intervalles autour d'un point » donnés vendredi. (a et L désignent des nombres réels)

- $\lim_{x \to a} f(x) = L$ signifie :
  Pour tout $\varepsilon > 0$ (« Pour tout intervalle autour de L, aussi petit soit-il, par ex. de taille 2ε »)
  il existe $\delta > 0$ (« on peut trouver un petit intervalle autour de a »)
  tel que si $|x - a| \leq \delta$ (« tel que si x est dans ce petit intervalle $[a - \delta, a + \delta]$ »)
  alors $|f(x) - L| \leq \varepsilon$. (« alors $f(x)$ est dans l'intervalle $[L - \varepsilon, L + \varepsilon]$. »)

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ signifie :
  Pour tout $\varepsilon > 0$ (« Pour tout intervalle autour de L, aussi petit soit-il, par ex. de taille 2ε »)
  il existe $M \in \mathbb{R}$
  tel que si $x \geq M$ (« dès que x est assez grand »)
  alors $|f(x) - L| \leq \varepsilon$. (« alors $f(x)$ est dans l'intervalle $[L - \varepsilon, L + \varepsilon]$. »)

  Remarque : dans ce cas, la courbe de f a une asymptote horizontale d'équation $y = L$.

- $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ signifie :
  Pour tout $K \in \mathbb{R}$ (« Pour tout nombre réel K, aussi grand soit-il »)
  il existe $\delta > 0$ (« on peut trouver un petit intervalle autour de a »)
  tel que si $|x - a| \leq \delta$ (« tel que si x est dans ce petit intervalle $[a - \delta, a + \delta]$ »)
  alors $f(x) \geq K$. (« alors $f(x)$ est au-dessus de ce nombre K. »)

  Remarque : dans ce cas, la courbe de f a une asymptote verticale d'équation $x = a$.

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ signifie :
  Pour tout $K \in \mathbb{R}$ (« Pour tout nombre réel K, aussi grand soit-il »)
  il existe $M \in \mathbb{R}$
  tel que si $x \geq M$ (« dès que x est assez grand »)
  alors $f(x) \geq K$. (« alors $f(x)$ est au-dessus de ce nombre K. »)

Remarque : la limite n'existe pas toujours. Par exemple :
- soit $f(x) = -1$ si $x < 0$, $f(x) = 1$ si $x \geq 0$. Il n'y a pas de limite en 0 (la limite à gauche est -1, à droite c'est 1, donc pas de limite globale.
- soit $g(x) = \sin(\frac{1}{x})$ pour $x \neq 0$. A-t-elle une limite pour $x \to 0$?

Opérations sur les limites :

Voir **[RB]**, Prop.1.1. En résumé, on peut ajouter, multiplier, quotienter les limites, tant que l'opération formée a un sens.

Se rappeler comment fonctionnent les opérations sur les limites avec ∞. Pour les produits et quotients, tout a du sens, sauf ces quelques formes indéterminées (où on ne peut pas conclure en général et on doit regarder au cas par cas) :
- $0 \ \times \infty$;
- $0 \ / \ 0$;
- ∞ / ∞.

Remarque : $0 \ / \ \infty$ n'est pas une forme indéterminée (donne 0) ; $\infty \ / \ 0$ non plus (donne ∞).

Limites des fonctions classiques :

Il faut savoir calculer une limite en $\pm\infty$ d'une fraction rationnelle (quotient de 2 polynômes). Il faut aussi connaître au moins les limites suivantes :

- $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$; $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.
- $\lim_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$; $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

Dans des cas plus compliqués, il peut être utile de connaître les règles générales suivantes [1] :

- Si $f(x)$ est une exponentielle $\times$ (ou /) un polynôme, et si le calcul de la limite en $+\infty$ (ou $-\infty$) donne une forme indéterminée, alors c'est la limite de l'exponentielle qui l'emporte.
  Ex. : $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}(x^{1000} + 7x^2 + 3) = 0$.
  $\lim_{x\to-\infty} e^x(x^3 - 2x + 1) = 0$.
- Si $f(x)$ est un logarithme $\times$ (ou /) un polynôme, et si le calcul de la limite en $+\infty$ (ou en 0) donne une forme indéterminée, alors c'est la limite du polynôme qui l'emporte (valable aussi en remplaçant le polynôme par n'importe quelle puissance, par exemple $\sqrt{x}$).
  Ex. : $\lim_{x\to+\infty} x^2/\ln(x) = +\infty$.
  $\lim_{x\to0} \sqrt[3]{x}\ln(x) = 0$.

Autres limites utiles [2] :

- $\lim_{x\to0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
- $\lim_{x\to0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$
- $\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

III Dérivées

Taux d'accroissement, définition de la dérivée, interprétation graphique... voir **[RB]**.

Notations : on note $f'(a)$ pour la dérivée de f en a. Autres notations : $\frac{df}{dx}(a)$, ou encore $\dot{f}(a)$.

Equation de la tangente

Si f est dérivable en a, l'équation de la tangente en a à la courbe représentative de f est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a) \ .$$

Exemples de fonctions non dérivables :

- $f(x) = \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0 (mais on a une tangente horizontale en 0).
- $f(x) = |x|$ n'est pas dérivable en 0 (pas de tangente du tout).

Opérations sur les dérivées, dérivées de fonctions usuelles...

cf. **[RB]**.

Exemple de calcul : dérivée de $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. On obtient

$$(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

1. Ceci n'est pas exigible pour ce cours, mais est très utile pour les calculs de limite en général.
2. pas exigibles à ce point du cours

IV Continuité

N.B. : cette partie n'est pas dans le chapitre 1 de **[RB]**. On peut tout de même se référer au tout début du chapitre 3.

$f : D \to \mathbb{R}$ une fonction.

- Soit $a \in D$. On dit que f est continue en a si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- On dit que f est continue sur D si f est continue en tout point de D.

La continuité signifie que sur chaque intervalle de l'ensemble de définition, '« on peut tracer la courbe de f sans lever le crayon ».

Proposition. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Exercice facultatif : le prouver en utilisant les définitions de continuité et dérivabilité.

Remarque : La réciproque est fausse. Par exemple, la fonction $f(x) = |x|$ est continue en 0 mais pas dérivable en 0.

Théorème des valeurs intermédiaires :

Soit $f : D \to \mathbb{R}$. On suppose que f est **continue**.
Soient $a < b$ tels que l'intervalle $[a, b]$ soit inclus dans D. Si $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

Variante : $f : D \to \mathbb{R}$ continue, $a < b$ tels que l'intervalle $[a, b]$ soit inclus dans D. Soit $\kappa \in \mathbb{R}$. Si $f(a) < \kappa$ et $f(b) > \kappa$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = \kappa$.

Ce théorème permet de déduire des propriétés importantes d'une fonction en utilisant son tableau de variations, voir partie suivante.

V Applications

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur D.

Signe de f' et variations de f

- Si $f'(x) = 0$ sur un intervalle I inclus dans D, alors f est constante sur I.
- Si $f'(x) \geq 0$ sur un intervalle I inclus dans D, alors f est croissante sur I.
- Si $f'(x) \leq 0$ sur un intervalle I inclus dans D, alors f est décroissante sur I.

Une fois qu'on a calculé f' et étudié son signe, ceci permet d'établir le tableau de variations de f. Quand c'est possible, on y ajoute les valeurs de f aux points importants, ainsi que les limites aux bornes de D.

Le tableau de variations permet d'avoir une première approche de la courbe représentative de f. Il permet aussi, en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, de donner des informations sur les solutions d'une équation de la forme

$$f(x) = \kappa$$

(pour un κ donné).
Ceci s'explique mieux à l'aide d'un exemple :

Exercice ($\star$)

Étude de

$$f(x) = \frac{e^{1-x}}{x^2+x+1}$$

(a) Donner le domaine de définition de f.

(b) Calculer la dérivée de f.

(c) Etudier le signe de f'

(d) Calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

(e) Établir le tableau de variations de f.

(f) Tracer sommairement la courbe représentative de f. (on donne $e^3/3 \approx 6,7$ et $e^2 \approx 7,4$)

(g) En se référant au tableau de variations, montrer que l'équation $f(x) = 7$ a 3 solutions : une dans $]-\infty, -2[$, une dans $]-2, -1[$, et une dans $]-1, +\infty[$.

(h) Selon la valeur de κ, donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \kappa$.

À faire

(à préparer pour la séance d'exercices) :

- Exos 1.1 et 1.2 de **[RB]**, p.5
- Exo 3 de la feuille supplémentaire
- Exo ($\star$) ci-dessus

Université du Québec à Montréal **Session d'automne 2011**
Groupe-cours 51 **MAT1112 - Calcul I**
Vivien Ripoll

Résumé des cours 3 et 4 (16 et 19 septembre)

---

*N.B. : ce document est un résumé succinct de ce que nous avons fait en cours ; il peut contenir des remarques supplémentaires. Il est à considérer comme un complément du cours, et sa lecture ne dispense évidemment pas l'étudiant de relire attentivement ses notes personnelles du cours ainsi que le recueil de notes de Robert Bédard. Ce recueil est désigné par la suite « **[RB]** ».*

Chapitre 2 : Fonctions de plusieurs variables, dérivées partielles

J'ai suivi à peu près **[RB]**, avec différents exemples.

I Définition et représentations graphiques

I.1 Définitions et domaine

Exemples donnés :
- $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{x_1+x_2-2x_3}{x_4}$.
  Domaine : $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ où $\mathbb{R}^*$ désigne $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
- $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.
  Domaine : $D = \mathbb{R}^3\backslash\{(0, 0, 0)\}$.
  Rq : $f(x, y, z)$ représente l'inverse de la distance du point (x, y, z) à l'origine.
- en économie, concept d'utilité :
  pour un panier de biens $x_1, \ldots, x_n$ (*i.e.* , quantité x_1 du bien $1, \ldots$), on définit $f(x_1, \ldots, x_n) =$ l'« utilité »de ce panier = un nombre réel positif qui modélise l'utilité que l'on retire de la possession du panier. Le domaine est appelé « espace des biens ». Voir Wikipédia — Fonction d'utilité.

I.2 Représentation graphique

Graphe d'une fonction de 2 variables. Courbes de niveau.

Exemple de $f(x, y) = x^2 + y^2$. Forme de paraboloïde. Les courbes de niveau sont des cercles. Voir **[RB]** pour deux autres exemples.

II Dérivées partielles

Exemple donné :
$f(x, y) = 3yx^2 + \sin(x^2y) + 2x - 3y + 2$.
Calcul de $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Remarque sur l'égalité des dérivées croisées.
Autre exemple :

$f(x,y) = -2x^2y + \cos(xy^2) + e^{xy^3}$. On obtient :

$$\begin{array}{rcl}
\frac{\partial f}{\partial x} & = & -4xy - y^2\sin(xy^2) + y^3e^{xy^3} \\
\frac{\partial f}{\partial y} & = & -2x^2 - 2yx\sin(xy^2) + 3y^2xe^{xy^3} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & = & -4y - y^4\cos(xy^2) + y^6e^{xy^3} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & = & -4x - 2y\sin(xy^2) - 2y^3x\cos(xy^2) + 3y^2(1+y^3x)e^{xy^3} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & = & -4x - 2y\sin(xy^2) - 2y^3x\cos(xy^2) + 3y^2(1+y^3x)e^{xy^3} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & = & -2x\sin(xy^2) - 4x^2y^2\cos(xy^2) + 3yx(2+3y^3x)e^{xy^3}
\end{array}$$

Encore une fois, on remarque que les deux dérivées croisées sont égales. Ceci est générale pour les fonctions « assez régulières », comme on le verra dans le chapitre 5.

III Interprétation géométrique des dérivées partielles

voir dessins du cours et de **[RB]**.

IV Cas de plus de 2 variables

Définitions...
Exemple : $f(x,y,z) = x^2yz + 3e^{xy^2z}$. Calculer les 3 dérivées partielles.

Cas général de n variables. Définition...

Exemple : $f(x_1,\ldots,x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$.
Calculer $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ pour $i \in \{1,\ldots,n\}$.
Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$ pour $i \neq j$ et pour $i = j$.

V Opérations sur les fonctions de plusieurs variables

Exemple pour la composition :
$f(x,y,z) = x^2\sin(y-z)$.
$u(x,y) = x+y$; $v(x,y) = xy$; $w(x,y) = x^2 - y^2$.
Composition : $g(x,y) = f(u(x,y), v(x,y), w(x,y))$. On obtient

$$g(x,y) = (x+y)^2\sin(xy - x^2 + y^2).$$

Chapitre 3 : Continuité

VI Limites

Définition. Voir dessin du cours, et de **[RB]**.

Exemple :
a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2) = 0$.

b) Soit $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, avec $f(0,0) = 0$.
Le long du chemin $y = 0$, on a $f(x,y) = f(x,0) = 0$ qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0. Mais le long du chemin $y = x$, on a $f(x,y) = f(x,x) = \frac{x^2x^2}{x^4+x^4} = \frac{1}{2}$, qui tend vers $\frac{1}{2}$ lorsque x tend vers 0. Donc f n'a pas de limite en $(0,0)$.

VII Continuité

Définitions. Voir cours et **[RB]**.

Université du Québec à Montréal
Groupe-cours 51
Vivien Ripoll

Session d'automne 2011
MAT1112 - Calcul I

Résumé des cours 5 et 6 (23 et 26 septembre)

---

*N.B. : ce document est un résumé succinct de ce que nous avons fait en cours ; il peut contenir des remarques supplémentaires. Il est à considérer comme un complément du cours, et sa lecture ne dispense évidemment pas l'étudiant de relire attentivement ses notes personnelles du cours ainsi que le recueil de notes de Robert Bédard. Ce recueil est désigné par la suite « **[RB]** ».*

Suite du Chapitre 2 : Continuité

Opérations sur les fonctions continues

(voir Prop. 3.1. de **[RB]**).

La plupart des fonctions que l'on verra dans ce cours sont continues sur leur ensemble de définition, car elles sont construites par une suite d'opérations et de compositions à partir de fonctions usuelles continues.

Exemples : $f(x, y) = \exp(\cos(3xy + 4) - 2y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

$g(x, y) = \ln(1 + xy)$ est continue sur son domaine de définition $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ , \ xy > -1\}$.

Mais des problèmes de continuité peuvent se poser lorsque la fonction est défini « par morceaux » (on dit aussi « par parties »). Par exemple lorsque f est donnée par une formule pour $(x, y) \neq (0, 0)$, et $f(0, 0)$ est donnée à part. Voir l'exemple plus bas.

Continuité pour les fonctions à plus de 2 variables

Les définitions et propriétés sont analogues au cas de 2 variables, voir **[RB]** p.19.

Méthode pour étudier la continuité d'une fonction définie par morceaux

Soit $f(x, y)$ une fonction de 2 variables. On suppose par exemple que f est donnée par une formule pour $(x, y) \neq (0, 0)$, et que $f(0, 0)$ est donnée à part. On se demande si f est continue. Nous allons présenter une méthode générale et l'appliquer sur 2 exemples :

$$g(x, y) = \frac{2x^2 - 3y^2}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \ ; \ g(0, 0) = 0.$$

$$h(x, y) = \frac{2x^3 + 3y^3}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \ ; \ h(0, 0) = 0.$$

(1) *Aux points où f est définie par des opérations sur les fonctions usuelles (vérifier d'abord le domaine de définition), on peut affirmer que f est continue.* Ainsi, dans les exemples, g et h sont continues sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$, parce sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ elles sont définies par opérations sur des fonctions continues.

Pour étudier la continuité en $(0,0)$, il faut voir si on a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0).$$

Dans certains cas, la limite est facile à calculer, et on peut conclure rapidement. Ce n'est souvent pas possible directement, par exemple pour les fonctions g et h, la limite en $(0,0)$ n'est pas facilement calculable. Dans ce cas il faut soit trouver une façon de montrer qu'il n'y a pas continuité, soit trouver une façon de montrer qu'il y a continuité. C'est l'objet des points 2 et 3 ci-dessous.

(2) *Pour montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$, il suffit de trouver une chemin (c'est-à-dire une courbe simple) passant par $(0,0)$ et tel que la limite de $f(x,y)$ lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$* ***le long de ce chemin*** *est différente de $f(0,0)$.*

Par exemple, pour la fonction g : sur le chemin $y = 0$, on a, pour tout $x \neq 0$:

$$g(x,y) = g(x,0) = \frac{2x^2}{x^2} = \frac{1}{2} \text{ qui tend vers } \frac{1}{2} \text{ lorsque } x \text{ tend vers } 0.$$

Or $g(0,0) = 0$, donc la limite de $g(x,y)$ pour (x,y) tendant vers $(0,0)$ le long du chemin $y = 0$ est différente de $g(0,0)$. Ceci prouve que g n'est pas continue en $(0,0)$.
Remarque : on aurait pu prendre un autre chemin : par exemple le chemin $x = 0$ (la limite aurait été -3), ou encore le chemin $y = x$ (la limite est alors $-1/2$)... Mais, pour pouvoir conclure que g n'est pas continue en $(0,0)$, il suffit d'en trouver *un seul* tel que la limite n'est pas celle attendue.

En pratique, dans les exercices, si f n'est pas continue en $(0,0)$ il va suffire de tester quelques chemins simples pour le prouver :

$$x = 0 \ ; \ y = 0 \ ; \ x = y \ ; \ x = -y \ ; \ y = x^2 \ ; \ x = y^2 \dots$$

Si on ne trouve pas de tels chemins (essayez les chemins ci-dessus pour h par exemple), on se doute que f doit être continue en $(0,0)$, mais il va falloir le prouver.

(3) Pour prouver que f est continue en $(0,0)$, le plus simple est souvent de majorer $|f(x,y) - f(0,0)|$ par une fonction dont on sait qu'elle tend vers 0 pour $(x,y) \to (0,0)$. Ceci impliquera alors que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$ en utilisant la propriété générale suivante :

Proposition 1. *Soit $u(x,y)$ et $v(x,y)$ deux fonctions définies sur un domaine D, et $(a,b) \in D$. On suppose que*

$$|u(x,y)| \leq v(x,y) \quad \textit{pour tout } (x,y) \textit{ assez proche de } (a,b) \ ,$$

et que $\lim_{(x,y)\to(a,b)} v(x,y) = 0.$

Alors : $\lim_{(x,y)\to(a,b)} u(x,y) = 0.$

La partie difficile est souvent de trouver la bonne majoration.
Exemple pour la fonction h : on a $h(0,0) = 0$, donc on veut majorer $|h(x,y)|$ par une fonction plus simple dont on sait qu'elle tend vers 0 en $(0,0)$. On a :

$$|h(x,y)| = \left| \frac{2x^3 + 3y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{2|x^3|}{x^2 + y^2} + \frac{3|y^3|}{x^2 + y^2} \quad (*)$$

en utilisant *l'inégalité triangulaire* ($|a + b| \leq |a| + |b|$).

Ensuite, notons que $x^2+y^2 \geq x^2$, donc $\frac{2|x^3|}{x^2+y^2} \leq \frac{2|x^3|}{x^2} = 2|x|$.
De même, $x^2+y^2 \geq y^2$ donc $\frac{3|y^3|}{x^2+y^2} \leq \frac{3|y^3|}{y^2} = 3|y|$.
En revenant à l'inégalité (*), on obtient :

$$|h(x,y)| \leq 2|x| + 3|y|.$$

Définissons la fonction de deux variable $v(x,y) = 2|x| + 3|y|$. Par opérations sur les limites, on a :

$$\begin{array}{rcl} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} v(x,y) & = & \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 2|x| + \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 3|y| \\ & = & \lim\limits_{x\to 0} 2|x| + \lim\limits_{y\to 0} 3|y| \\ & = & 0+0 \\ & = & 0. \end{array}$$

Donc en utilisant la Proposition ci-dessus, on en déduit que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = 0$, donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = h(0,0)$. Conclusion : h est continue en $(0,0)$.

De nombreux autres exemples pour vous entraîner sont dans les exercices 1 à 5 de **[RB]**.

Chapitre 4 : Approximation linéaire, gradient et dérivées directionnelles

I Compléments sur les fonctions à une variable

I.1 Approximation linéaire

Voir page 21 de **[RB]**.
exemple traité : donner une estimation numérique de $\sqrt{1.005}$.
On pose $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 1$, $h = 0.005$.
L'approximation linéaire nous dit : $f(a+h) \simeq f(a) + f'(a)h$.
Ici on a : $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Donc on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{1.005} & \simeq & \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}} 0.005 \\ & \simeq & 1.0025. \end{array}$$

Autre exemple : estimer $\sin(46\,\mathrm{deg})$ à partir de $\sqrt{2}$ et π.

Remarque : Appelons T_a la fonction affine dont le graphe est la tangente de la courbe de f au point a. L'approximation linéaire nous dit exactement : si x est proche de a, alors $f(x)$ est à peu près égal à $T_a(x)$. Et on se souvient qu'au premier chapitre on a montré que : $T_a(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$.

L'approximation linéaire, c'est approcher la courbe de f au voisinage de a par sa tangente en a.

I.2 Théorème des accroissements finis

C'est le théorème 4.1. de **[RB]**, qui y est appelé (par erreur) théorème de la valeur intermédiaire.

Interprétation graphique en utilisant une corde et une tangente.

Ce thèorème est fondamental en analyse des fonctions à une variable, et il sera utile dans ce cours pour démontrer d'autres théorèmes sur les fonctions à plusieurs variables : l'idée est qu'il permet de contrôler la valeur d'une différence de la forme $(f(x) - f(y))$ à partir d'informations sur la dérivée de f.

Note : Cas particulier (connu sous le nom de « Théorème de Rolle ») :
$f(x)$ fonction d'une variable réelle, continue sur $[a, b]$, dérivable (au moins) sur $]a, b[$. On suppose $f(a) = f(b)$.
Alors il existe $c \in]a, b[$, tel que $f'(c) = 0$.

Interprétation graphique...
Rq : essayer de trouver des exemples qui montre que l'hypothèse de continuité est nécessaire dans ce théorème. De même avec l'hypothèse de dérivabilité.

II Approximation linéaire pour les fonctions à plusieurs variables

II.1 Théorème d'approximation linéaire pour les fonctions à deux variables

Enoncé et explication du Théorème 4.2. de **[RB]**.

Ecriture imagée :

$$"\Delta z \simeq \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)} \Delta x \ + \ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b)} \Delta y".$$

II.2 Application : estimation numérique

Soit $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + 2y^3 + 2}$. On veut estimer la valeur de $f(2.01, 1.04)$.
On pose $(a, b) = (2, 1)$, $(h, k) = (0.01, 0.04)$. Le théorème nous dit :

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)} h \ + \ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b)} k.$$

On calcule $f(2, 1) = 2$, et

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{3(\sqrt[3]{x^2 + 2y^3 + 2})^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y^2}{(\sqrt[3]{x^2 + 2y^3 + 2})^2}$$

donc $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(2,1)} = \frac{1}{3}$ et $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(2,1)} = \frac{1}{2}$. On obtient :

$$\begin{array}{rcl} f(2.01, 1.04) & \simeq & 2 + \frac{1}{3}0.1 + \frac{1}{2}0.4 \\ & \simeq & 2.233. \end{array}$$

II.3 Plan tangent

Il représente géométriquement l'approximation linéaire. *L'approximation linéaire pour une fonction à deux variables, c'est approcher le graphe de f au voisinage d'un point (a, b) par son plan tangent en (a, b).*
Voir **[RB]**, bas de la p.23, pour l'équation du plan tangent (à connaître). Voir la figure 4.3.

II.4 Approximation pour les fonctions à plus de 2 variables

Les théorèmes sont analogues au cas de 2 variables. Voir Théorèmes 4.2' et 4.2." dans **[RB]**.

III Gradient et dérivées directionnalles

III.1 Dérivées directionnelles

Définition d'une direction, et d'une dérivée directionnelle. Interprétation géométrique. Voir **[RB]**, bas de la p.25, et figure 4.4.

Université du Québec à Montréal
Groupe-cours 51
Vivien Ripoll

Session d'automne 2011
MAT1112 - Calcul I

Résumé des cours 7 et 8 (30 septembre et 3 octobre)

---

*N.B. : ce document est un résumé succinct de ce que nous avons fait en cours ; il peut contenir des remarques supplémentaires. Il est à considérer comme un complément du cours, et sa lecture ne dispense évidemment pas l'étudiant de relire attentivement ses notes personnelles du cours ainsi que le recueil de notes de Robert Bédard. Ce recueil est désigné par la suite « **[RB]** ».*

On a vu le contenu des pages 26 à 32 de **[RB]**. J'ai suivi à peu près le plan du recueil de notes ; seuls les exemples traités diffèrent.

Suite du Chapitre 4

Dérivées directionnelles

Interprétation géométrique des dérivées directionnelles : pente de la tangente de la courbe obtenue par intersection du graphe de f avec la direction donnée. Voir Figure 4.4 p.26 de **[RB]**.

Exemple de calcul de dérivée directionnelle :
$f(x,y) = x^2 + xy + y^3 + 2$. On a calculé, en un point (a,b) et pour un vecteur unitaire $\vec{u} = (u_x, u_y)$, la dérivée directionnelle $f'(\vec{u},(a,b))$. On a remarque l'égalité

$$f'(\vec{u},(a,b)) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)} u_x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b)} u_y.$$

Énoncé de la propriété générale pour le calcul des dérivées directionnelles qui dit que, sous certaines hypothèses de régularité (en gros : les dérivées partielles de f doivent être continues au voisinege de (a,b)), l'égalité ci-dessus est valable tout le temps. Donc on peut dans ces cas-là calculer n'importe quelle dérivée directionnelle à partir des deux dérivées partielles.

Remarque : la démonstration de cette formule est assez facile, en utilisant le théorème d'approximation linéaire. (voir p.26-27 de **[RB]**).

Exemple de calcul en utilisant la formule :
$f(x,y) = xy^2 + 3x^3y$. On a calculé :
$f'((\sqrt{3}/2, 1/2),(1,2)) = 11\sqrt{3} + 7/2$.

Gradient

Définition et notation du gradient.
Rappel de définition(s) du produit scalaire.

En utilisant le gradient, reformulation de la formule de la dérivée directionnelle :

$$f'(\vec{u},(a,b)) = \left.\vec{\nabla}(f)\right|_{(a,b)} \cdot \vec{u}.$$

Corollaire : caractérisation du gradient (Corollaire 4.1. de**[RB]**) : sa direction est celle pour laquelle la dérivée directionnelle est maximale ; sa longueur est la valeur de ce maximum. Démonstration de cette propriété.

On peut dire que le gradient "indique" la direction, dans le plan des x, y, de la "ligne de plus grande pente" ; et sa longueur est égale à la pente de cette "ligne".

Exemple donné : $f(x, y) = x^2 + y^2$. On a calculé le gradient, et tracé les courbes de niveau et les gradients sur le même dessin. On remarque que le gradient en un point est perpendiculaire à la courbe de niveau en ce point. (c'est une propriété générale qu'il est possible de démontrer)

A plus de deux variables

Les définitions et propriétés sont analogues ; voir p.28-29 de **[RB]**.

Chapitre 5 : règle de chaînes, égalité des dérivées partielles mixtes

I Règle de chaînes

Le but est de calculer les dérivées partielles pour les fonctions définies par composition.

Énoncé des formules de la règle de chaînes, pour deux variables, puis dans le cas général.

Exemple calculé :
$w = f(u, v) = 2u^2 - v^3$, avec
$u(x, y) = x^2 + y^2$ et $v(x, y) = -2xy$.
On obtient
$\frac{\partial w}{\partial x} = 8y^2x + 8x^3 + 24y^3x^2$ et $\frac{\partial w}{\partial y} = 8x^2y + 8y^3 + 24x^3y^2$.

Université du Québec à Montréal **Session d'automne 2011**
Groupe-cours 51 **MAT1112 - Calcul I**
Vivien Ripoll

Résumé du cours 9 (7 octobre)

---

*N.B. : ce document est un résumé succinct de ce que nous avons fait en cours ; il peut contenir des remarques supplémentaires. Il est à considérer comme un complément du cours, et sa lecture ne dispense évidemment pas l'étudiant de relire attentivement ses notes personnelles du cours ainsi que le recueil de notes de Robert Bédard. Ce recueil est désigné par la suite « **[RB]** ».*

Nous avons fini le chapitre 5, en donnant plusieurs exemples et applications de la règle de chaînes, puis énoncé le théorème d'égalité des dérivées partielles mixtes. Ces notes de cours sont assez longues, car elles contiennent plusieurs compléments et précisions sur le cours.

Suite du Chapitre 5

I Règle de chaînes

I.1 Cas de 2 variables

Voir cours précédent.

I.2 Cas général

Énoncé de la formule générale (voir Proposition 5.1' de **[RB]**). Si $u_1, \dots, u_k$ sont k fonctions de n variables $x_1, \dots, x_n$, la formule dit comment calculer les dérivées partielles par rapport à un x_i d'une expression de la forme

$$f(u_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_k(x_1, \dots, x_n)) \ ,$$

à partir des dérivées de f par rapport à ses k variables et à partir des dérivées partielles des fonctions u_j par rapport à cet x_i.

Remarque : Vérifier que dans le cas $n = 1$, $k = 1$, on retrouve la formule de dérivation d'une fonction composée

$$(fog(x))' = f'(g(x)) \times g'(x).$$

Vérifier que dans le cas $n = 2$, $k = 2$, on retrouve la formule du début du chapitre.

Explication du nom "règle de chaînes" et moyen mnémotechnique : si f dépend de (par exemple) 3 variables u, v, w, qui elles-mêmes chacune dépendent de 3 variables x, y, z, écrivons

$$g(x, y, z) = f(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)).$$

Pour calculer la dérivée partielle $\frac{\partial g}{\partial y}$ (par exemple), on regarde où se trouvent la ou les dépendances en y dans l'écriture de g. Pour chacune des dépendances, on écrit la chaîne de dépendance qui va de f à y : par exemple, la chaîne passant par u signifie :

(a) "f dépend de u, qui dépend elle-même de y". Mais on a aussi :

(b) "f dépend de v, qui dépend elle-même de y" ; et

(c) "f dépend de w, qui dépend elle-même de y".

Pour chacune de ces chaînes ainsi construites, on écrit le produit des dérivées partielles correspondantes : on obtient

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial u} \times \dfrac{\partial u}{\partial y}$ pour la chaîne (a).

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial v} \times \dfrac{\partial v}{\partial y}$ pour la chaîne (b).

(c) $\dfrac{\partial f}{\partial w} \times \dfrac{\partial w}{\partial y}$ pour la chaîne (c).

On fait ensuite la somme de ces produits, et on obtient la formule de la règle de chaînes :

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w} \times \frac{\partial w}{\partial y}.$$

On peut procéder de même pour calculer $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial z}$.

Cette façon de voir les choses est intéressante si elle vous permet de mieux comprendre les formules. Si elle apporte de la confusion, il n'est pas nécessaire de la comprendre en détails.

Remarque importante : Souvent, pour simplifier l'écriture, on ne définira pas la fonction g. On considère que f est une fonction soit des 3 variables u, v, w, soit des 3 variables x, y, z, et la règle de chaînes permet donc de calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, et $\frac{\partial f}{\partial z}$ à partir de $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$, et $\frac{\partial f}{\partial w}$ et des dérivées partielles de u, v, w par rapport à x, y, z. C'est le cas par exemple pour les notations de l'exercice 5.1 de **[RB]**.

I.3 Exemple de calculs

(a) Soit $f(u, v, w)$ une fonction de 3 variables quelconques, qui admet des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$, et $\frac{\partial f}{\partial w}$. Posons
$$g(x, y, z) = f(xyz, e^x y \sin(z), \cos(2x^2 + yz)).$$
On a donc ici $u(x, y, z) = xyz$; $v(x, y, z) = e^x y \sin(z)$; $w(x, y, z) = \cos(2x^2 + yz)$. Alors :
$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} \\
&= \frac{\partial f}{\partial u} \times yz + \frac{\partial f}{\partial v} \times e^x y \sin(z) + \frac{\partial f}{\partial w} \times (-2x \sin(2x^2 + yz)). \\
\frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} \\
&= \frac{\partial f}{\partial u} \times xz + \frac{\partial f}{\partial v} \times e^x \sin(z) + \frac{\partial f}{\partial w} \times (-z \sin(2x^2 + yz)). \\
\frac{\partial g}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z} \\
&= \frac{\partial f}{\partial u} \times xy + \frac{\partial f}{\partial v} \times e^x y \cos(z) + \frac{\partial f}{\partial w} \times (-y \sin(2x^2 + yz)).
\end{aligned}$$

(b) Soit $f(u, v, w) = ue^{v^2 - w^2}$. On considère la fonction
$$g(x) = f(x^2, \ln x, \sin x).$$

On pose donc $u(x) = x^2$; $v(x) = \ln x$; $w(x) = \sin x$. La fonction g n'a qu'une variable, donc on a $\frac{\partial g}{\partial x} = g'(x)$. Calculons cette dérivée avec la règle de chaînes :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} \\ &= e^{v^2-w^2} \times 2x + 2uve^{v^2-w^2} \times \frac{1}{x} + (-2uwe^{v^2-w^2}\cos(x) \\ &= 2xe^{\ln^2(x)-\sin^2(x)}(x + \ln(x) - x\sin(x)\cos(x)). \end{aligned}$$

Note : si on est courageux, on peut vérifier que l'on trouve le même résultat en dérivant directement l'expression développée de $g(x)$.

(c) Soient $u(x)$ et $v(x)$ deux fonctions quelconques d'une variable x. On suppose qu'elles sont dérivables. On pose $f(u, v) = uv$, et on définit

$$g(x) = f(u(x), v(x)) = u(x)v(x).$$

D'après la formule pour la dérivée d'un produit, on sait que $g'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. On va retrouver cette formule en utilisant la règle de chaînes.

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{, donc} \\ g'(x) &= v \times u'(x) + u \times v'(x) \\ &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x). \end{aligned}$$

Exercice : Utiliser la même méthode pour montrer que

$$(u(x)v(x)w(x))' = u'(x)v(x)w(x) + u(x)v'(x)w(x) + u(x)v(x)w'(x).$$

Essayer de donner une formule générale pour la dérivée d'un produit de k fonctions d'une variable (pour k un entier ≥ 2), c'est-à-dire pour calculer $(u_1(x)u_2(x)\dots u_k(x))'$.

II Applications

II.1 Équations aux dérivées partielles

Une équation aux dérivées partielles (EDP) est une équation où l'inconnue est une fonction f de plusieurs variables, et où apparaissent certaines dérivées partielles de f, ainsi que d'autres fonctions données. Par exemple, voici une EDP compliquée pour une fonction de 3 variables :

$$yz\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y\sin(xz)\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + x^2y\frac{\partial f}{\partial x} - 3x\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z} + \cos(xy)f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^3.$$

Les équations aux dérivées partielles sont très importantes en modélisation mathématique, car de très nombreux phénomènes physiques, météorologiques, économiques, statistiques, biologiques..., sont décrits par des EDP. Pour des exemples, voir l'exercice 1 du Devoir 1, et la page Wikipédia.

Très souvent, les EDP qui régissent ces phénomènes sont trop compliquées pour être résolues exactement ; on est forcé de simplifier les équations, ou de trouver des méthodes pour résoudre les EDP numériquement, de manière approchée. Ceci est bien au-delà du programme de ce cours. Ici, on va simplement décrire comment, en utilisant la règle de chaînes, on va être capable de résoudre complètement des EDP simples.

Dans tous les exemples et exercices de ce cours, la situation sera de ce type :

- On se donne une EDP “simple” (E).
- On vérifie qu'une (ou plusieurs) fonction donnée est solution de (E).
- On vérifie que toutes les fonctions “d'une certaine forme” sont solutions de (E).
- On utilise un *changement de variable* (proposé par l'énoncé) pour montrer que toute solution de (E) s'écrit nécessairement sous cette certaine forme.
- On conclut sur la résolution de (E).

Nous allons illustrer ces points avec l'EDP suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{E}$$

(a) Vérifier que la fonction $f(x,y) = x - y$ est solution de (E). Même question pour la fonction $g(x,y) = \sin(y - x)$.
C'est facile : il suffit de calculer les dérivées partielles et de reporter dans l'équation.

(b) Vérifier que toute fonction de la forme $f(x,y) = h(x - y)$ (avec h une fonction quelconque d'une variable, dérivable) est solution de (E).

Posons $u = x - y$. On a : $f(x,y) = h(u)$. En utilisant la règle de chaînes, on calcule :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = h'(u) \times 1 = h'(u) \quad \text{, et} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} = h'(u) \times (-1) = -h'(u).
\end{aligned}$$

On obtient bien $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, donc f est solution de (E).

(c) Le but de cette question est de montrer la réciproque du point précédent, c'est-à-dire : toute fonction qui est solution de (E) est de la forme $f(x,y) = h(x - y)$.

L'idée est de faire un *changement de variables* pour faire apparaître le $(x - y)$. De façon générale, un changement de variables est l'opération consistant à remplacer les variables x, y par d'autres variables u, v, qui dépendent de x, et y, et telle qu'on peut aussi exprimer les variables d'origine x et y à partir des nouvelles variables u et v (on dit que le changement de variables est “inversible”).
Note : s'il y a 3 variables x, y, z, on doit définir 3 nouvelles variables ; il y aura toujours autant de nouvelles variables que de variables d'origine.

Dans le cas présent, on définit le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases}$$

Notez qu'on peut inverser ce système d'équations et exprimer facilement x et y en fonction de u et v :

$$\begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{v-u}{2} \end{cases}$$

Remarque importante : Ici le changement de variables est défini pour $\mathbb{R}^2$ en entier, mais parfois, pour que cela ait un sens, ou pour qu'on puisse inverser, on devra considérer le changement de variables seulement sur une partie de $\mathbb{R}^2$ (voir l'exemple p. 35 de **[RB]**).

Soit $f(x,y)$ une fonction de x et y. Supposons que f est solution de (E). On va construire une nouvelle fonction de 2 variables, en u et v cette fois, qui correspond à f. On pose :

$$g(u,v) = f(x,y).$$

C'est-à-dire, g est définie à partir de f par la formule suivante : $g(u,v) = f(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2})$. Remarquez qu'on a aussi :

$$f(x,y) = g(x-y, x+y).$$

(c'est bien pratique, parce que pour résoudre le problème il ne nous reste plus qu'à montrer que g ne dépend pas de sa 2e variable).

En utilisant la règle de chaînes, nous allons calculer les dérivées partielles de f en fonction de celles de g :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\
&= \frac{\partial g}{\partial u} \times 1 + \frac{\partial g}{\partial v} \times 1 \\
&= \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} \qquad\qquad , \text{et} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \\
&= \frac{\partial g}{\partial u} \times (-1) + \frac{\partial g}{\partial v} \times 1 \\
&= -\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}
\end{aligned}$$

Donc on a : $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 2\frac{\partial g}{\partial v}$. Si on écrit que f vérifie l'équation (E), on obtient que g vérifie l'équation

$$\frac{\partial g}{\partial v} = 0 \tag{E'}$$

Or, cette équation (E') est très facile à résoudre : elle signifie que g est contante vis-à-vis de la variable v, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas de v. Donc il existe une fonction h d'une variable, telle que

$$g(u,v) = h(u).$$

Ce qui nous donne en revenant à f : $f(x,y) = h(x-y)$; et ceci conclut le point(c).

(d) Conclusion : grâce aux points (b) et (c), on a une description complète de l'ensemble des solutions de l'équation (E). Une fonction f est solution de (E) si et seulement si elle peut s'écrire $h(x-y)$, où h est n'importe quelle fonction d'une variable, dérivable.

Remarque importante : Notez bien que pour affirmer ceci on a besoin à la fois du point (b) et du point (c). On peut commencer par le (c), c'est-à-dire montrer d'abord, avec le changement de variable, que toute solution s'écrit sous la forme $h(x-y)$; mais il ne faut pas oublier de vérifier ensuite que toutes les fonctions de cette forme-là sont bien solutions (c'est en général facile).

Exercice : En utilisant le même changement de variable que ci-dessus, montrer que les solutions de l'EDP suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

sont les fonctions de la forme $h(x+y)$, où h est n'importe quelle fonction d'une variable, dérivable.

Il est vivement conseillé de regarder l'exemple (légèrement plus compliqué) traité dans **[RB]** (p. 35). On a une EDP différente, et on fait un changement de variable différent.

Les exercices 3, 4 et 5 de ce chapitre sont à faire en suivant ce modèle.

En fait, dans pratiquement tous les exemples de ce cours, l'ensemble des solutions aura toujours la même forme : ce seront des fonctions de la forme $h(u(x,y))$, où h est n'importe quelle fonction d'une variable, et u est une fonction dépendant de l'équation étudiée (dans l'exemple de ces notes de cours : $(x-y)$; dans l'exemple de **[RB]** : (xy^2)...). Ceci vient de la propriété générale suivante, que nous laissons en exercice facultatif :

Exercice : On considère une EDP de la forme suivante :

$$a(x,y)\frac{\partial f}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{E}$$

où $a(x,y)$ et $b(x,y)$ sont des fonctions données quelconques. Soit f une solution de (E). Soit h une fonction quelconque d'une variable, dérivable. On pose $g(x,y) = h(f(x,y))$. Montrer qu'alors g est aussi une solution de (E).

C'est-à-dire : "toute fonction d'une solution est encore une solution". *Attention :* ceci n'est pas valable de manière générale, mais seulement pour les EDP de la forme ci-dessus.

II.2 Gradient et courbes de niveau

La règle de chaînes est également utile en ce qu'elle permet de montrer de nombreuses propriétés générales sur les fonctions de plusieurs variables. L'une d'elles a une très jolie interprétation géométrique, que nous allons présenter ci-dessous.

Nous allons expliquer et démontrer la propriété suivante : si f est une fonction de deux variables, suffisamment régulière, alors le gradient de f en un point est toujours "perpendiculaire" à la ligne de niveau de f passant par ce point.

a. Idée intuitive, avec la dérivée directionnelle

Soit f une fonction de deux variables, et (a,b) un point de son domaine de définition. On suppose que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur un rectangle dont l'intérieur contient le point (a,b). On peut alors appliquer la Proposition du cours qui fait le lien entre dérivée directionnelle et gradient :

$$\text{Pour n'importe quelle direction } \vec{u}, \qquad f'(\vec{u},(a,b)) = \vec{\nabla}(f)|_{(a,b)} \cdot \vec{u}.$$

Si on note θ l'angle entre le vecteur $\vec{u}$ et le vecteur gradient en (a,b), on a :

$$f'(\vec{u},(a,b)) = \left|\left|\vec{\nabla}(f)|_{(a,b)}\right|\right| \cos(\theta).$$

On avait étudié le cas $\theta = 0$ pour montrer la caractérisation du gradient dans le chapitre précédent. Supposons maintenant que $\theta = \frac{\pi}{2}$. Alors $f'(\vec{u},(a,b)) = 0$. Géométriquement, cela signifie que si, en se promenant sur le graphe de f, on part dans une direction perpendiculaire à celle du gradient, alors "on est sur du plat" (car la dérivée directionnelle représente la pente de la tangente à la courbe obtenue par intersection du graphe avec le plan vertical contenant la direction considérée). Cela donne l'idée intuitive que, si l'on part perpendiculairement au gradient, on suit une ligne de niveau.

Nous allons montrer cette propriété précisément.

b. Démonstration

Nous avons d'abord besoin de quelques rappels ou précisions sur les courbes paramétrées.

Toute courbe $\mathcal{C}$ tracée dans $\mathbb{R}^2$ peut se définir comme une courbe paramétrée, à partir de deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ bien choisies, c'est-à-dire :

$$\mathcal{C} = \{(x(t), y(t)) \text{ , pour } t \in \mathbb{R}\}.$$

(on peut interpréter $\mathcal{C}$ comme la trajectoire d'un point matériel dans le plan, dont les coordonnées au temps t sont $(x(t), y(t))$.)

Si les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont dérivables, alors un vecteur directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point $(x(t_0), y(t_0))$ est le vecteur $(x'(t_0), y'(t_0))$. (exemple : tracer la courbe et quelques tangentes pour la courbe paramétrée d'équations $x(t) = 2\cos t$, $y(t) = 2\sin t$.)

Définition : Soit un point $M_0 = (x(t_0), y(t_0))$ appartenant à la courbe $\mathcal{C}$. On dit qu'un vecteur $\vec{n}$ de $\mathbb{R}^2$ est *normal* (ou perpendiculaire) à la courbe $\mathcal{C}$ en M_0 s'il est perpendiculaire à la tangente à $\mathcal{C}$ en M_0, c'est-à-dire si :

$$x'(t_0) \times n_x + y'(t_0) \times n_y = 0.$$

(produit scalaire de $\vec{n} = (n_x, n_y)$ avec un vecteur directeur de la tangente $(x'(t_0), y'(t_0))$.)

Armés de ces définitions, nous pouvons démontrer la propriété suivante :

Proposition. *Soit $f(x, y)$ une fonction de deux variables. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On suppose que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur un rectangle dont l'intérieur contient le point (a, b).*

Soit $\mathcal{C}$ une courbe de niveau de la fonction f, contenant (a, b). Alors le gradient $\overrightarrow{\nabla}(f)|_{(a,b)}$ est normal à la courbe $\mathcal{C}$ en (a, b).

Démonstration : La courbe $\mathcal{C}$ est une courbe de niveau de f, donc pour tout point (x, y) de $\mathcal{C}$, $f(x, y) = k$, avec un $k \in \mathbb{R}$ fixé. Soit $(x(t), y(t))$ une paramétrisation de la courbe $\mathcal{C}$. On a donc :

$$\text{Pour tout } t \in \mathbb{R},\ f(x(t), y(t)) = k.$$

Dérivons cette égalité par rapport à t. En utilisant la règle de chaînes, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x} \times x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} \times y'(t) = 0. \tag{*}$$

Le point (a, b) est dans $\mathcal{C}$, donc il existe t_0 tel que $(x(t_0), y(t_0)) = (a, b)$. Écrivons l'égalité (*) pour $t = t_0$. On obtient :

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)} x'(t_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b)} y'(t_0) = 0.$$

Cela signifie que le produit scalaire du gradient de f en (a, b) avec le vecteur $(x'(t_0), y'(t_0))$ (vecteur tangent à $\mathcal{C}$ en (a, b)) vaut zéro. Donc le gradient de f en (a, b) est normal à la courbe $\mathcal{C}$ en (a, b).

c. Avec 3 variables : gradient et surfaces de niveau

Cette propriété se généralise au cas d'une fonction de 3 variables. Sous certaines conditions de régularité d'une fonction $f(x, y, z)$, on peut montrer que son gradient en un point (a, b, c) est normal à la surface de niveau qui passe par le point (a, b, c). Pour cela, il faut définir proprement ce que veut dire "normal à la surface". Ensuite, la démonstration est tout à fait analogue au cas de 2 variables. Vous pouvez lire ceci en pages 33-34 de **[RB]** (autour du Corollaire 5.1).

Remarque : Soit $\mathcal{S}$ une surface de la forme $f(x, y, z) = k$, où k est une constante. La propriété nous dit que pour calculer un vecteur normal à la surface $\mathcal{S}$ en un point (a, b, c), il suffit de calculer le gradient de f en (a, b, c). Cela donne une autre interprétation graphique du gradient, et permet de donner des informations géométriques sur la surface $\mathcal{S}$ à partir du gradient. L'exercice 2 de ce chapitre est un exercice d'application de cette propriété.

III Égalité des dérivées partielles mixtes

Énoncé du théorème. (Proposition 5.2. de **[RB]**).

L'égalité est toujours vraie pour les fonctions où il n'y a pas de problèmes de continuité et de dérivabilité, en particulier pour toutes les fonctions usuelles sur leur intervalle de définition.

Remarque : Si les hypothèses du théorème ne sont pas vérifiées, il se peut que les deux dérivées partielles mixtes ne soient pas égales. L'exercice 9 du chapitre 2 (p. 16) donne un cas où cela arrive.

Université du Québec à Montréal
Groupe-cours 51
Vivien Ripoll

Session d'automne 2011
MAT1112 - Calcul I

Résumé des cours 10, 11, 12 (14, 17, 21 octobre)

---

*N.B. : ce document est un résumé succinct de ce que nous avons fait en cours ; il peut contenir des remarques supplémentaires. Il est à considérer comme un complément du cours, et sa lecture ne dispense évidemment pas l'étudiant de relire attentivement ses notes personnelles du cours ainsi que le recueil de notes de Robert Bédard. Ce recueil est désigné par la suite « **[RB]** ».*

1 Chapitre 6 : Extrema locaux, optimisation

Tous les exemples de ce chapitre (ainsi que des exemples supplémentaires) sont illustrés dans la feuille de travail Sage http ://sage.lacim.uqam.ca/home/pub/12/. Il est conseillé de consulter cette feuille qui contient de nombreuses figures explicatives en parallèle avec ces notes de cours.

I Cas des fonctions d'une variable

Soit $f(x)$ une fonction d'une variable, définie sur un domaine D. On la suppose dérivable sur D.

Définition. Soit $a \in D$.

- a est un *point critique* de f si $f'(a) = 0$. (le graphe de f a une tangente horizontale en a).
- f admet un *maximum local* en a s'il existe u, v tels que $u < a < v$ avec

$$\forall x \in [u, v],\ f(x) \leq f(a)\ .$$

- f admet un *minimum local* en a s'il existe u, v tels que $u < a < v$ avec

$$\forall x \in [u, v],\ f(x) \geq f(a)\ .$$

- *extremum* signifie “maximum ou minimum”.

Proposition. *Si f a un extremum local en a, alors a est un point critique de f.*

Attention : la réciproque n'est pas vraie. La proposition dit que les extrema sont à chercher parmi les points critiques, mais il peut y avoir des points critiques qui ne donnent ni un maximum ni un minimum. (ex : $f(x) = x^3$ au point 0).

Test important pour savoir si un point critique donne un maximum ou un minimum :

Proposition. *Soit f est deux fois dérivable, et f'' est continue. Soit a un point critique de f.*

1. Si $f''(a) > 0$, alors f admet un minimum local en a.

2. Si $f''(a) < 0$, alors f admet un maximum local en a.

3. Si $f''(a) = 0$, on ne peut pas conclure.

Rq : quand on ne peut pas conclure, on peut tout de même parfois étudier le point critique par d'autres moyens.

Ex. (et moyen mnémotechnique pour le signe de $f''(a)$) : étudier les cas des fonctions $f(x) = x^2, -x^2, x^3, x^4$.

Exercice : Calculer les points critiques et les extrema locaux de :

(a) $f(x) = \sin(x)$.

(b) $g(x) = 8x^5 - 35x^4 + 20x^3 - 3$.

II Points critiques et extrema locaux pour les fonctions de deux variables

On définit un maximum local, un minimum local, et un point critique, de façon un peu similaire au cas d'une fonction d'une variable. Voir cours et **[RB]** p.39.

On a encore la propriété : si f a un extremum local au point (a,b), alors (a,b) est un point critique de f.

Rq : ces définitions et ces propriétés restent valides pour une fonction d'un nombre quelconque de variables.

Pour une fonction de deux variables, il y a ici aussi un test (utilisant les dérivées partielles d'ordre 2) pour déterminer si un point critique donne lieu à un minimum local ou un maximum local, ou autre chose. Voir Prop. 6.2 p.41 de **[RB]**.

Pour chaque point critique (a,b) de f, on calcule la matrice hessienne de f en (a,b) :

$$H(f)|_{(a,b)} = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(a,b)} & \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(a,b)} \\ \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right|_{(a,b)} & \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(a,b)} \end{pmatrix}$$

(ce doit être une matrice symétrique). Puis on calcule un "discriminant" Δ (c'est en fait l'opposé du déterminant de la matrice) :

$$\Delta = \left(\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(a,b)} \right)^2 - \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(a,b)} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(a,b)}$$

Si on note la matrice hessienne en (a,b)

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix},$$

la formule pour Δ est $\Delta = B^2 - AC$.

Le critère est alors le suivant :

(a) si $\Delta < 0$, alors f admet en (a,b) un extremum local, et :
   1. si $A < 0$, cet extremum est un maximum local
   2. si $A > 0$, cet extremum est un minimum local

(b) si $\Delta > 0$, alors $(a, b, f(a,b))$ est un point-selle du graphe de f (on dit aussi un point-col) : en particulier, ce n'est ni un maximum, ni un minimum.

(c) dans tous les autres cas, on ne peut pas conclure.

Exemple traité en cours :

$f(x,y) = yx^2 - x^3 + 8x - \frac{4}{3}y^3 + 28$.

Nous avons trouvé quatre points critiques, et le test donne les résultats suivants :

- point critique $(2,1)$: la fonction f a un maximum local en $(2,1)$.
- point critique $(-2,-1)$: la fonction f a un minimum local en $(2,1)$.
- point critique $(\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$: le point $(\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},f(\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}))$ est un point-selle du graphe de f.
- point critique $(-\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$: le point $(-\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2},f(-\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2}))$ est un point-selle du graphe de f.

Autres exemples :

Trouver les points critiques, et étudier leur nature, pour les fonctions suivantes :

(a) $u(x,y) = 6xy - 3x^2 - 5y^2 - 6x + 7 - 12y$.

(b) $v(x,y) = 3y^2 - 2x^2 + 8xy + 16x - 10y + 4$.

Tous ces exemples sont illustrés par les graphes des fonctions dans la feuille de travail Sage du chapitre 6.

III Optimisation sous contrainte

III.1 Présentation du problème

On veut trouver le maximum ou le minimum d'une fonction $f(x,y)$ (ou $f(x,y,z)$), mais les variables x,y (resp. x,y,z) ne sont pas “libres”, elles sont “forcées” (contraintes) de se trouver sur une partie de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$), définie par une équation de la forme $g(x,y) = 0$ (resp. $g(x,y,z) = 0$). C'est-à-dire qu'on veut que le point (x,y) (resp. (x,y,z)) soit sur la courbe (resp. surface) de niveau 0 de g.

On appelle l'équation $g = 0$ la contrainte du problème, et on dit qu'on fait de l'*optimisation sous contrainte*. On parle aussi du problème des *extrema liés.*

Un maximum local de f sous la contrainte g est une valeur $f(a,b)$ (resp $f(a,b,c)$), telle que
- $g(a,b) = 0$ ((a,b) vérifie la contrainte)
- il existe un rectangle R, dont l'intérieur contient le point (a,b), tel que, si $(x,y) \in R$ et $g(x,y) = 0$, alors $f(x,y) \leq f(a,b)$.

(analogue pour “minimum”).

Exemples de problèmes :

(a) Un point du plan se déplace sur l'ellipse d'équation

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \ .$$

Trouver le maximum et le minimum de la fonction $f(x,y) = xy$ pour un tel point. Ici la contrainte est $g(x,y) = 0$ avec $g(x,y) = x^2 + \frac{y^2}{4} - 1$.

(b) On fixe un réel $V > 0$. On cherche à trouver le parallélépipède de volume V, tel que la somme des carrés des longueurs des diagonales des faces soit minimale.

Notons x,y,z les dimensions du parallélépipède. La contrainte est : $xyz = V$, donc on va poser $g(x,y,z) = xyz - V$. On montre facilement que la fonction à minimiser est

$$f(x,y,z) = 4(x^2 + y^2 + z^2) \ .$$

Rq : dans l'exemple (b), on peut transformer la contrainte en $z = \frac{V}{xy}$, donc finalement on est ramené à une optimisation *sans* contrainte de la fonction de deux variables

$$h(x,y) = f\left(x,y,\frac{V}{xy}\right) = 4\left(x^2 + y^2 + \frac{V^2}{x^2y^2}\right) \ .$$

(exercice : faire l'étude de h).

Mais en général on ne peut pas toujours faire ceci (exprimer une variable en fonction des autres et éliminer la contrainte).

III.2 Méthode du multiplicateur de Lagrange

Il existe une méthode générale pour trouver des *candidats* à être des extrema sous contrainte. Celle-ci ressemble à la recherche des points critiques, mais on doit prendre en compte la contrainte et ajouter un nouveau paramètre.

On donne ici la méthode pour des fonctions de n variables. On cherche à maximiser ou minimiser une fonction $f(x_1,\ldots,x_n)$ sous la contrainte $g(x_1,\ldots,x_n)=0$. On suppose que f et g sont des fonctions deux fois différentiables dont les dérivées partielles secondes sont continues. On résout le problème de la manière suivante.

1) On définit la fonction de Lagrange

$$\Phi(x_1,\ldots,x_n,\lambda)=f(x_1,\ldots,x_n)+\lambda g(x_1,\ldots,x_n).$$

2) On résout le sytème

$$\vec{\nabla}\Phi\Big|_{(x_1,\ldots,x_n,\lambda)}=\vec{0}\iff\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{(x_1,\ldots,x_n)}=-\lambda\,\frac{\partial g}{\partial x_1}\Big|_{(x_1,\ldots,x_n)}\\ \ldots\\ \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_{(x_1,\ldots,x_n)}=-\lambda\,\frac{\partial g}{\partial x_n}\Big|_{(x_1,\ldots,x_n)}\\ g(x_1,\ldots,x_n)=0\end{cases}$$

   C'est un système de $n+1$ équations à $n+1$ inconnues, il admet en général plusieurs solutions.

   Si $(x_1,\ldots,x_n,\lambda)$ est une solution, le vecteur $(x_1,\ldots,x_n)$ est appelé un *point critique de* $f(x_1,\ldots,x_n)$ *sous la contrainte* $g(x_1,\ldots,x_n)=0$.

3) Un théorème dit que les extrema font nécessairement partie des points critiques trouvés à l'étape précédente (voir Prop. 6.3. p.45). La méthode générale pour déterminer la nature exacte des points critiques est complexe et hors programme (on donne le cas des fonctions de deux variables un peu plus loin). En général, dans les exemples simples, on peut arriver à prouver par une méthode adaptée (par exemple en calculant quelques valeurs de f), ou à se convaincre, qu'un tel point critique donne lieu a un minimum, un maximum, ou aucun des deux.

Exemples :

(a) $f(x,y)=xy$, sous la contrainte $g(x,y)=x^2+\frac{y^2}{4}-1=0$.

   On a montré avec la méthode de Lagrange que le minimum de f est -1, atteint en $(\frac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2})$ et $(-\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2})$; et que le maximum de f est 1, atteint en $(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2})$ et $(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2})$.

(b) $f(x,y,z)=4(x^2+y^2+z^2)$, sous la contrainte $g(x,y,z)=xyz-V=0$.

   On a montré que la seule solution du système de Lagrange (si on suppose $x,y,z\geq 0$), est $(\sqrt[3]{V},\sqrt[3]{V},\sqrt[3]{V})$. La valeur de f en ce point est $12V^{2/3}$.

   On pourrait montrer rigoureusement que cette valeur est en fait un minimum de f. Ici on va simplement s'en convaincre : si on admet que f a un minimum global en un point (x,y,z)

avec $x, y, z \geq 0$, alors celui-ci est forcément atteint en $(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V})$ car c'est le seul point critique sous contrainte qu'on a trouvé.

Rq : on peut montrer facilement que f n'a pas de maximum global dans cette situation. En effet, considérons le parallélépipède de côtés $x = n, y = \frac{1}{n}, z = V$, pour n un entier. Il est bien de volume V, et $f(n, \frac{1}{n}, V) = 4(n^2 + \frac{1}{n^2} + V^2)$. Ceci peut prendre des valeurs aussi grandes que l'on veut, car tend vers $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$. Donc f n'a pas de maximum global.

Exercice :

On veut fabriquer un cylindre fermé de volume 1 Litre. Mais on veut utiliser le moins de matériel possible. On cherche la hauteur et le rayon du cylindre, tel que la surface totale extérieure soit minimale , et que le volume soit 1L.

1. Traduire l'énoncé en termes mathématiques. Ecrire la contrainte, et la fonction à minimiser.
2. Résoudre en utilisant la méthode du multiplicateur de Lagrange.
3. Résoudre en étudiant les points critiques d'une fonction d'une variable.

Addendum :

Voici la suite de la méthode de Lagrange, qui ne marche que pour les fonctions à deux variables $f(x, y)$ et $g(x, y)$ (et est hors programme). Pour chaque point critique (a, b, λ_0) de $\Phi(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$, on calcule la matrice hessienne de Φ en (a, b, λ_0) :

$$H(\Phi)|_{(a,b,\lambda_0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\Big|_{(a,b,\lambda_0)} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\Big|_{(a,b,\lambda_0)} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial \lambda}\Big|_{(a,b,\lambda_0)} \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x}\Big|_{(a,b,\lambda_0)} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\Big|_{(a,b,\lambda_0)} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial \lambda}\Big|_{(a,b,\lambda_0)} \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial \lambda\partial x}\Big|_{(a,b,\lambda_0)} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial \lambda\partial y}\Big|_{(a,b,\lambda_0)} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial \lambda^2}\Big|_{(a,b,\lambda_0)} \end{pmatrix}$$

(rappel : ce doit être une matrice symétrique). Puis on calcule le déterminant $\det(H(\Phi))$ de cette matrice. (Le déterminant d'une matrice 3×3

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

est donné par la formule

$$\begin{aligned} \det(M) &= a \det\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - b \det\begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} + c \det\begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix} \\ &= a(ei - hf) - b(di - gf) + c(dh - ge).) \end{aligned}$$

Le critère est alors le suivant :

1) si $\det(H(\Phi)) > 0$ alors, en (a, b), f atteint un maximum local sous la contrainte $g(x, y) = 0$,
2) si $\det(H(\Phi)) < 0$ alors, en (a, b), f atteint un minimum local sous la contrainte $g(x, y) = 0$,
3) si $\det(H(\Phi)) = 0$ alors on ne peut rien dire.

III.3 Interprétation géométrique

Cette section nécessite de regarder en parallèle la feuille de travail Sage pour des illustrations.

*** Fonctions de deux variables :**

(a) *Avec le graphe de f.*
On peut tracer le graphe de f : c'est l'ensemble $\{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3,\ (x, y) \in D\}$. On s'intéresse à la restriction de f aux points (x, y) tels que $g(x, y) = 0$. On obtient une courbe dans l'espace : l'ensemble $\{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3,\ (x, y) \in D \text{ tels que } g(x, y) = 0\}$.
Les extrema cherchés sont les points les plus hauts et les plus bas (localement) de cette courbe (pour la direction z).

(b) *Avec les courbes de niveau de f.*
On remarque qu'intuitivement les points cherchés sont situés aux endroits où une courbe de niveau de f est "tangente" à la courbe de contrainte $g(x, y) = 0$.

La méthode de Lagrange utilise ce fait : les points trouvés avec cette méthode sont les (a, b) tels que :
- $g(a, b) = 0$ ((a, b) est sur la courbe de contrainte)
- il existe λ tel que $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)} = -\lambda \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(a,b)}$ et $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b)} = -\lambda \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{(a,b)}$.

C'est-à-dire : $\left.\overrightarrow{\nabla}(f)\right|_{(a,b)}$ est colinéaire à $\left.\overrightarrow{\nabla}(g)\right|_{(a,b)}$.

Or, on sait que la direction de $\left.\overrightarrow{\nabla}(g)\right|_{(a,b)}$ est orthogonale à la tangente $T(g)|_{(a,b)}$ à la courbe de niveau de g passant par (a, b), i.e., la courbe de contrainte $g(x, y) = 0$. De même, la direction de $\left.\overrightarrow{\nabla}(f)\right|_{(a,b)}$ est orthogonale à la tangente $T(f)|_{(a,b)}$ à la courbe de niveau de f passant par (a, b).
Donc $T(g)|_{(a,b)}$ et $T(f)|_{(a,b)}$ ont même direction, i.e., au point (a, b) les deux courbes sont tangentes.

*** Fonctions de trois variables**

En remplaçant les courbes de niveau par les surfaces de niveau, la propriété est tout à fait analogue.

On cherche les extrema de $f(x, y, z)$ sous la contrainte $g(x, y, z) = 0$. L'ensemble des points $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $g(x, y, z) = 0$ dessine une surface S_g de $\mathbb{R}^3$ (c'est en fait la surface de niveau 0 de g). Pour "représenter" f on peut aussi tracer dans $\mathbb{R}^3$ ses surfaces de niveau, c'est-à-dire les $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \text{tels que } f(x, y, z) = k\}$ pour un k fixé.

On montre comme précédemment que (a, b, c) est un point critique sous contrainte (i.e., est solution du système de Lagrange) si et seulement si :
- $g(a, b, c) = 0$ (i.e., $(a, b, c) \in S_g$)
- $\left.\overrightarrow{\nabla}(f)\right|_{(a,b,c)}$ est colinéaire à $\left.\overrightarrow{\nabla}(g)\right|_{(a,b,c)}$.

Or d'après le chapitre 5 on sait que le gradient en un point d'une fonction f de 3 variables est orthogonal au plan tangent, en ce point, de la surface de niveau de f qui passe par ce point.

Donc, vu la propriété de colinéarité des gradients, la surface de niveau de f qui passe par notre point (a, b, c) a le même plan tangent que la surface S_g. On en déduit que ces deux surfaces sont tangentes au point (a, b, c).

Conclusion : les points critiques sous contrainte sont situés là où une surface de niveau de f est tangente à la surface de contrainte S_g.

III.4 Applications de l'optimisation sous contrainte

Dans de nombreux domaines scientifiques, des problèmes d'optimisation sous contrainte se posent.

- en économie : problème du choix pour un consommateur : celui-ci veut maximiser une fonction d'utilité, avec une contrainte de budget.
- optimisation d'un prix de vente sous diverses contraintes.
- en industrie : optimisation de la forme d'un objet ; optimisation d'un trajet...

Pour plus d'informations voir la page Wikipédia - Optimisation.

IV Méthode générale du multiplicateur de Lagrange

De façon générale, la méthode de Lagrange s'applique à une fonction de n variables $x_1, \ldots, x_n$, et on a k fonctions de contraintes. On définit une nouvelle fonction de Lagrange Φ, qui fait intervenir k nouvelles variables (une par contrainte) $\lambda_1, \ldots \lambda_k$. Voir pp.47-48 de **[RB]** pour plus de précisions.

Remarque : Pour aller plus loin / pour avoir des explications différentes et intuitives sur la méthode de Lagrange, voir par ex. http ://www.slimy.com/ steuard/teaching/tutorials/Lagrange.html, une introduction bien écrite par un physicien.

Université du Québec à Montréal
Groupe-cours 51
Vivien Ripoll

Session d'automne 2011
MAT1112 - Calcul I

Résumé des cours 14 et 15 (31 octobre et 4 novembre)

---

*N.B. : ce document est un résumé succinct de ce que nous avons fait en cours ; il peut contenir des remarques supplémentaires. Il est à considérer comme un complément du cours, et sa lecture ne dispense évidemment pas l'étudiant de relire attentivement ses notes personnelles du cours ainsi que le recueil de notes de Robert Bédard. Ce recueil est désigné par la suite « **[RB]** ».*

1 Chapitre 7 : Rappels sur l'intégrale simple

Nous avons suivi, avec un peu plus de détails, le chapitre 7 de **[RB]**.

En calcul différentiel, nous avons appris à étudier une fonction en regardant ce qui se passe localement. Le calcul intégral concerne la quesiton générale suivante : comment calculer la "somme" de ce qui se passe localement, i.e., par exemple, comment calculer des aires ?

I Aire et intégrale de Riemann

Il y a plusieurs façons de définir une intégrale ; la plus simple, et la seule présentée dans ce cours, est appelée l'intégrale de Riemann [1]. L'idée générale est d'approcher une fonction par une fonction "en escaliers" afin de calculer une aire.

Supposons qu'on veuille calculer l'aire d'une surface située sous une courbe d'équation $y = f(x)$ (plus exactement, entre cette courbe et l'axe des x (verticalement), et entre les droites $x = a$ et $x = b$ (horizontalement)). L'idée est d'approcher cette surface par une somme de rectangles, qui deviennent de plus en plus fins (voir Fig. 7.1 de **[RB]**).

On définit ainsi des *sommes de Riemann*. L'*intégrale de Riemann* de f entre a et b est définie (lorsqu'elle existe) comme la limite des sommes de Riemann, et représente l'aire *signée* située entre la courbe de f et l'axe des x (verticalement), et entre les droites $x = a$ et $x = b$ (horizontalement). Il existe un théorème qui affirme que toute fonction continue sur $[a, b]$ admet une intégrale de Riemann entre a et b.

II Intégrale et primitive

On a d'abord rappelé la définition d'une primitive.

Théorème fondamental de l'analyse

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction d'une variable réelle, continue. Soit $S(x) = \int_a^x f(t)dt$.
Alors la fonction S est une primitive de f : $\forall x \in [a, b], S'(x) = f(x)$.
Plus précisément, S est la primitive de f qui s'annule en a.

1. Bernhard Riemann (1826–1866) est un mathématicien allemand très influent, qui a travaillé, entre autres, sur le calcul intégral, la géométrie différentielle, et l'arithmétique.

Conséquence : on a $\int_a^b f(t)dt = S(b)$. Si F est n'importe quelle primitive de f, alors $F(x) = S(x) + C$ (où C est une constante). Donc $F(b) - F(a) = S(b) - S(a) = S(a)$, et

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b \; . \qquad (*)$$

Idée de la preuve : il s'agit de calculer $S'(x)$, c'est-à-dire $\lim_{h \to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h}$.

On peut interpréter $(S(x+h) - S(x))$ comme l'aire de la surface située entre la courbe de f et l'axe des abscisses, et entre les droites verticales x et $x+h$. Lorsque h est assez petit, cette surface est très proche d'être un rectangle de largeur h et de longueur $f(x)$, donc $S(x+h) - S(x) \simeq hf(x)$. Ce qui donne exactement $S'(x) = f(x)$.

Note : on peut rendre tout cet argument rigoureux en utilisant proprement la définition de la limite.

Ce théorème (surtout la version (*)) permet de calculer des intégrales en utilisant des primitives.

Exemples traités en cours :
$\int_0^1 (5 - 2x + x^3)dx$; $\int_{-1}^2 x^n dx$; $\int_0^{\pi/2} \sin(x)dx$

III Propriétés et méthodes de calcul

Propriétés (voir Prop. 7.1) :
- Linéarité
- Intégration par parties (se démontre avec la régle de dérivation du produit)
- Changement de variable, ou substitution (se démontre aevc la règle de dérivation des fonctions composées)

Nous avons rappelé les primitives des fonctions usuelles (à connaître) : x^n (pour $n \in \mathbb{Z}$) ; $\cos x$, $\sin x$; e^x ; $\ln(x)$...

La méthode de calcul pour les intégrales est alors toujours la même : il faut arriver, en utilisant un des moyens décrits au-dessus, à se ramener à calculer des primitives usuelles connues.

Exemples d'applications :

(a) $\int \tan(x)dx$ (avec changement de variable)

(b) $\int x^2 \sin(x)dx$ (avec 2 intégrations par parties)

(c) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)^3}{x}dx$ (avec changement de variable)

(d) calcul de l'aire $\mathcal{A}$ d'une ellipse de grand rayon a et de petit rayon b. Son équation est : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. On se ramène facilement à :
$\mathcal{A} = 4\displaystyle\int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}dx$. En faisant le changement de variable $x = a\cos t$, on trouve finalement $\mathcal{A} = \pi ab$.

(e) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+3x+2}dx$ (avec un changement de variable)

IV Intégrales de fractions rationnelles

On cherche à calculer $\int \frac{P(x)}{Q(x}dx$, où P et Q sont des polynômes. On va présenter la méthode générale et l'appliquer pas à pas sur un exemple :

$$I(x) = \int \frac{2x^4 - 4x^3 + 8x^2 + 3}{x^4 - x^3 - x + 1} dx \ .$$

1. Se ramener au cas où deg(numérateur) < deg(dénominateur), en écrivant $P = QA + R$, avec A et R polynômes, tel que $\deg R < \deg Q$. Ainsi $\frac{P}{Q} = A + \frac{R}{Q}$.
   Ex. : $2x^4 - 4x^3 + 8x^2 + 3 = 2(x^4 - x^3 - x + 1) - 2x^3 + 8x^2 + 2x + 1$ donc
   $$\begin{aligned} I(x) &= \int \left(2 + \frac{-2x^3 + 8x^2 + 2x + 1}{x^4 - x^3 - x + 1}\right) dx \\ &= 2x + \int F(x)dx \quad \text{avec } F(x) = \frac{-2x^3 + 8x^2 + 2x + 1}{x^4 - x^3 - x + 1} \end{aligned}$$
   et il reste à calculer $\int F(x)dx$.
2. Factoriser Q le plus possible.
   Proposition. On peut toujours factoriser Q avec des facteurs de la forme
   $$\begin{array}{lll} (\lambda x + \mu)^k & \text{avec } \lambda \neq 0,\ k \geq 1\,; & \text{et} \\ (ax^2 + bx + c)^k & \text{avec } a \neq 0,\ k \geq 1, \text{ et } \Delta = b^2 - 4ac < 0)\ . & \end{array}$$
   Pour ce faire, il faut trouver des racines α de Q (c'est-à-diredes solutions de $Q(x) = 0$), et factoriser Q par $(x - \alpha)$.
   Ex. :
   $$\begin{array}{rcll} x^4 - x^3 - x + 1 &=& (x-1)(ax^3 + bx^2 + cx + d) & \text{(car 1 est racine évidente)} \\ &=& (x-1)(x^3 - 1) & \text{(on trouve } a, b, c, d \text{ par identification)} \\ &=& (x-1)(x-1)(a'x^2 + b'x + c') & \text{(car 1 est encore racine évidente)} \\ &=& (x-1)^2(x^2 + x + 1) & \text{(en identifiant)} \end{array}$$
   On ne peut pas factoriser davantage car pour le polynôme $(x^2 + x + 1)$, $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$.
3. *Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle.*
   Proposition. Si P/Q est telle que $\deg P < \deg Q$, et qu'on écrit Q (conformément au point précédent) sous la forme
   $$Q = \prod_{i=1}^{r} (\lambda_i x + \mu_i)^{u_i} \ \times \ \prod_{j=1}^{s} (a_j x^2 + b_j x + c_j)^{v_j} \quad ,$$
   alors on peut écrire P/Q sous la forme d'une somme de :
   - termes $\dfrac{A}{(\lambda_i x + \mu_i)^k}$, avec $1 \leq k \leq u_i$ (pour chaque i) ; et de
   - termes $\dfrac{Ax + B}{(a_j x^2 + b_j x + c_j)^k}$, avec $1 \leq k \leq v_j$ (pour chaque j).

   Ex. : D'après la proposition ci-dessus, F a la forme suivante :
   $$F = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1} \ .$$
   On identifie A, B, C, D en développant (il existe aussi d'autres méthodes parfois plus rapides). Après calculs on obtient $A = 1, B = 3, C = -3$ et $D = -1$ donc :
   $$F = \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} - \frac{3x + 1}{x^2 + x + 1} \ .$$

4. Calculs des $\displaystyle\int \frac{A}{(\lambda x+\mu)^k}$: il suffit de faire le changement de variable $u=\lambda x+\mu$ et d'uiliser les primitives usuelles.
   Ex. : $\int \frac{1}{x-1}dx = \ln(|x-1|)+C_1$; et $\int \frac{3}{(x-1)^2}dx = \frac{-3}{x-1}+C_2$.
5. Calculs des $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}$.
   (a) On fait apparaître $2ax+b$ au numérateur, de sorte que dans le reste il n'y ait plus qu'une constante :
   $$\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k} = \frac{A}{2a}\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^k} + \frac{B-\frac{Ab}{2a}}{(ax^2+bx+c)^k}\ .$$
   Ex. : On obtient :
   $$\frac{3x+1}{x^2+x+1} = \frac{3}{2}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+x+1}\ .$$
   (b) On s'occupe du premier terme : facile avec substitution (c'est de la forme u'/u^k).
   Ex. : $\displaystyle\frac{3}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx = \frac{3}{2}\ln(|x^2+x+1|)+C_3$.
   (c) On s'occupe du deuxième terme, il faut calculer $\displaystyle\int\frac{1}{(ax^2+bx+c)^k}dx$.
   L'idée est de "compléter le carré", et de se ramener, après un changement de variable, à calculer $\int\frac{1}{(1+u^2)^k}du$. On peut ensuite calculer cette intégrale avec un changement de variable trigonométrique.
   Le cas $k=1$ est le plus facile (et le seul que l'on fera en pratique dans les exercices). En effet $\int\frac{1}{1+u^2}du = \arctan(u)+C$.
   Ex. :
   $$\int\frac{1}{x^2+x+1}dx = \int\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx = \frac{4}{3}\int\frac{1}{\frac{4}{3}(x+\frac{1}{2})^2+1}dx$$
   On pose $u=\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})$; $du=\frac{2}{\sqrt{3}}dx$. On obtient :
   $$=\frac{4}{3}\int\frac{1}{1+u^2}\frac{\sqrt{3}}{2}du = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)+C_4\ .$$

Conclusion de l'exemple :

$$\begin{aligned} I(x)=\int\frac{2x^4-4x^3+8x^2+3}{x^4-x^3-x+1}dx &= 2x+\ln(|x-1|)-\frac{3}{x-1}-\frac{3}{2}\ln(|x^2+x+1|)\\ &\quad+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)+C\ .\end{aligned}$$

Pour un autre exemple, voir **[RB]**, Ex. 7.5 p.55.