Université du Québec à Montréal **Session d'automne 2011**
Groupes-cours 10, 50, 51 **MAT1112 - Calcul I**

Exercices de récapitulation de mi-session

Exercice 1.

(a) Soit la fonction $f(x, y) = x \ \exp(3xy) + 3x^2 + 4x^3y^2 + 5y^4$, calculer les dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\ .$$

(b) Soit la fonction $g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x, y) = \begin{cases} (x^4 + 4x^3y^5 - 3y^4)/(x - 2y)^3 & \text{si } (x - 2y) \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x - 2y) = 0. \end{cases}$$

Calculer les dérivées partielles $g_x(0, 0)$ et $g_{xx}(0, 0)$ de g d'ordre 1 et d'ordre 2 par rapport à x respectivement au point $(0, 0)$ (si elles existent).

Exercice 2.

(a) Soit la fonction $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} (3x^3y^5 - 5y^7)/(x^2 + 4y^2)^3 & \text{si } (x, y) \neq (0, 0)\,; \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Montrer que f est continue au point $(0, 0)$.

(b) Soit la fonction $g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x, y) = \begin{cases} (3x^2y^2)/(x^2 + 4y^2)^2 & \text{si } (x, y) \neq (0, 0)\,; \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

La fonction g est-elle continue au point $(0, 0)$? au point $(1, 1)$?

Exercice 3.

(a) En utilisant la définition théorique, déterminer la dérivée directionnelle $f'((d_1, d_2), (0, 0))$ (si elle existe) dans la direction $\mathbf{d} = (d_1, d_2)$ au point $(0, 0)$ pour la fonction suivante :

$$f(x, y) = \begin{cases} (2x^3 - 3x^2y^2 + y^3)/(x^2 + y^2) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0)\,; \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(b) Calculer la dérivée directionnelle $g'((-1/\sqrt{11},\ 3/\sqrt{11},\ -1/\sqrt{11}),\ (1, 1, -2))$ de g dans la direction $(-1/\sqrt{11},\ 3/\sqrt{11},\ -1/\sqrt{11})$ au point $(1, 1, -2)$ de la fonction $g(x, y, z) = (2x^2y^3z - 3xy^2z^2)$.

Exercice 4.

Soit l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{x}{2(x^2+y)}\,\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{(x^2+y)}\,\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad (E)$$

Déterminer toutes les solutions $f : D \to \mathbb{R}$ ayant des dérivées partielles d'ordre 1 continues et solutions de (E) sur l'ouvert $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$. On pourra utiliser les nouvelles coordonnées $u = x/\sqrt{y}$ et $v = x^2 + y$.

Exercice 5.

(a) Déterminer le(s) point(s) critique(s) de $f(x,y)$, i.e. le(s) point(s) (a,b) tels que $f_x(a,b) = 0$ et $f_y(a,b) = 0$, pour la fonction $f(x,y) = 2x^3 + 3x^2y - y^3 + 3y^2 + 24y - 3$.

(b) Le point (4, -4) est un point critique de f. Indiquer si $f(x,y)$ atteint un minimum relatif, un maximum relatif ou encore que le graphe de f a un point de selle à $(4,-4)$.

Exercice 6.

Maximiser la fonction $f(x,y,z) = xy^2z$ sous la contrainte $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$ en utilisant la méthode du multiplicateur de Lagrange.

Exercice 7. (Exercice supplémentaire)

Il pleut. Une flaque d'eau se forme sur le sol et s'agrandit progressivement, en gardant toujours une forme d'ellipse. La longueur de son grand rayon augmente avec un taux de 2 cm/s, la longueur de son petit rayon augmente avec un taux de 1 cm/s. Calculer le taux de variation de l'aire de la flaque au moment où le petit rayon mesure 1 mètre et le grand rayon mesure 5 mètres.

On rappelle que l'aire d'une ellipse de grand rayon a et de petit rayon b est $A = \pi ab$.