Université du Québec à Montréal
Groupe-cours 51
Vivien Ripoll

Session d'automne 2011
MAT1112 - Calcul I

Correction de la feuille "Ellipses, hyperboles, paraboles, et quelques courbes de niveau"

Une feuille de travail Sage est disponible pour accompagner ces notes, à l'adresse `http://sage.lacim.uqam.ca/pub/`, choisir *MAT1112_51 : Coniques et courbes de niveau.*

Ellipses

Exercice : Donner centre, grand axe et petit axe de l'ellipse d'équation $2x^2-x+5y^2+2y-\frac{7}{40}=0$.

On écrit :

$$\begin{array}{rcl} 2x^2-x & = & 2(x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16})-\frac{1}{8} \\ & = & 2(x-\frac{1}{4})^2-\frac{1}{16} \\ \text{et} \quad 5y^2+2y & = & 5(y^2+\frac{2}{5}y+\frac{1}{25})-\frac{1}{5} \\ & = & 5(y+\frac{1}{5})^2-\frac{1}{5}. \end{array}$$

Donc l'équation se transforme en

$2(x-\frac{1}{4})^2+5(y+\frac{1}{5})^2=\frac{1}{8}+\frac{1}{5}+\frac{7}{40} \quad = \quad \frac{1}{2}$, que l'on peut réécrire

$$\frac{(x-\frac{1}{4})^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{(y+\frac{1}{5})^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2}=1.$$

C'est donc l'équation d'une ellipse centrée en $(\frac{1}{4},\frac{-1}{5})$, de demi-grand axe $\frac{1}{2}$, de demi-petit axe $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Voir la feuille de travail Sage pour une figure.

Courbes de niveau

(a) $f(x,y)=x^2-2x+3y^2+3y$. Étudions la courbe de niveau k :

$$\mathcal{C}_k=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ,\ x^2-2x+3y^2+3y=k\}.$$

Remarque : pour $k=\frac{9}{4}$, c'est l'ellipse étudiée en exemple.

Transformons l'équation de $\mathcal{C}_k$:

$$\begin{array}{rcl} x^2-2x+3y^2+3y-k & = & (x-1)^2-1+3(y+\frac{1}{2})^2-\frac{3}{4}-k \\ & = & (x-1)^2+3(y+\frac{1}{2})^2-\frac{7}{4}-k \end{array}$$

Donc le point (x,y) appartient à $\mathcal{C}_k$ si et seulement si

$$(x-1)^2+3\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{7}{4}+k.$$

- Si $k<\frac{-7}{4}$, $\mathcal{C}_k$ est vide.
- Si $k=\frac{-7}{4}$, $\mathcal{C}_k$ ne contient que le point $(1,-\frac{1}{2})$.
- Si $k>\frac{-7}{4}$, $\mathcal{C}_k$ est une ellipse, centrée en $(1,-\frac{1}{2})$. Son demi-grand axe est $\sqrt{\frac{7}{4}+k}$, et son demi-petit axe est $\sqrt{\frac{\frac{7}{4}+k}{3}}$.

Le graphe de f a une forme de paraboloïde elliptique. Voir les figures sur la feuille de travail Sage.

(b) $g(x,y) = x^2 - 4x - 2y^2 - 18y$. Étudions la courbe de niveau k :

$$\mathcal{C}_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ x^2 - 4x - 2y^2 - 18y = k\}.$$

On transforme l'équation de $\mathcal{C}_k$:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x - 2y^2 - 18y - k &= (x-2)^2 - 4 - 2((y+\tfrac{9}{2})^2 - \tfrac{81}{4}) - k \\ &= (x-2)^2 - 2(y+\tfrac{9}{2})^2 + \tfrac{73}{2} - k \end{aligned}$$

Donc le point (x,y) appartient à $\mathcal{C}_k$ si et seulement si

$$(x-2)^2 - 2\left(y + \frac{9}{2}\right)^2 = -\frac{73}{2} + k.$$

- Si $k = \frac{73}{2}$, $\mathcal{C}_k$ est l'union de deux droites, qui se coupent au point $(2, -\frac{9}{2})$: la droite $(D1)$ d'équation $x - 2 = \sqrt{2}(y + \frac{9}{2})$, et la droite $(D2)$ d'équation $x - 2 = -\sqrt{2}(y + \frac{9}{2})$. (on utilise l'identité $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.)
- Si $k > \frac{73}{2}$, $\mathcal{C}_k$ est une hyperbole, d'asymptotes (D_1) et (D_2). Les deux branches de l'hyperbole sont dans les coins droit et gauche du plan découpé par les asymptotes (cas de l'équation (2) de la feuille). Plus k est grand, plus les branches sont écartées.
- Si $k < \frac{73}{2}$, $\mathcal{C}_k$ est aussi une hyperbole d'asymptotes (D_1) et (D_2). Mais les deux branches de l'hyperbole sont dans les coins haut et bas du plan découpé par les asymptotes (cas de l'équation (2') de la feuille). Plus k est petit, plus les branches sont écartées.

Voir les figures sur la feuille de travail Sage. Le graphe de g ressemble à une selle de cheval, on l'appelle un paraboloïde hyperbolique.

(c) $h(x,y) = 2x + y^2 + 3y$. Étudions la courbe de niveau k :

$$\mathcal{C}_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ 2x + y^2 + 3y = k\}.$$

On transforme l'équation de $\mathcal{C}_k$:

$$\begin{aligned} 2x + y^2 + 3y - k &= 2x - k + (y + \tfrac{3}{2})^2 - \tfrac{9}{4} \\ &= (y + \tfrac{3}{2})^2 + 2(x - \tfrac{k}{2} - \tfrac{9}{8}) \end{aligned}$$

donc (x,y) appartient à $\mathcal{C}_k$ si et seulement si

$$x - \left(\frac{k}{2} + \frac{9}{8}\right) = \frac{1}{2}\left(y + \frac{3}{2}\right)^2.$$

C'est l'équation d'une parabole, symétrique par rapport à l'axe $y = \frac{-3}{2}$, et de sommet $(\frac{k}{2} + \frac{9}{8}, \frac{3}{2})$. Voir la feuille de travail Sage pour les figures.

Remarque : le graphe de h est appelé cylindre parabolique.