Université du Québec à Montréal
F. BEAUDET, S. LABBÉ, V. RIPOLL

MAT1112 - Calcul I (automne 2011)
Groupes-cours : 10, 50, 51

Examen de mi-session

28 octobre 2011, 9h30-12h30

Instructions :

1. Cet examen a six (6) exercices indépendants. Il faut répondre à tous les exercices dans votre cahier d'examen (dans l'ordre que vous voulez).
2. Aucune note, aucun livre n'est permis.
3. Les calculatrices (simples, non graphiques) sont permises (mais pas utiles).
4. Un barême est indiqué devant chaque question ; celui-ci est indicatif et pourra être légèrement modifié.
5. Un aide-mémoire est distribué en même temps que l'examen.
6. Une attention particulière sera portée à la qualité et à la précision de la rédaction. Les étapes des calculs doivent figurer sur la copie.

EXERCICE 1.

(a) [*8 points*] Soit la fonction de deux variables : $f(x,y) = e^{2x+3}\sin(xy^2) - x^3y + \cos(y^3 - x^2)$.
Calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

(b) [*10 points*] Soit la fonction

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3y^4 - x^2(y - x^2) - 2x^3}{x^2 - y^2} & \text{si } x^2 - y^2 \neq 0 \ ; \\ 0 & \text{si } x^2 - y^2 = 0. \end{cases}$$

Calculer, si elles existent, les deux dérivées partielles d'ordre 1 de g au point $(0,0)$:

$$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(0,0)} \quad \text{et} \quad \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{(0,0)} .$$

EXERCICE 2.

(a) [*10 points*] Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5y^3 + 5xy^7}{(2x^2 + y^2)^4} \ , & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \ ; \\ 0 \ , & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Est-ce que f est continue à l'origine $(0,0)$? au point $(2,3)$? (Justifier votre réponse.)

(b) [*12 points*] Soit la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5y^3 + 5xy^7}{(2x^2 + y^2)^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \ ; \\ 0 \ , & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Montrer que g est continue à l'origine $(0,0)$.

[...TOURNER LA PAGE...]

Exercice 3.

(a) [*10 points*] Soit la fonction de deux variables :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4y^2x^3 - y^5 - 2x^7}{2y^4 + 3x^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \ ; \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Soit (v_1, v_2) un vecteur unitaire du plan. En utilisant la définition théorique de la dérivée directionnelle, déterminer (en fonction de v_1 et v_2) la dérivée directionnelle $f'((v_1,v_2),(0,0))$ (si elle existe) dans la direction $\vec{v} = (v_1, v_2)$ au point $(0,0)$.

(b) [*10 points*] Soit $g(x,y,z) = 5xy^2z - 2x^3yz^2 + x^2y$.
Calculer la dérivée directionnelle $g'((-1/\sqrt{14}\ ,\ 2/\sqrt{14}\ ,\ 3/\sqrt{14})\ ,\ (1,-1,2))$ de g dans la direction $(-1/\sqrt{14}\ ,\ 2/\sqrt{14}\ ,\ 3/\sqrt{14})$ au point $(1,-1,2)$.

Exercice 4. (Application de la règle de chaînes)

[*16 points*] La longueur, la largeur et la hauteur d'une boîte (en forme de parallélépipède rectangle) varient dans le temps. La longueur et la largeur croissent à raison de 5 mètres par seconde tandis que la hauteur diminue de 2 mètres par seconde. À un moment donné, la hauteur et la largeur mesurent 4 mètres et la longueur mesure 7 mètres. Déterminer (en utilisant la règle de chaînes) le taux de variation, à cet instant, du volume de la boîte, en mètres cubes par seconde (m^3/s).

Exercice 5. (Optimisation sans contrainte)

(a) [*6 points*] Soit $f(x,y) = -4x^2 + x^2y^2 + \frac{y^4}{4} - y^3 - 2y^2$, où $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer les points critiques de $f(x,y)$.

(b) [*6 points*] Les points $(0,\ -1)$ et $(\sqrt{3},\ 2)$ sont des points critiques de $f(x,y)$. Déterminer la nature (maximum local, minimum local, ou point-selle) de ces points critiques.

Exercice 6. (Multiplicateur de Lagrange)

[*12 points*] Utiliser la technique du multiplicateur de Lagrange afin d'identifier les points critiques sous contrainte (c'est-à-dire, les candidats pouvant réaliser un extremum local) de la fonction $f(x,y,z) = x - y + z$ sous la contrainte $x^2 - y^2 + z^2 - 4 = 0$.

Fin de l'énoncé. Un aide-mémoire est disponible sur une feuille séparée.

Aide-mémoire (examen MAT1112, automne 2011)

*** Dérivées partielles**

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(a,b)} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(a,b)} = \lim_{k\to 0}\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}.$$

*** Dérivée directionnelle** de f dans la direction $\vec{u} = (u_x, u_y)$ au point (a,b) :

$$\frac{df}{ds}\Big|_{\vec{u},(a,b)} = f'(\vec{u},(a,b)) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+hu_x, b+hu_y)-f(a,b)}{h}.$$

*** Règle de chaines**

- $w = f(u,v)$, $u = u(x,y)$ et $v = v(x,y)$, alors

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

- $w = f(x,y,z)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$, et $z = z(t)$, alors

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

*** Optimisation sans contrainte**
$P = (a,b)$ point critique de $f = f(x,y)$.

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_P, \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Big|_P, \quad C = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big|_P, \quad \text{et} \quad \Delta = B^2 - AC.$$

a) Si $\Delta < 0$ et $A < 0$, alors f possède un maximum local au point P.
b) Si $\Delta < 0$ et $A > 0$, alors f possède un minimum local au point P.
c) Si $\Delta > 0$, alors f n'a ni minimum local, ni maximum local en P. Dans ce cas $(P, f(P))$ est un point-selle du graphe de f.
d) Si $\Delta = 0$, le test n'est pas concluant.

*** Optimisation avec contrainte** de $f(x,y,z)$ sous la contrainte $g(x,y,z) = 0$:
Fonction de Lagrange : $\Phi(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z)$.