Université du Québec à Montréal **Session d'automne 2011**
Groupes-cours 10, 50, 51 **MAT1112 - Calcul I**

Corrigé de la feuille d'exercices de récapitulation de mi-session

---

Exercice 1.

(a) Soit la fonction $f(x,y) = x\ \exp(3xy) + 3x^2 + 4x^3y^2 + 5y^4$, calculons les dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\ .$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \exp(3xy) + 3xy\exp(3xy) + 6x + 12x^2y^2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} &= 3x\exp(3xy) + 3x\exp(3xy) + 9x^2y\exp(3xy) + 24x^2y \end{aligned}$$

(b) Soit la fonction $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x,y) = \begin{cases} (x^4 + 4x^3y^5 - 3y^4)/(x-2y)^3 & \text{si } (x-2y) \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x-2y) = 0. \end{cases}$$

Calculons les dérivées partielles $g_x(0,0)$ et $g_{xx}(0,0)$ de g d'ordre 1 et d'ordre 2 par rapport à x respectivement au point $(0,0)$ (si elles existent).

Nous avons que

$$g_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(0+h,0) - g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left[\dfrac{(h^4 + 4h^3(0)^5 - 3(0)^4)}{(h-2(0))^3}\right] - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^4}{h^4} = 1$$

De la définition de $g_{xx}(0,0)$, nous avons

$$g_{xx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{g_x(0+h,0) - g_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g_x(h,0) - g_x(0,0)}{h}.$$

Il nous faut donc déterminer $g_x(h,0)$. Au point $(h,0)$, nous avons qu'au voisinage de $(h,0)$, la fonction est égale à

$$\frac{(x^4 + 4x^3y^5 - 3y^4)}{(x-2y)^3} \tag{1}$$

car $(h,0)$ n'appartient pas à la droite d'équation $(x-2y) = 0$ parce que $(h-2(0)) \neq 0$. Il suffit donc de dériver la formule (1) par rapport à x en considérant y comme une constante et ensuite d'évaluer à $(h,0)$. Donc

$$g_x(h,0) = \left.\frac{(4x^3 + 12x^2y^5)(x-2y)^3 - 3(x-2y)^2(x^4 + 4x^3y^5 - 3y^4)}{(x-2y)^6}\right|_{(h,0)} = \frac{4h^3h^3 - 3h^2h^4}{h^6} = 1$$

Conséquemment

$$g_{xx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{1-1}{h} = 0.$$

Exercice 2.

(a) Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} (3x^3y^5 - 5y^7)/(x^2+4y^2)^3 & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,; \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Montrons que f est continue au point $(0,0)$.

Considérons les coordonnées polaires : r et θ telles que $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$. Si $(x,y) \neq (0,0)$ alors $r \neq 0$ et nous avons

$$\begin{aligned} |f(x,y)| &= |f(r\cos(\theta), \sin(\theta))| = \left| \frac{3(r\cos(\theta))^3(r\sin(\theta))^5 - 5(r\sin(\theta))^7}{[(r\cos(\theta))^2 + 4(r\sin(\theta))^2]^3} \right| \\ &= |r| \left| \frac{3r\cos^3(\theta)\sin^5(\theta) - 5\sin^7(\theta)}{[\cos^2(\theta) + 4\sin^2(\theta)]^3} \right| \\ &= |r| \left| \frac{3r\cos^3(\theta)\sin^5(\theta) - 5\sin^7(\theta)}{[1 + 3\sin^2(\theta)]^3} \right| \leq |r| \left[\left| \frac{3r\cos^3(\theta)\sin^5(\theta)}{[1+3\sin^2(\theta)]^3} \right| + \left| \frac{5\sin^7(\theta)}{[1+3\sin^2(\theta)]^3} \right| \right] \end{aligned}$$

Si $(x,y) \to (0,0)$, alors $r \to 0$ et, pour r suffisamment près de 0, nous avons $|r| < 1$. Dans ce cas, nous pouvons écrire que

$$\left| \frac{3r\cos^3(\theta)\sin^5(\theta)}{[1+3\sin^2(\theta)]^3} \right| \leq 3 \quad \text{et} \quad \left| \frac{5\sin^7(\theta)}{[1+3\sin^2(\theta)]^3} \right| \leq 5$$

parce que $|\cos(\theta)| \leq 1$, $|\sin(\theta)| \leq 1$ et $1 + 3\sin^2(\theta) \geq 1$.

De tout ceci, nous obtenons que

$$0 \leq |f(x,y)| = |f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))| \leq (3+5)|r| = 8|r|$$

lorsque r est suffisamment près de 0. Donc

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = \lim_{r\to 0} |f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))| \leq \lim_{r\to 0} 8|r| = 0$$

et f est continue au point $(0,\,0)$ parce que, de ce qui précède, nous obtenons

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)\ .$$

Autre méthode sans les coordonnées polaires : [en examen ou devoir une seule méthode est requise]

Par inégalité triangulaire, on a :

$$|f(x,y)| \leq 3\frac{|x^3y^5|}{(x^2+4y^2)^3} + 5\frac{|y^7|}{(x^2+4y^2)^3}\ .$$

Essayons de minorer le dénominateur pour obtenir une majoration de f par une fonction plus simple. Pour le deuxième terme, c'est facile, car on a :

$$\begin{aligned} x^2 + 4y^2 &\geq 4y^2 \qquad \text{donc} \quad (x^2+4y^2)^3 \geq 4^3y^6 \quad \text{et} \\ \tfrac{|y^7|}{(x^2+4y^2)^3} &\leq \tfrac{|y^7|}{4^3y^6} = \tfrac{|y|}{4^3}\ . \end{aligned}$$

Pour le premier terme, on peut procéder ainsi :

$$\begin{array}{rcll} x^2+4y^2 & = & |x|^2+|2y|^2 \quad = \quad (|x|-|2y|)^2+4|xy| & \text{donc} \\ x^2+4y^2 & \geq & 4|xy| \qquad\qquad\qquad \text{et} & \\ \frac{|x^3y^5|}{(x^2+4y^2)^3} & \leq & \frac{|x^3y^5|}{4|xy|} = \frac{x^2y^4}{4} \ . & \end{array}$$

Par conséquent, on en déduit :

$$|f(x,y)| \leq 3\frac{x^2y^4}{4} + 5\frac{|y|}{4^3} \ .$$

Posons $h(x,y) = 3\frac{x^2y^4}{4} + 5\frac{|y|}{4^3}$. On a clairement $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = 0$. Donc par comparaison, on a aussi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \ .$$

Comme $0 = f(0,0)$, on peut conclure que f est continue en $(0,0)$.

(b) Soit la fonction $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x,y) = \begin{cases} (3x^2y^2)/(x^2+4y^2)^2 & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,; \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Si nous considérons g sur la droite passant par (0, 0) d'équation $y = mx$, alors nous obtenons que

$$g(x,mx) = \frac{(3x^2(mx)^2)}{(x^2+4(mx)^2)^2} = \frac{3m^2x^4}{x^4(1+4m^2)^2} = \frac{3m^2}{(1+4m^2)^2} \tag{2}$$

Par exemple, les valeurs de g sur la droite d'équation $y = x$ est $3(1)^2/(1+4(1)^2)^2 = 3/25$. Si nous approchons le point (0, 0) sur cette droite, nous voyons que les valeurs de g n'approche pas $0 = g(0,0)$ et conséquemment g n'est pas continue au point (0, 0). En fait de l'égalité (2), nous pouvons affirmer que la limite de g lorsque $(x,y) \to (0,0)$ n'existe pas.

Dans un voisinage du point (1, 1), nous avons que

$$g(x,y) = \frac{(3x^2y^2)}{(x^2+4y^2)^2}$$

est le quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas au point (1, 1) et

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} g(x,y) = \frac{3(1)^2(1)^2}{((1)^2+4(1)^2)^2} = \frac{3}{25} = g(1,1).$$

Conséquemment g est continue au point (1, 1).

Exercice 3.

(a) En utilisant la définition théorique, déterminons la dérivée directionnelle $f'((d_1,d_2),(0,0))$ (si elle existe) dans la direction $\mathbf{d} = (d_1,d_2)$ au point $(0,0)$ pour la fonction suivante :

$$f(x,y) = \begin{cases} (2x^3-3x^2y^2+y^3)/(x^2+y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,; \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Nous avons

$$f'((d_1,d_2),(0,0)) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+hd_1, 0+hd_2) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(hd_1,hd_2)}{h}$$

Notons que si $h \neq 0$, alors $(hd_1, hd_2) \neq (0,0)$ car $(d_1, d_2) \neq (0,0)$. Donc

$$\begin{aligned} f'((d_1,d_2),(0,0)) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(hd_1,hd_2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2(hd_1)^3 - 3(hd_1)^2(hd_2)^2 + (hd_2)^3)}{h((hd_1)^2+(hd_2)^2)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h^3(2d_1^3 - 3hd_1^2d_2^2 + d_2^3)}{h^3(d_1^2+d_2^2)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2d_1^3 - 3hd_1^2d_2^2 + d_2^3}{(d_1^2+d_2^2)} \\ &= \frac{2d_1^3 + d_2^3}{d_1^2+d_2^2} = 2d_1^3 + d_2^3 \end{aligned}$$

car $d_1^2 + d_2^2 = 1$.

(b) Calculons la dérivée directionnelle $g'((-1/\sqrt{11},\ 3/\sqrt{11},\ -1/\sqrt{11}),\ (1,1,-2))$ de g dans la direction $(-1/\sqrt{11},\ 3/\sqrt{11},\ -1/\sqrt{11})$ au point $(1,1,-2)$ de la fonction $g(x,y,z) = (2x^2y^3z - 3xy^2z^2)$. Ici les dérivées partielles de g d'ordre 1 sont continues sur tout $\mathbb{R}^3$, alors

$$g'((-1/\sqrt{11},\ 3/\sqrt{11},\ -1/\sqrt{11}),\ (1,1,-2)) = \nabla g|_{(1,1,-2)} \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{-1}{\sqrt{11}}\right).$$

Nous avons

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 4xy^3z - 3y^2z^2, \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = 6x^2y^2z - 6xyz^2, \qquad \frac{\partial g}{\partial z} = 2x^2y^3 - 6xy^2z$$

et

$$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(1,1,-2)} = -20, \qquad \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{(1,1,-2)} = -36, \qquad \left.\frac{\partial g}{\partial z}\right|_{(1,1,-2)} = 14.$$

Conséquemment la dérivée directionnelle recherchée est

$$\begin{aligned} g'((-1/\sqrt{11},\ 3/\sqrt{11},\ -1/\sqrt{11}),\ (1,1,-2)) &= \nabla g|_{(1,1,-2)} \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{-1}{\sqrt{11}}\right) \\ &= (-20,-36,14) \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{-1}{\sqrt{11}}\right) \\ &= \left(\frac{20}{\sqrt{11}} - \frac{108}{\sqrt{11}} - \frac{14}{\sqrt{11}}\right) = \frac{-102}{\sqrt{11}} \end{aligned}$$

Exercice 4.

Soit l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{x}{2(x^2+y)}\ \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{(x^2+y)}\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad (E)$$

Déterminons toutes les solutions $f : D \to \mathbb{R}$ ayant des dérivées partielles d'ordre 1 continues et solutions de (E) sur l'ouvert $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$ en utilisant les nouvelles coordonnées $u = x/\sqrt{y}$ et $v = x^2 + y$.

Notons premièrement que nous pouvons aussi exprimer les coordonnées x et y en fonction de u et v. En effet,

$$\begin{aligned} u = x/\sqrt{y} \quad &\Rightarrow \quad x = u\sqrt{y} \quad \Rightarrow \quad v = (u\sqrt{y})^2 + y = (1+u^2)y \\ &\Rightarrow \quad y = \frac{v}{(1+u^2)} \quad \Rightarrow \quad x = u\sqrt{\frac{v}{(1+u^2)}} \end{aligned}$$

Par la règle de chaines, nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\partial f}{\partial u}+2x\frac{\partial f}{\partial v}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{x}{2y^{(3/2)}}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}$$

Dans ce cas, l'équation aux dérivées partielles (E) devient

$$\frac{x}{2(x^2+y)}\left[\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\partial f}{\partial u}+2x\frac{\partial f}{\partial v}\right]+\frac{y}{(x^2+y)}\left[-\frac{x}{2y^{(3/2)}}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}\right]=0$$

$$\Rightarrow\quad\left(\frac{xy^{-1/2}}{2(x^2+y)}-\frac{xy^{-1/2}}{2(x^2+y)}\right)\frac{\partial f}{\partial u}+\left(\frac{x^2}{(x^2+y)}+\frac{y}{(x^2+y)}\right)\frac{\partial f}{\partial v}=0\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial f}{\partial v}=0$$

Conséquemment f est une fonction indépendante de la coordonnée v et conséquemment est une fonction de u seulement. Donc la solution générale de (E) est $f(x,y)=F(u)=F(x/\sqrt{y})$, où F est une fonction dérivable.

Exercice 5.

(a) Déterminons le(s) point(s) critique(s) de $f(x,y)$, i.e. le(s) point(s) (a,b) tels que $f_x(a,b)=0$ et $f_y(a,b)=0$, pour la fonction $f(x,y)=2x^3+3x^2y-y^3+3y^2+24y-3$.

Nous avons que

$$\frac{\partial f}{\partial x}=6x^2+6xy=6x(x+y)\quad\text{et}\quad\frac{\partial f}{\partial y}=3x^2-3y^2+6y+24.$$

Aux points critiques, nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x}=6x^2+6xy=6x(x+y)=0\quad\text{et}\quad\frac{\partial f}{\partial y}=3x^2-3y^2+6y+24=0.$$

De la première équation, nous avons que soit $x=0$, soit $(x+y)=0$. Il nous faut considérer les deux cas séparément. Si $x=0$, alors en substituant dans la seconde équation nous avons $3(0)^2-3y^2+6y+24=0\quad\Rightarrow\quad-3(y^2-2y-8)=0$. L'équation quadratique $y^2-2y-8=0$ a deux zéros :

$$\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(-8)}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{2\pm 6}{2}=-2\quad\text{Êou}\quad 4.$$

Nous obtenons ainsi deux points critiques : (0, -2), (0, 4). Si maintenant $x+y=0$, alors $x=-y$ et en substituant dans la seconde équation, nous avons $3(-y)^2-3y^2+6y+24=0\quad\Rightarrow\quad 6y+24=0\quad\Rightarrow\quad y=-24/6=-4$. Mais alors $x=-(-4)=4$ et nous obtenons aussi (4, -4) comme point critique.

En conclusion la fonction $f(x,y)$ a trois points critiques : (0, -2), (0, 4) et (4, -4).

(b) Le point (4, -4) est un point critique de f. Indiquons si $f(x,y)$ atteint un minimum relatif, un maximum relatif ou encore que le graphe de f a un point de selle à $(4,-4)$. Il nous faut calculer

$$A=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(4,-4)},\qquad B=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right|_{(4,-4)},\qquad C=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(4,-4)}\qquad \Delta=B^2-AC$$

Nous obtenons que

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & = & 12x+6y \quad \Rightarrow \quad A = \left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(4,-4)} = 12(4)+6(-4) = 24 \\
\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\ \partial y} & = & 6x \quad \Rightarrow \quad B = \left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\ \partial y}\right|_{(4,-4)} = 6(4) = 24 \\
\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} & = & -6y+6 \quad \Rightarrow \quad C = \left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(4,-4)} = -6(-4)+6 = 30 \\
\Delta & = & B^2 - AC = (24)^2 - (24)(30) = -144
\end{array}$$

Comme $\Delta < 0$ et $A > 0$, alors f atteint un minimum relatif au point (4, -4) et ce minimum est $f(4,-4) = -51$

Exercice 6.

Maximisons la fonction $f(x,y,z) = xy^2z$ sous la contrainte $x^2+y^2+2z^2 = 1$ en utilisant la méthode du multiplicateur de Lagrange. La contrainte peut être écrite sous la forme $g(x,y,z) = x^2+y^2+2z^2-1 = 0$

Il nous faut considérer la fonction $\Phi(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z) = xy^2z+\lambda(x^2+y^2+2z^2-1)$ et déterminer ses points critiques. Aux points critiques, nous avons

$$(*) \quad \left\{\begin{array}{rcl}
\dfrac{\partial\Phi}{\partial x} & = & y^2z+2x\lambda = 0 \\
\dfrac{\partial\Phi}{\partial y} & = & 2xyz+2y\lambda = 0 \\
\dfrac{\partial\Phi}{\partial z} & = & xy^2+4z\lambda = 0 \\
\dfrac{\partial\Phi}{\partial \lambda} & = & x^2+y^2+2z^2-1 = 0
\end{array}\right.$$

En multipliant la première équation de $(*)$ par x, la seconde équation de $(*)$ par y, la troisième équation de $(*)$ par z et en additionnant les trois équations ainsi obtenues et en utilisant la quatrième équation, nous obtenons

$$(xy^2z+2xy^2z+xy^2z)+(2x^2+2y^2+4z^2)\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad 4xy^2z+2\lambda = 0.$$

Donc $\lambda = -2xy^2z$. En substituant dans les trois premières équations de $(*)$, nous obtenons

$$(**) \quad \left\{\begin{array}{lcl}
y^2z+2x(-2xy^2z) & = & y^2z-4x^2y^2z = (1-4x^2)y^2z = 0 \\
r2xyz+2y(-2xy^2z) & = & 2xyz-4xy^3z = 2xyz(1-2y^2) = 0 \\
xy^2+4z(-2xy^2z) & = & xy^2-8xy^2z^2 = xy^2(1-8z^2) = 0
\end{array}\right.$$

Comme nous voulons maximiser $f(x,y,z) = xy^2z$, nous pouvons supposer que $x \neq 0$, $y \neq 0$ et $z \neq 0$ parce que sinon $f = 0$ et il est facile de vérifier que ceci n'est pas le maximum. Donc des équations de $(**)$, nous obtenons que

$$\begin{array}{rcl}
(1-4x^2) & = & 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1/2 \\
(1-2y^2) & = & 0 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 1/\sqrt{2} \\
(1-8z^2) & = & 0 \quad \Rightarrow \quad z = \pm 1/\sqrt{8} = \pm 1/2\sqrt{2}
\end{array}$$

Comme $\lambda = -2xy^2z$, nous obtenons 8 points critiques pour $F(x,y,z,\lambda)$, à savoir

$$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}},\frac{1}{4\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}},-\frac{1}{4\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}},\frac{1}{4\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}},-\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)$$

$$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2\sqrt{2}},-\frac{1}{4\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2\sqrt{2}},\frac{1}{4\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2\sqrt{2}},-\frac{1}{4\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2\sqrt{2}},\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)$$

Si nous calculons la valeur de f à ces points, nous obtenons que $f = 1/(8\sqrt{2})$ pour les points

$$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

et $f = -1/(8\sqrt{2})$ pour les points

$$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}}\right).$$

Donc le maximum de $f(x,y,z) = xy^2z$ sous la contrainte $x^2+y^2+2z^2 = 1$ est $1/(8\sqrt{2})$ et il est atteint aux points

$$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right).$$

Exercice 7. (Exercice supplémentaire)

Soit $A = \pi ab$ l'aire de l'ellipse. On calcule les dérivées partielles d'ordre 1 de A :

$$\frac{\partial A}{\partial a} = \pi b \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial A}{\partial b} = \pi a.$$

Supposons que la variable t représente le temps calculé en secondes. Selon les données du problème, on a que

$$\frac{da}{dt} = 2\,\mathrm{cm/s} \qquad \text{et} \qquad \frac{db}{dt} = 1\,\mathrm{cm/s}.$$

Or, selon la règle de chaînes, on a que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial a}\frac{da}{dt} + \frac{\partial A}{\partial b}\frac{db}{dt} = \pi b \cdot 2\,\mathrm{cm/s} + \pi a \cdot 1\,\mathrm{cm/s}$$

Donc, le taux de variation de l'aire de l'ellipse lorsque le petit rayon mesure 1 mètre et le grand rayon mesure 5 mètres est

$$\begin{aligned} \left.\frac{dA}{dt}\right|_{(a,b)=(500\mathrm{cm},100\mathrm{cm})} &= \pi \cdot 100\mathrm{cm} \cdot 2\,\mathrm{cm/s} + \pi \cdot 500\mathrm{cm} \cdot 1\,\mathrm{cm/s} \\ &= 700\pi \ \mathrm{cm}^2/\mathrm{s}. \end{aligned}$$