Université du Québec à Montréal
F. Beaudet, S. Labbé, V. Ripoll

MAT1112 - Calcul I (automne 2011)
Groupes-cours : 10, 50, 51

Aide-mémoire pour l'examen de fin de session

*** Dérivées partielles**

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \qquad \text{et} \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b)} = \lim_{k\to 0}\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}.$$

*** Dérivée directionnelle** de f dans la direction $\vec{u} = (u_x, u_y)$ au point (a,b) :

$$\left.\frac{df}{ds}\right|_{\vec{u},(a,b)} = f'(\vec{u},(a,b)) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+hu_x, b+hu_y)-f(a,b)}{h}.$$

*** Règle de chaines**

- $w = f(u,v)$, $u = u(x,y)$ et $v = v(x,y)$, alors

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

- $w = f(x,y,z)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$, et $z = z(t)$, alors

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

*** Optimisation sans contrainte**
$P = (a,b)$ point critique de $f = f(x,y)$.

$$A = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_P, \quad B = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_P, \quad C = \left.\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right|_P, \quad \text{et} \quad \Delta = B^2 - AC.$$

a) Si $\Delta < 0$ et $A < 0$, alors f possède un maximum local au point P.
b) Si $\Delta < 0$ et $A > 0$, alors f possède un minimum local au point P.
c) Si $\Delta > 0$, alors f n'a ni minimum local, ni maximum local en P. Dans ce cas $(P, f(P))$ est un point-selle du graphe de f.
d) Si $\Delta = 0$, le test n'est pas concluant.

*** Optimisation avec contrainte** de $f(x,y,z)$ sous la contrainte $g(x,y,z) = 0$:
Fonction de Lagrange : $\Phi(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z)$.

*** Identités trigonométriques :**

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a \sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b \cos a$$
$$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b \cos a$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$
$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$
$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$$
$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$$
$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a-b) + \sin(a+b))$$

*** Coordonnées polaires :**

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases} \text{ où } r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{R'} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\,r\,dr\,d\theta$$

*** Coordonnées cylindriques :**

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \quad \text{où } r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi, z \in \mathbb{R} \\ z = z \end{cases}$$

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{R'} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)\,r\,dr\,d\theta\,dz$$

*** Coordonnées sphériques :**

$$\begin{cases} x = \rho\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\varphi)\sin(\theta) \quad \text{où } \rho \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi \\ z = \rho\cos(\varphi) \end{cases}$$

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{R'} f(\rho\sin(\varphi)\cos(\theta), \rho\sin(\varphi)\sin(\theta), \rho\cos(\varphi))\,\rho^2\sin(\varphi)\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$$

*** Changement général de coordonnées :**

Soient D', un domaine de $\mathbb{R}^n$, un changement de coordonnées :

$$\begin{array}{rccc} G: & D' & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1(u_1,u_2,\ldots,u_n) \\ x_2(u_1,u_2,\ldots,u_n) \\ \vdots \\ x_n(u_1,u_2,\ldots,u_n) \end{pmatrix} \end{array}$$

$D = G(D')$, l'image du domaine D', et une fonction réelle

$$\begin{array}{rccc} f: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1,x_2,\ldots,x_n) & \longmapsto & f(x_1,x_2,\ldots,x_n) \end{array}$$

tels que l'intégrale n-ième $\iint\ldots\iint_D f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,dx_1\,dx_2\,\ldots\,dx_{n-1}\,dx_n$ existe. Alors l'intégrale n-ième

$$\iint\ldots\iint_{D'} f(x_1(u_1,\ldots,u_n), x_2(u_1,\ldots,u_n),\ldots,x_n(u_1,\ldots,u_n)) \left|\frac{\partial(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial(u_1,u_2,\ldots,u_n)}\right| du_1\,du_2\,\ldots\,du_{n-1}\,du_n$$

existe et est égale à

$$\iint\ldots\iint_D f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,dx_1\,dx_2\,\ldots\,dx_{n-1}\,dx_n.$$

*** Intégrales impropres :**

Définition : Soit f une fonction positive sur $[a,+\infty[$. On dit que f est intégrable sur $[a,+\infty[$ si $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ existe, et dans ce cas on pose :

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx\ .$$