Université du Québec à Montréal **Session d'automne 2011**
Groupe-cours 51 **MAT1112 - Calcul I**

Devoir 1

à remettre le vendredi 14 octobre 2011 à 9h

Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction. Les étapes des calculs doivent figurer sur la copie.

Exercice 1. Soit k un nombre réel fixé, strictement positif. On définit la fonction à deux variables suivante :

$$u(x,t) = e^{-4kt}\cos(2x) - 3\ e^{-\frac{k}{4}t}\sin(\frac{x}{2})\ .$$

(a) Montrer que u satisfait la relation suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Cette équation est appelée l'*équation de diffusion de la chaleur* : $u(x,t)$ représente la température dans un fil homogène à l'instant t au point x, et k est le coefficient de diffusivité thermique.

(b) Que devient la température dans le fil à mesure que le temps passe, c'est-à-dire lorsque t tend vers $+\infty$?

Exercice 2. Soit la fonction

$$h(x,y) = \sqrt[4]{x^3+2xy+y^2-3} = (x^3+2xy+y^2-3)^{\frac{1}{4}}.$$

En utilisant le théorème d'approximation linéaire, estimer sans calculatrice la valeur numérique de $h(4.027, 2.018)$ à partir de celle de $h(4,2)$.

Exercice 3. Soit la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3-4xy^2+y^3}{x^2+3y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\ ; \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0)\ . \end{cases}$$

(a) Expliquer pourquoi f est continue sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

(b) Montrer que f est continue en $(0,0)$. On pourra utiliser une majoration de $|f(x,y)|$ par une fonction plus simple.

(c) Calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, lorsque $(x,y) \neq (0,0)$.

(d) En utilisant la définition, calculer les dérivées partielles $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}$ et $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}$.

(e) La fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$? Même question pour la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

(f) Déterminer la dérivée directionnelle $f'((u,v),(0,0))$ de f au point $(0,0)$ dans la direction (u,v), en utilisant la définition théorique de la dérivée directionnelle. Aurait-on pu l'obtenir à partir des valeurs trouvées en (d) en utilisant une formule du cours ?

Tourner la page... **Tourner la page...**

Exercice 4. Soit la fonction

$$g(x, y, z) = xyz - x^2y + 4y^3 - z^2 - 3x^2 - 6y^2.$$

(a) Calculer le gradient $\nabla g|_{(-1,1,3)}$ de g au point $(-1, 1, 3)$.

(b) Déterminer la dérivée directionnelle $g'((\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}), (-1, 1, 3))$ de g au point $(-1, 1, 3)$ dans la direction $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$.

(c) Déterminer le ou les points critiques de $g(x, y, z)$, c'est-à-dire les points $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(a,b,c)} = 0 \quad \underline{\text{et}} \quad \left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{(a,b,c)} = 0 \quad \underline{\text{et}} \quad \left.\frac{\partial g}{\partial z}\right|_{(a,b,c)} = 0\ .$$