UQÀM
Vivien Ripoll

Session d'hiver 2013
MAT1013 - Analyse I

Rappels de trigonométrie

I Propriétés fondamentales

On considère un triangle rectangle, et un de ses angles non droits θ.

$$\cos\theta = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}} \quad ; \quad \sin\theta = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}} \quad ; \quad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}.$$

Sur le **cercle trigonométrique** (cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1), on définit la mesure d'un angle (en radians) comme la longueur de l'arc de cercle décrivant cet angle. $(\cos\theta, \sin\theta)$ sont alors les coordonnées du point M correspondant à l'angle θ. Et $\tan\theta$ est l'ordonnée du point d'intersection de la droite (OM) avec la droite d'équation $x = 1$ (tangente au cercle).

Visualiser ou dessiner le cercle est un très bon moyen pour se souvenir des propriétés des fonctions trigonométriques.

I.1 Valeurs particulières

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	non défini

Moyen mnémotechnique : la ligne des sin se lit $\frac{\sqrt{0}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{4}}{2}$; la ligne des cos est dans l'autre sens.

Application pratique : couper un gâteau en 6 parts égales en utilisant $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

I.2 Propriétés analytiques

- cos et sin sont définies sur $\mathbb{R}$, 2π-périodiques, et bornées (entre -1 et 1).
- cos est paire, sin est impaire.
- tan est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, elle est impaire et π-périodique.
  Limites : à droite : $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2}+k\pi)^+} \tan x = -\infty$; à gauche : $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2}+k\pi)^-} \tan x = +\infty$.
- Dérivées : $\cos(x)' = -\sin x$; $\sin(x)' = \cos x$; $\tan(x)' = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Tracé des courbes. (à connaître)

II Formules de trigonométrie

II.1 Formules basiques :

La série de formules suivante est à savoir absolument, et se retrouve facilement en visualisant le cercle trigonométrique :

$$\begin{array}{lll}
\cos(-x) = \cos x & \cos(\pi - x) = -\cos x & \cos(\pi + x) = -\cos x \\
\sin(-x) = -\sin x & \sin(\pi - x) = \sin x & \sin(\pi + x) = -\sin x \\
\tan(-x) = -\tan x & \tan(\pi - x) = -\tan x & \tan(\pi + x) = \tan x
\end{array}$$

$$\cos(\tfrac{\pi}{2} - x) = \sin x \qquad \sin(\tfrac{\pi}{2} - x) = \cos x \qquad \tan(\tfrac{\pi}{2} - x) = \tfrac{1}{\tan x} = \mathrm{cotan}\, x$$

Rappelons également : $\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$

II.2 $\cos$ et $\sin$ d'une somme

Les formules suivantes sont très importantes. Il est souvent utile de connaître au moins celles marquées (*), et de savoir retrouver les autres rapidement à partir de celles-ci.

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad (*) \\
\cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\
\sin(a+b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a \qquad (*) \\
\sin(a-b) &= \sin a \cos b - \sin b \cos a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \qquad \sin 2x = 2 \sin x \cos x \\
&= 2\cos^2 x - 1 \\
&= 1 - 2\sin^2 x
\end{aligned}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

Les formules pour la fonction tan se retrouvent à partir de celles pour les cos et sin :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \qquad \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

II.3 Linéarisation et factorisation

On déduit de la série précédente les formules de linéarisation d'un produit de cos ou sin.

$$\begin{aligned}
\cos a \cos b &= \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b)) \\
\sin a \sin b &= \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)) \\
\sin a \cos b &= \frac{1}{2}(\sin(a-b) + \sin(a+b))
\end{aligned}$$

En posant $p = a - b$ et $q = a + b$ dans les formules précédentes, on obtient les formules de factorisation de sommes de cos ou sin :

$$\begin{aligned}
\cos p + \cos q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\
\cos p - \cos q &= -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \\
\sin p + \sin q &= 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}
\end{aligned}$$

III Fonctions trigonométriques réciproques

III.1 Rappels sur les fonctions réciproques

Soient I, J deux intervalles, et $f : I \to J$ une fonction d'une variable. On suppose que f est *bijective* (c'est-à-dire : pour tout $y \in J$, il existe un unique $x \in I$ tel que $f(x) = y$).

Alors f admet une *fonction réciproque*, notée f^{-1}. C'est l'unique fonction g telle que :

$$\forall x \in I,\ g(f(x)) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in J,\ f(g(y)) = y\ .$$

On a, pour $x \in I$ et $y \in J$: $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.

On peut montrer que, si f est une fonction dérivable sur $[a, b]$ telle que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f induit une bijection de $[a, b]$ vers $[f(a), f(b)]$. De même, si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f induit une bijection de $[a, b]$ vers $[f(b), f(a)]$.

Dérivée de la fonction réciproque. Si $f : I \to J$ est bijective, et si $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, alors f^{-1} est dérivable sur J et

$$f^{-1}(x)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\ .$$

Démonstration : Il suffit d'écrire $f(f^{-1}(x)) = x$ et de dérivée terme à terme en utilisant la dérivation d'une fonction composée ; on obtient $f'(f^{-1}(x)) \times f^{-1}(x)' = 1$.

Ex. :

- $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est la réciproque de $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, est la réciproque de la *restriction* à $\mathbb{R}^+$ de la fonction $x \mapsto x^2$ (et elle n'est dérivable que sur $\mathbb{R}^{+*}$).
- La fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, est la réciproque de la fonction $x \mapsto x^3$ (elle n'est dérivable que sur $\mathbb{R}^*$).

Propriété des courbes. Le graphe de f^{-1} est le *symétrique* du graphe de f par rapport à la droite $y = x$.

III.2 Les fonctions arccos, arcsin, arctan

N.B. : Il faut savoir tracer les graphes de ces fonctions.

(a) La fonction $x \mapsto \cos x$ induit une bijection de $[0, \pi]$ vers $[-1, 1]$. Sa réciproque est appelée la fonction **arccosinus** : $\boxed{\arccos :\ [-1, 1] \to [0, \pi]}$.

Pour $x \in [-1, 1]$, $\arccos x$ est égal à l'unique angle θ dans $[0, \pi]$ tel que $\cos\theta = x$.

On a donc : $\forall x \in [-1, 1],\ \cos(\arccos x) = x$.

Attention : par contre $\arccos(\cos\theta)$ n'est pas forcément égal à θ (c'est égal à θ seulement quand $\theta \in [0, \pi]$).

Dérivée : la fonction arccos est dérivable sur $]-1, 1[$, et

$$\forall x \in]-1, 1[,\ \boxed{\arccos(x)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}}\ .$$

(Ceci est utile pour calculer des primitives de fonctions faisant intervenir des racines.)

Démonstration : pour $\theta \in]0, \pi[$, $\cos(\theta)' = -\sin\theta \neq 0$ donc pour $x \in]-1, 1[$ (d'après la formule générale de la dérivée de la réciproque) : $\arccos(x)' = \dfrac{1}{-\sin(\arccos x)}$. Soit $\theta = \arccos x$:

$\theta \in]0,\pi[$ donc $\sin\theta > 0$ et $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1-x^2}$, et on peut conclure.

(b) La fonction $x \mapsto \sin x$ induit une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ vers $[-1, 1]$. Sa réciproque est appelée la fonction **arcsinus** : $\boxed{\arcsin :\ [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$.

Pour $x \in [-1, 1]$, $\arcsin x$ est égal à l'unique angle θ dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\sin\theta = x$.

On a donc : $\forall x \in [-1, 1],\ \sin(\arcsin x) = x$.
Attention : par contre $\arcsin(\sin\theta)$ n'est pas forcément égal à θ (c'est égal à θ seulement quand $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$).

Dérivée : la fonction arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$, et

$$\forall x \in]-1,1[,\ \boxed{\arcsin(x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}.$$

Démonstration : pour $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\sin(\theta)' = -\cos\theta \neq 0$, donc pour $x \in]-1, 1[$, $\arcsin(x)' = \dfrac{1}{\cos(\arcsin x)}$. Soit $\theta = \arcsin x$: $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc $\cos\theta > 0$ et $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2}$, et on peut conclure.
Remarque : on note que $\arcsin(x)' + \arccos(x)' = 0$, donc que la somme de ces deux fonctions est constante sur l'intervalle $]-1, 1[$. En fait on a : $\forall x \in [-1, 1], \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

(c) La fonction $x \mapsto \tan x$ induit une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ vers $\mathbb{R}$. Sa réciproque est appelée la fonction **arctangente** : $\boxed{\arctan :\ \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, $\arctan x$ est égal à l'unique angle θ dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan\theta = x$.

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ \tan(\arctan x) = x$.
Attention : par contre $\arctan(\tan\theta)$ n'est pas forcément égal à θ (c'est égal à θ seulement quand $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$).

Dérivée : la fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \boxed{\arctan(x)' = \frac{1}{1+x^2}}.$$

(Ceci est très utile pour calculer des primitives de fractions rationnelles.)

Démonstration : pour $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\tan(\theta)' = 1 + \tan^2\theta \neq 0$ donc pour $x \in \mathbb{R}$,
$\arctan(x)' = \dfrac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \dfrac{1}{1+x^2}$.