UQÀM
MAT1013
Analyse 1

Session d'hiver 2013
Vivien Ripoll
(vivien.ripoll@lacim.ca)

Examen intra 1

Consignes :
- **Aucun document** (cours, livres, calculatrice, appareil électronique) n'est autorisé.
- La copie doit être écrite à l'encre (stylo bille ou plume, pas de crayon gris). Veuillez **soigner la présentation** de votre copie.
- Sauf mention explicite du contraire, il faut **démontrer** tout ce que l'on affirme. Les étapes des calculs et des raisonnements doivent figurer sur la copie. Si l'on utilise un théorème du cours, il faut le dire explicitement. La qualité et à la précision de la rédaction seront des critères importants lors de la notation.
- Les exercices sont indépendants, et leur ordre n'a pas d'importance. À l'intérieur d'un même exercice, on pourra utiliser les résultats des questions précédentes pour répondre à une question donnée.
- Le barême annoncé est indicatif et pourrait être modifié.
- La question (*) n'est à travailler que si l'on a fini le reste.

Exercice 1. [14 pts]

(a) Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, et $M \in \mathbb{R}$. Donner la définition de :

M est un majorant de E dans $\mathbb{R}$.

(b) Reproduire le tableau ci-dessous sur votre copie, et y remplir les 12 cases, **sans justifications ni preuves**. Pour chaque ensemble A, B, C de la première colonne, on y écrira, s'ils existent, sa borne supérieure dans $\mathbb{R}$, son plus grand élément (i.e., maximum), sa borne inférieure dans $\mathbb{R}$, et son plus petit élément (i.e, minimum). Lorsque l'un de ces attributs n'existe pas, on écrira *Non* dans la case correspondante. Par exemple, si l'on pense que A n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{R}$, on écrira *Non* dans la première case de la première ligne.

	Borne sup.	Maximum	Borne inf.	Minimum
$A = \left\{5 - \dfrac{2}{\sqrt{n}} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$				
$B = \left\{(-1)^n n - \dfrac{3}{n} - n \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$				
$C = \left\{x \in \mathbb{Q} \mid \left\lvert x - \sqrt{2}\right\rvert \leq \sqrt{2}\right\}$				

Exercice 2. [16 pts]

Pour chacune des applications suivantes, déterminer si elle est injective et si elle est surjective (**avec des preuves**).

(a) $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ & x & \mapsto & (2x+1)^2 \end{array}$ (b) $\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{N} \\ & n & \mapsto & (2n+1)^2 \end{array}$

Exercice 3. [24 pts]

Pour chacune des propriétés suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Si l'on répond *faux*, on fournira un contre-exemple. Si l'on répond *vrai*, on donnera une preuve ou on justifiera par un théorème du cours.

(a) Pour toute suite (u_n) jamais nulle, si (u_n) tend vers 0, alors $(1/u_n)$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

(b) Pour toute suite (u_n), si (u_n) est décroissante, alors elle n'est pas minorée.

(c) Pour toute suite (u_n), si (u_n) est décroissante, alors elle est majorée.

(d) Pour toute suite (u_n), si (u_n) est bornée et monotone, alors elle converge vers une limite finie.

(e) Pour toute suite (u_n), si (u_n) est bornée, alors elle est majorée.

(f) Pour toute suite (u_n), si (u_n) tend vers $+\infty$, alors elle est croissante et non majorée.

Exercice 4. [26 pts]

On définit la suite (a_n) par : $a_0 = 2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 9}{6}$.

(a) Montrer par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq 3$.

(b) Montrer que la suite (a_n) est croissante.

(c) La suite (a_n) est-elle convergente ? Si elle l'est, calculer sa limite.

Exercice 5. [20 pts]

Soit (u_n) une suite qui converge vers 0, et (v_n) un suite bornée.

(a) Rappeler la définition mathématique de "(u_n) tend vers 0".

(b) Montrer rigoureusement, en utilisant la notation ε, que la suite produit $(u_n v_n)$ converge vers 0.

(c) (*) Démontrer que la suite $((u_n)^n)$ tend vers 0.