UQÀM **MAT1013** **Analyse 1**

Session d'hiver 2013
Vivien Ripoll
(vivien.ripoll@lacim.ca)

Feuille d'exercices 4 : Limites de suites, comparaisons et opérations

---

Exercice 1. Donner la limite des suites suivantes (si elle existe ; sinon on démontrera qu'elle n'existe pas).

(a) $a_n = \dfrac{3n+1+2n^2}{6n^3-2}$

(b) $b_n = \dfrac{3n+1+2n^2}{6n^2-2}$

(c) $c_n = \dfrac{3n+1+2n^2}{6n-2}$

(d) $d_n = \dfrac{2(-1)^n n^2+3n+1}{6n^2-2}$

Exercice 2. Soit $P(n)$ un polynôme en n de degré p, $Q(n)$ un polynôme en n de degré q, c'est-à-dire : $P(n) = an^p$+des termes de degrés $< p$, et $Q(n) = bn^q$+ des termes de degrés $< q$, où a et b sont des constantes, appelées coefficient dominant de P (resp., de Q).

Soit $u_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$. Déterminer $\lim(u_n)$ selon les valeurs de p, q, a et b.

Exercice 3. Déterminer la limite des suites suivantes (si elle existe ; sinon on démontrera qu'elle n'existe pas). [On pourra utiliser les opérations sur les limites, les comparaisons, et le fait que $(\frac{1}{n}) \to 0$].

(a) $\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$

(b) $\dfrac{3-5n+6n^2}{6-5n+3n^2}$

(c) $\dfrac{\sqrt{2n+7n^2+4}}{5n-3}$

(d) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

(e) $\sqrt{n^2+1}-n$

(f) $\sqrt{n^2+n}-n$

(g) $\dfrac{\cos(3n)+2\sin(5n)}{n}$

(h) $\dfrac{n+\sqrt{n}-7}{3n+2}$

(i) $\dfrac{n+(-1)^n\sqrt{n}-7}{3n+2}$

(j) $\dfrac{(-1)^n n+\sqrt{n}-7}{3n+2}$

Exercice 4. Soit (u_n) et (v_n) deux suites strictement positives, avec $(u_n) \to 0$ et $(v_n) \to +\infty$. On pose $w_n = u_n v_n$. On se demande quelle est la limite de w_n. À l'aide d'exemples, montrer que chacune des situations suivantes peut arriver :

(a) $(w_n) \to 0$.

(b) $(w_n) \to +\infty$.

(c) $(w_n) \to a$, pour $a > 0$ quelconque.

(d) (w_n) n'a pas de limite (même $+\infty$).

Exercice 5. Déterminer la limite des suites suivantes.

(a) $\dfrac{n^n}{n!}$

(b) $\dfrac{1+2+3+\dots n}{n^2}$

(c) $\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$

(d) (**) $\dfrac{1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}$ (pour $k \in \mathbb{N}$)

Pour l'exercice suivant, on pourra utiliser le fait que pour $\alpha \geq 0$, $\lim(\alpha^n) = 0,\ 1,$ ou $+\infty$ selon si $\alpha < 1$, $= 1$ ou > 1.

Exercice 6. Soient $a, b > 0$. Selon les valeurs de a et b, déterminer la limite de $\dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$.

Exercice 7. On rappelle l'inégalité de Bernouilli : pour tout $x > -1$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$. Pour $a > 0$, on appelle racine n-ième de a (notée $\sqrt[n]{a}$ ou $a^{\frac{1}{n}}$) l'unique réel b positif tel que $b^n = a$. Soit a un réel ≥ 1 ; l'objet de l'exercice est de montrer que la suite $(a^{\frac{1}{n}})$ tend vers 1.

(a) Montrer que si $a > 1$, alors $a^{\frac{1}{n}} \geq 1$

(b) On pose $h_n = a^{\frac{1}{n}} - 1$, de sorte que $a^{\frac{1}{n}} = 1 + h_n$. Montrer en utilisant l'inégalité de Bernouilli que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq h_n \leq \dfrac{a-1}{n}$.

(c) En déduire que $(h_n) \to 0$, et conclure.

(d) Montrer que si $a \in]0, 1[$, on a aussi $(a^{\frac{1}{n}}) \to 1$.

Pour les deux exercices suivants, on utilisera la définition mathématique des limites. Certaines des propriétés ont été énoncées en cours sans démonstration et sont utiles en pratique pour calculer des limites.

Exercice 8. Démontrer les énoncés suivants :

(a) Si (u_n) est bornée et $(v_n) \to 0$, alors $(u_n v_n) \to 0$. (est-ce vrai si on remplace 0 par une autre limite réelle ?)

(b) Si $u_n \leq v_n$ et avec $(u_n) \to +\infty$, alors $(v_n) \to +\infty$.

(c) Si $(u_n) \to +\infty$ et $a > 0$, alors $(a u_n) \to +\infty$.

(d) Si $(u_n) \to \ell$, avec $\ell > 0$, et $(v_n) \to +\infty$, alors $(u_n v_n) \to +\infty$.

(e) Si (u_n) est bornée et $(v_n) \to +\infty$, alors $(u_n + v_n) \to +\infty$.

Exercice 9. Soit (u_n) une suite convergeant vers un réel ℓ.

(a) Montrer (sans utiliser le théorème de comparaison du cours) que si $u_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\ell \leq M$.

(b) Si $u_n < M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, a-t-on forcément $\ell < M$?

Pour l'exercice suivant, on rappelle un théorème du cours : si (u_n) est une suite croissante majorée, alors elle converge.

Exercice 10. On définit la suite (u_n) par :

$$u_0 = 1, \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}.$$

(a) À la calculatrice ou à l'ordinateur, calculer les 5 (ou plus) premiers termes de la suite, et observer le comportement.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$ (par exemple par récurrence).

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2$.

(d) En déduire que (u_n) est convergente.

(e) Montrer que sa limite est $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

N.B. : Pour pratiquer, on pourra trouver d'autres exercices du même type que le 10 (suite récurrente) dans la feuille 6 de C. Reutenauer (voir page web), exercices 1, 6, 7, 8.

Exercice 11. Soit (u_n) une suite à termes positifs, qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. On cherche à démontrer que $\left(\sqrt{u_n}\right) \to \sqrt{\ell}$.

(a) Supposons $\ell = 0$. Montrer (avec la notation ϵ) que $\left(\sqrt{u_n}\right) \to 0$.

(b) Supposons $\ell \neq 0$. Montrer que $\left|\sqrt{u_n} - \sqrt{\ell}\right| \leq \dfrac{|u_n - l|}{\sqrt{\ell}}$. Conclure.

(c) Soit v_n une suite quelconque, telle que (v_n^2) tende vers un réel a. Peut-on en déduire que (v_n) tend vers $\sqrt{a}$? Ou vers $-\sqrt{a}$? Que peut-on dire si $a = 0$?

Exercice 12. Soit (u_n) une suite.

(a) On suppose que (u_n) n'est pas majorée. Est-elle alors forcément croissante ?

(b) (*) Montrer que si (u_n) n'est pas majorée, alors elle admet une suite extraite croissante.

(c) La réciproque de (b) est-elle vraie ?

Exercice 13. (*) Soit (u_n) une suite. Montrer que (u_n) n'est pas majorée si et seulement si (u_n) a une suite extraite tendant vers $+\infty$.