**UQÀM** **Session d'hiver 2013**
**MAT1013** Vivien Ripoll
**Analyse 1** (vivien.ripoll@lacim.ca)

# Feuille d'exercices 3 : Valeur absolue, Suites, Limites

---

## Valeur absolue

**Exercice 1.** Pour chacune des équations suivantes, la résoudre et dessiner sur l'axe des réels l'ensemble des solutions.

(a) $|x+5| \leq 2$

(b) $|3x-2| = 1$

(c) $|3x-2| < 1$

(d) $|3x-2| > 1$

(e) $|x+5| = |x+4|$

(f) $||x|-2| = 3$

(g) $|x-4| \leq |x+4|$

(h) $|2x^2 - 9x + \frac{5}{2}| < \frac{15}{2}$

**Exercice 2.** Tracer le graphe de la fonction $x \mapsto |x|$, puis celui de la fonction $x \mapsto |2x-3|$.

**Exercice 3.** Pour $x \geq 0$, on note $\sqrt{x}$ l'unique réel positif dont le carré est $x$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $(\sqrt{x})^2 = x$, et que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $|y| = \sqrt{y^2}$.

**Exercice 4.** Montrer que pour $x, y \in \mathbb{R}$, $x^2 = y^2$ si et seulement si $|x| = |y|$. Que peut-on dire si $x^3 = y^3$ ?

**Exercice 5.** Montrer que pour $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\max\{a,b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2} \quad \text{et} \quad \min\{a,b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}.$$

## Segments emboîtés, suites et limites

**Exercice 6.** Pour chaque suite dont les premiers termes sont donnés ci-dessous, donner la description la plus plausible de la suite, soit avec une fonction explicite, soit avec une formule de récurrence, soit avec une description en français.

(a) 6, 3, 1.5, 0.75, 0.375 ...

(b) 1, 2, 9, 28, 65, ...

(c) 7, 4, 1, -2, -5, ...

(d) 1, -2, 4, -8, 16, ...

(e) 1, 4, 1, 4, 2, 1, 3, 5, ...

(f) 1, 4, 27, 256, 3125, ...

Le résultat de l'exercice ci-dessous pourra être utilisé dans les exercices suivants.

**Exercice 7.** Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \frac{1}{n}$. Montrer en utilisant la notation $\epsilon$ que $u_n$ converge vers 0. [On utilisera la propriété archimédienne de $\mathbb{R}$]

**Exercice 8.** Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_n = \dfrac{3n^2-2}{2n^2-1}$.

(a) Trouver un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$, $|u_n - \frac{3}{2}| < 0.001$.

(b) Montrer, en utilisant la notation $\epsilon$, que la suite $(u_n)$ converge vers $\frac{3}{2}$.

**Exercice 9.** Montrer, en utilisant la notation $\epsilon$, que les suites suivantes tendent vers 0.

(a) $u_n = \dfrac{2}{n^2+3n+1}$

(b) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

(c) $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+5}$

(d) $u_n = \dfrac{\cos n}{n}$

**Exercice 10.** Soit $a$ et $b$ deux réels fixés. On définit une suite $(u_n)$ par $u_0 = b$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{a+u_n}{2}.$$

(a) Montrer par récurrence sur $n$ que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - a = \dfrac{b-a}{2^n}$.

(b) Montrer que $(u_n)$ est convergente, et donner sa limite.

**Exercice 11.** Pour chacune des propriétés suivantes, pensez-vous qu'elle soit vraie ou fausse ? Si on la pense fausse, on fournira un contre-exemple.

(a) Si $(u_n)$ est une suite convergente, alors elle est bornée.

(b) Si $(u_n)$ est bornée, alors elle est convergente.

(c) Si $(u_n)$ est convergente, alors elle est décroissante.

(d) si $(u_n)$ est croissante, alors elle est convergente.

(e) si $(u_n)$ est croissante, alors elle est divergente.

(f) si $(u_n)$ est croissante et majorée, alors elle est convergente.

(g) si $(u_n)$ est croissante, alors elle est minorée.

(h) si $(u_n)$ tend vers 0, alors $(1/u_n)$ tend vers $+\infty$ ou bien vers $-\infty$.

(i) si $(u_n)$ et $(v_n)$ sont divergentes, alors $(u_n + v_n)$ est divergente.

(j) si $(u_n)$ et $(v_n)$ sont convergentes, alors $(u_n + v_n)$ et $(u_n v_n)$ sont convergentes.

(k) si $(u_n + v_n)$ et $(u_n v_n)$ sont convergentes, alors $(u_n)$ et $(v_n)$ sont convergentes.

**Exercice 12.** Somme de deux suites.

(a) Soit $(a_n)$ et $(b_n)$ deux suites telles que $(a_n)$ converge vers $\ell$ et $(b_n)$ vers $\ell'$. Montrer, en utilisant la notation $\epsilon$, que la suite $(a_n + b_n)$ est convergente et que sa limite est $\ell + \ell'$.

(b) En déduire que la somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est divergente.

**Exercice 13.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \left[\dfrac{2n-3}{n}, \dfrac{2n+1}{n}\right]$. Montrer que $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} I_n = \{2\}$.

**Exercice 14.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \left[n, n + \dfrac{3}{n}\right]$. Que vaut $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} I_n$ ?

**Exercice 15.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \left[\dfrac{4n-2}{n}, \dfrac{5n+2}{n}\right]$. Est-ce que $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} I_n$ est un singleton ? Est-il non vide ? (*) Le calculer.

**Exercice 16.** Soit $\{I_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ une suite de segments emboîtés. On pose $I_n = [a_n, b_n]$. D'après le principe des segments emboîtés, $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est un singleton $\{u\}$. Montrer que $u = \inf\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
[On pourra s'inspirer de la démonstration du cours]

**Exercice 17.** (*) Soit $\{I_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ une suite de segments emboîtés de $\mathbb{R}$. On rappelle que $\ell(I_n)$ tend vers 0 par définition, et que le principe des segments emboîtés affirme que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est un singleton $\{u\}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = [a_n, b_n]$. Montrer, en utilisant la notation $\epsilon$, que $a_n$ et $b_n$ convergent toutes deux vers $u$.