UQÀM **Session d'hiver 2013**
MAT1013 Vivien Ripoll
Analyse 1 (vivien.ripoll@lacim.ca)

Feuille d'exercices 2 : Rationnels, majorants, bornes supérieures

Encore une récurrence !

Exercice 1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ (avec $k \leq n$), le *coefficient binomial*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

est un entier naturel. [On pourra utiliser (en la démontrant) la formule du triangle de Pascal : $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$.]

Remarque : cela peut se montrer par d'autres méthodes, par exemple on montre que $\binom{n}{k}$ compte le nombre de parties à k éléments dans un ensemble à n éléments.

Rationnels et irrationnels

Exercice 2. Dans cet exercice on utilisera simplement les axiomes de corps ordonné de $\mathbb{Q}$.

(a) Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ tels que $a \geq b$, $c \geq d$. Montrer que $a + c \geq b + d$.

(b) Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ tels que $a \geq b \geq 0$, $c \geq d \geq 0$. Montrer que $ac \geq bd$.

(c) Soient $a, b \in \mathbb{Q}$ tels que $a \geq b \geq 0$. Montrer que $a^2 \geq b^2$, puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a^n \geq b^n$.

Exercice 3.

(a) Est-ce que la somme de deux nombres irrationnels est toujours un nombre irrationnel ? Et pour le produit ?

(b) Montrer que : $x \notin \mathbb{Q}$, $y \in \mathbb{Q} \Rightarrow x + y \notin \mathbb{Q}$;

(c) Montrer que : $x \notin \mathbb{Q}$, $y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \Rightarrow xy \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 4.

(a) Montrer que $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$.

(b) Montrer que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

(c) Montrer que $\sqrt{3} + \sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$. [On pourra utiliser un raisonnement par l'absurde, calculer $(\sqrt{3} + \sqrt{7})(\sqrt{3} - \sqrt{7})$ et utiliser (b) et l'exercice précédent.]

(d) (*) Soit a un nombre premier. Montrer que $\sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$.

(e) (**) Soit $a \in \mathbb{N}$ un nombre qui n'est pas le carré d'un entier. Montrer que $\sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$.

(f) Soit $a, b \in \mathbb{N}$ des nombres qui ne sont pas carré d'un entier. Montrer que $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ et $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ sont irrationnels. [Utiliser (e).]

Exercice 5. En utilisant le fait que $\mathbb{Q}$ est archimédien, montrer que si $x, y, z \in \mathbb{Q}$ sont tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x \leq y \leq x + \frac{z}{n},$$

alors $x = y$.

Majorants, minorants, bornes supérieures et inférieures

Exercice 6. Soit $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\} \subseteq \mathbb{Q}$. La partie A est-elle majorée ? minorée ? Donner l'ensemble de ses majorants, l'ensemble de ses minorants. A a-t-elle un plus grand élément ? Un plus petit élément ?

Pour les exercices suivants, on rappelle les définitions du cours :

- La borne supérieure d'un ensemble X (notée $\sup(X)$) est le plus petit des majorants de X (s'il existe). Si elle appartient à X, on l'appelle le maximum de X (ou plus grand élément de X, noté $\max(X)$).
- La borne inférieure d'un ensemble X (notée $\inf(X)$) est le plus grand des minorants de X (s'il existe). Si elle appartient à X, on l'appelle le minimum de X (ou plus petit élément de X, noté $\min(X)$)

Exercice 7. On reprend l'ensemble A de l'exercice précédent. Donner la borne supérieure et la borne inférieure de A dans $\mathbb{Q}$ (si elles existent).

Exercice 8. Donner la borne supérieure et la borne inférieure dans $\mathbb{R}$ (si elles existent) des ensembles suivants, et préciser s'ils ont un maximum ou un minimum.

(a) $\{2 - \dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$

(b) $\{2 + \dfrac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$

(c) $\{(-1)^n + \dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$

(d) $\left\{\dfrac{3n}{3n+2} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$

(e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 \geq 0\}$

(f) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 1 \leq 0\}$

(g) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 > 9\}$

Exercice 9. Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble majoré et non vide. Montrer que $M = \sup A$ si et seulement si :

- M est un majorant de A ; **et**
- $\forall \epsilon > 0,\ \exists x \in A \mid x > M - \epsilon$.

Cette caractérisation est très pratique et pourra être utilisée dans les exercices suivants.

Exercice 10. Soient E et F des parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$, telles que $E \subseteq F$. Montrer que

$$\inf F \leq \inf E \leq \sup E \leq \sup F.$$

Exercice 11. Soit E une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que l'intervalle $[\inf E, \sup E]$ est le plus petit intervalle fermé $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ tel que $E \subseteq [a, b]$.

Exercice 12. Soient A et B deux parties majorées de $\mathbb{R}$.

(a) Montrer que $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$.

(b) Montrer avec un exemple qu'on n'a pas forcément $\sup(A \cap B) = \min(\sup A, \sup B)$. A-t-on $\sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B)$?

(c) En supposant A et B minorées, énoncer les propriétés analogues pour $\inf(A \cup B)$ et $\inf(A \cap B)$.

Exercice 13. Soit A un ensemble non vide et majoré dans $\mathbb{R}$. Montrer que pour $\alpha \in \mathbb{R}$:

(a) $\sup\{\alpha + x \mid x \in A\} = \alpha + \sup A$.

(b) $\sup\{\alpha x \mid x \in A\} = \alpha \sup A$ si $\alpha \geq 0$. Que peut-on dire si $\alpha < 0$?

Exercice 14. (*) Soient A, B des parties non vides de $\mathbb{R}$. On définit

$$A + B = \{x \in \mathbb{R} \mid x = a + b \text{ pour } a \in A \text{ et } b \in B\}.$$

Si A et B sont majorées, a-t-on $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$? (justifier) Que vaut $\inf(A + B)$ lorsque A et B sont minorées ?

Exercice 15. Soit $A \subseteq \mathbb{R}$. On rappelle que $A^c = \mathbb{R} \setminus A$.

(a) Donner un exemple de A tel que A^c soit majoré ; minoré ; borné.

(b) Montrer que $\sup A^c$, s'il existe, est le plus petit $M \in \mathbb{R}$ tel que $A \supseteq]M, +\infty[$.

(c) Montrer qu'on ne peut pas avoir à la fois A et A^c majorés.

Densité

Dans les exercices suivants, on utilisera le théorème de densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\forall a < b \in \mathbb{R},\ \exists q \in \mathbb{Q} \mid a < q < b.$$

Exercice 16. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la borne supérieure dans $\mathbb{R}$ de l'ensemble

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \alpha\}.$$

Est-ce un maximum ? Mêmes questions pour l'ensemble $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq \alpha\}$.

Exercice 17. Montrer qu'entre deux réels distincts, il existe toujours une infinité de rationnels. [On pourra procéder par l'absurde.]

Exercice 18. Montrer que l'ensemble des nombres irrationnels est dense dans $\mathbb{R}$:

$$\forall a < b \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \mid a < x < b.$$

Exercice 19. (**) Soit $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres réels ayant un développement décimal qui se termine, i.e. :

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^k} \mid a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Montrer que $\mathbb{D} \subsetneq \mathbb{Q}$ et que $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 20.

(a) (*) Déterminer bornes supérieures et inférieures, dans $\mathbb{R}$, de l'ensemble

$$X = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 + x - 1 \leq 0\}.$$

X a-t-il un maximum, un minimum ?

(b) (**) Soit P un polynôme de degré 2, et notons $X_P = \{x \in \mathbb{Q} \mid P(x) \leq 0\}$. Montrer que X_P est majoré si et seulement si X_P est minoré.

(c) (***) On suppose de plus que tous les coefficients de P sont rationnels. Montrer que X_P a un maximum si et seulement si X_P a un minimum.