UQÀM — **Session d'hiver 2013**
MAT1013 — Vivien Ripoll
Analyse 1 — (vivien.ripoll@lacim.ca)

Feuille d'exercices 10 : Continuité, introduction à la dérivabilité

Continuité et fonctions réciproques

Exercice 1. Restreindre la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ à un intervalle I le plus grand possible tel que f soit strictement monotone sur I (on commencera par tracer une esquisse de la courbe de f). Expliquer pourquoi f induit une bijection de I vers $f(I)$, et calculer l'expression de sa fonction réciproque f^{-1}.

Exercice 2. Montrer que la fonction $f(x) = \exp(\frac{1}{x})$ est une bijection continue de $\mathbb{R}^*$ vers $]0, +\infty[\setminus\{1\}$, et calculer l'expression de sa fonction réciproque f^{-1}. (on commencera par tracer une esquisse de la courbe de f, et on pourra séparer $\mathbb{R}^*$ en deux et utiliser un théorème du cours).

Dérivabilité

Exercice 3.

(a) Tracer le graphe d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de votre choix mais vérifiant : f impaire, f dérivable sur $\mathbb{R}$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 1$, f strictement croissante sur $[0, 2]$ et sur $[3, +\infty[$, f strictement décroissante sur $[2, 3]$, $f'(0) = 0$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(b) Sur le même dessin, esquisser le graphe de f'.

Exercice 4. Soit α un réel > 0. En utilisant la définition, déterminer pour quels α la fonction $f(x) = x^\alpha$ est dérivable en 0.

Exercice 5. Montrer directement avec la définition de la dérivée, que :

(a) Pour $n \in \mathbb{N}$, la dérivée de x^n est nx^{n-1}. [On pourra utiliser la formule du binôme de Newton]

(b) La dérivée de $\frac{1}{x}$ est $-\frac{1}{x^2}$.

(c) La dérivée de $\sqrt{x}$ est $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Exercice 6. Le but de cet exercice est de montrer rigoureusement que la dérivée de sin est cos. On admettra que $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $|\sin(x)| \leq |x| \leq |\tan(x)|$, et que $\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$.

(a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$.

(b) En déduire que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x - a} = \cos a$.

Exercice 7. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction définie par : $f_n(x) = x^n \sin(\frac{1}{x})$ pour $x \in \mathbb{R}^*$, et $f_n(0) = 0$.

(a) Expliquer pourquoi toutes les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}^*$, et même dérivables sur $\mathbb{R}^*$.

(b) Montrer que f_0 n'est pas continue en 0, mais que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue en 0.

(c) Montrer que f_1 n'est pas dérivable en 0.

(d) Montrer que f_n est dérivable en 0 si $n \geq 2$.

(e) Montrer que f_2' n'est pas continue en 0.

(f) Montrer que f_n' est continue en 0 si $n \geq 3$.

(g) (*) Déterminer, en fonction de n, combien de fois on peut dériver f_n en 0.

Exercice 8. Rappelons que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite *paire* si $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$, et *impaire* si $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)$. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que : f paire $\implies$ f' impaire ; et que : f impaire $\implies$ f' paire. (est-ce que les réciproques sont vraies ?)

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq x^2$. Montrer que f est dérivable en 0.

Exercice 10. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a \in D$. Calculer $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{af(x) - xf(a)}{x - a}$.

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

(a) Montrer que si f est dérivable en 0, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} n(f(\frac{1}{n}) - f(0)) = f'(0)$.

(b) La réciproque est-elle vraie ? (on pourra construire un contre-exemple).

Exercice 12. Étant donnés une suite de fonctions $f_n : D \to \mathbb{R}$ et une fonction $f : D \to \mathbb{R}$, on dit que f_n tend vers f si : $\forall x \in D$, $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$.

(a) Calculer la fonction limite de la suite de fonction $f_n(x) = e^{\frac{-x^2}{n}}$.

(b) Montrer que la limite d'une suite de fonctions continues n'est pas forcément continue. On pourra étudier la suite $f_n(x) = x^n$ sur $[0, 1]$.

(c) (*) Montrer que si une fonction f est la dérivée d'une fonction g, alors f est limite d'une suite de fonctions continues. [On pourra utiliser une variante de l'exercice 11(a)]

Exercice 13. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f(x) = (1 + x)^n$.

(a) En calculant $f(1)$ de deux manières différentes, trouver une formule pour $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

(b) En dérivant f de deux manières différentes, trouver une formule pour $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.