UQÀM **Session d'hiver 2013**
MAT1013 Vivien RIPOLL
Analyse 1 (vivien.ripoll@lacim.ca)

FEUILLE D'EXERCICES 1 : ENSEMBLES, RÉCURRENCE

Ensembles et applications

EXERCICE 1. Soient A et B deux ensembles. Montrer les deux équivalences suivantes :

(a) $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$.

(b) $A \cap B = B \Leftrightarrow B \subseteq A$.

EXERCICE 2. Soient A, B, C trois ensembles. Montrer les deux égalités suivantes :

(a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

EXERCICE 3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit l'ensemble $E_n = \{kn \mid k \in \mathbb{N}, k \geq 2\}$. On pose :

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}, n \geq 2} E_n \text{ , et } X = \mathbb{N} \setminus E.$$

Soit P l'ensemble des nombres premiers. Montrer que $X = \{0, 1\} \cup P$.

EXERCICE 4. Pour chacune des applications suivantes, dire si elles sont injectives, surjectives, bijectives, et le démontrer.

(a) $\begin{array}{rcl} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & 3n+2. \end{array}$

(b) $\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3+1. \end{array}$

(c) $\begin{array}{rcl}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1/x. \end{array}$

(d) $\begin{array}{rcl} \{\text{étudiants de la classe}\} & \to & \{\text{lettres de l'alphabet}\} \\ x & \mapsto & \text{initiale du prénom de l'étudiant } x. \end{array}$

(e) $\begin{array}{rcl} \{\text{étudiants de l'UQÀM}\} & \to & \{\text{code de 4 lettres + 8 chiffres}\} \\ x & \mapsto & \text{code permanent UQÀM de l'étudiant } x. \end{array}$

EXERCICE 5. Donner des exemples (différents de ceux du cours et des autres exercices) d'une application

(a) surjective mais pas injective

(b) injective mais pas surjective

(c) ni injective ni surjective

Exercice 6. (Fonctions trigonométriques)

(a) La fonction $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est-elle surjective ? injective ?

(b) La fonction $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ est-elle surjective ? injective ?

(c) La fonction $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ est-elle surjective ? injective ?

(d) La fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est-elle surjective ? injective ? Restreindre les intervalles de départ et d'arrivée pour qu'elle soit bijective.

Exercice 7. Soient $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux applications. On peut construire leur composée $g \circ f : A \to C$. Montrer :

(a) f et g injectives $\Rightarrow g \circ f$ injective.

(b) f et g surjectives $\Rightarrow g \circ f$ surjective.

(c) $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective.

(d) $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective.

(e) (*) Montrer que l'implication $g \circ f$ injective $\Rightarrow g$ injective est fausse (donner un contre-exemple).

(f) (*) Montrer que l'implication $g \circ f$ surjective $\Rightarrow f$ surjective est fausse (donner un contre-exemple).

Pour les trois exercices suivants, on rappelle que deux ensembles A et B sont dits en bijection s'il existe une application bijective entre A et B.

Exercice 8. Soient A et B deux ensembles. Montrer qu'il existe une application injective de A vers B si et seulement si A est en bijection avec un sous-ensemble de B.

Exercice 9. (*) (ensembles finis) Soient A, B, deux ensembles *finis*. On note $\operatorname{Card} A$ (resp. $\operatorname{Card} B$) le nombre d'éléments de A (resp. B).

(a) Montrer que A et B sont en bijection si et seulement si $\operatorname{Card} A = \operatorname{Card} B$.

(b) Montrer qu'il existe une application injective de A vers B si et seulement si $\operatorname{Card} A \leq \operatorname{Card} B$. En déduire qu'il existe au moins deux Montréalais avec le même nombre de cheveux.

(c) Montrer qu'il existe une application surjective de A vers B si et seulement si $\operatorname{Card} A \geq \operatorname{Card} B$.

(d) Montrer que si $f : A \to B$ est injective et que $\operatorname{Card} A \geq \operatorname{Card} B$, alors f est bijective.

(e) Montrer que si $g : A \to B$ est surjective et que $\operatorname{Card} A \leq \operatorname{Card} B$, alors g est bijective.

Exercice 10. (ensembles infinis)

(a) Montrer que $\mathbb{N}$ est en bijection avec $2\mathbb{N}$ (l'ensemble des entiers pairs).

(b) (*) Montrer que $\mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathbb{Z}$.

Récurrence

Exercice 11. Démontrer par récurrence sur n les résultats suivants :

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n > n$.

(b) Pour tout $n \geq 1$, le produit de n entiers impairs est impair.

(c) Pour tout $n \geq 2$, $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + (n-1) \cdot n = \frac{1}{3}n(n-1)(n+1)$.

Exercice 12. Montrer par récurrence sur n les égalités suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Exercice 13. Soit $a > -1$ un nombre réel. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1 + na$.

Exercice 14. (*) Montrer par récurrence sur n que tout ensemble à n éléments a exactement 2^n sous-ensembles.

Exercice 15. Déterminer (et prouver) pour quels entiers naturels on a : $2^n \leq n!$.

Exercice 16. En calculant les premiers termes, deviner une formule pour la somme $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)$, puis la démontrer par récurrence.

Exercice 17. Un étudiant de la classe affirme avoir montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 2$), étant donné n points du plan, ils sont toujours alignés. Ça semble un peu louche, voyons sa démonstration :

“ Le cas initial est évident : si $n = 2$, 2 points sont toujours alignés. Pour la transmission, supposons qu'on sache que n points sont toujours alignés. Soient alors $(n+1)$ points : $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$. Les points A_1 jusqu'à A_n sont un ensemble de n points donc d'après l'hypothèse de récurrence, ils sont alignés. Autrement dit, le point A_1 est sur la droite formée par les points A_2 à A_n. De même, les points A_2 jusqu'à A_{n+1} sont un ensemble de n points donc d'après l'hypothèse de récurrence, ils sont alignés. Donc le point A_{n+1} est sur la droite formée par les points A_2 à A_n. Alors les points A_1 à A_{n+1} sont tous sur la même droite, celle formée par les points A_2 à A_n. Les $(n+1)$ points sont alignés.”

Expliquer pourquoi ce raisonnement est faux.

Exercice 18. Montrer par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 5^n est la somme de 1 et d'un multiple de 4. (Remarque : on peut aussi le montrer par d'autres méthodes)

Exercice 19. Montrer que si $x \neq 1$, alors $1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \dfrac{1 - x^n}{1 - x}$.

Exercice 20. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^3 + 5n$ est divisible par 6.

Exercice 21. Démontrer par récurrence la formule du binôme de Newton :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

[On rappelle que $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. On pourra utiliser (en la démontrant) la formule du triangle de Pascal : $\dbinom{n+1}{k+1} = \dbinom{n}{k+1} + \dbinom{n}{k}$.]

Exercice 22.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe des entiers naturels (dépendant de n) u_n et v_n tels que $(1+\sqrt{2})^n = u_n + v_n\sqrt{2}$. Donner u_{n+1} et v_{n+1} en fonction de u_n et v_n.

b) Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n^2 - 2v_n^2 = (-1)^n$.

Exercice 23.

On considère n droites dans le plan, telles qu'il n'y en ait pas deux parallèles ni trois concourantes (i.e. : chacune des droites coupe les $n-1$ autres en $n-1$ points distincts). On cherche une formule donnant le nombre R_n de régions du plan délimitées par ces n droites.

1) En faisant un dessin, calculer R_1, R_2, R_3, R_4.

2) Conjecturer une formule donnant R_n en fonction de R_{n-1}. La démontrer.

3) Conjecturer une formule donnant R_n en fonction de n. La démontrer.